Las bases de la Geometría Diferencial

POR JOSÉ JAVIER ETAYO MIQUEO*

Theorema egregium: Si superfircie curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.

K.F.Gauss: *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* (1827)

Tenía que suceder. De la geometría clásica, que se ocupaba de las propiedades de las figuras en cuanto tales, se había pasado, tras Descartes y Fermat, a una metodología que implicaba, para su estudio, la utilización de números, ecuaciones y funciones. Más tarde, la invención del cálculo infinitesimal, que buscaba estudiar las funciones en las proximidades de un valor de la variable, y a la cual no fue ajena la propia geometría que había planteado el problema de la tangente, trae como consecuencia obligada la aplicación de las técnicas del cálculo a cuestiones geométricas que serían, por consiguiente, consideradas desde un punto de vista local. He aquí cómo de este maridaje de la geometría y el análisis va a nacer una rama particular de la matemática, la que acabaría llamándose *geometría,* como su madre, y apellidándose *diferencial*, como su padre, el cálculo.

Como siempre, esta vía no apunta desde un principio a una doctrina sistemática ni está libre de discontinuidades. Por el contrario, van surgiendo hechos aislados que son incorporados al acervo de la geometría y, sobre todo, del análisis. Sólo cuando se inicia la organización de la nueva rama científica se absorben aquellos precedentes que quedan definitivamente enclavados en ella. Hagamos un breve resumen de los mismos.

1. Preliminares.

Los primeros que entran en la nómina están presentados en forma puramente geométrica, sin el concurso del cálculo. Como que cuando aparecen, 1673, aún no se ha publicado la *Geometría analítica* de Newton, escrita ciertamente dos años antes pero no editada hasta 1736. Se trata de los estudios de Ch. Huygens sobre el péndulo, que le llevan, en su *Horologium oscillatorium* a introducir las evolventes a una curva en la

* Académico Numerario.

forma geométrica con que solemos hoy ilustrarlas, como trayectorias de los puntos de un hilo acoplado a la curva que se va desenrollando manteniéndose tirante. Encontramos también allí el radio y el centro de curvatura de una curva en un punto y la evoluta como lugar de los centros de curvatura. Estas nociones que prácticamente componen la teoría de las curvas planas van llenando, con sucesivas ampliaciones y tratamientos, el estudio de las mismas. El propio Newton, en la obra dicha, las introduce igualmente utilizando ya métodos analíticos; y Leibniz, en 1692, se ocupa de las evolventes, a las que llama curvas paralelas.

En otro sentido, Euler estudia en 1778 las curvas que hoy conocemos como de anchura constante, y que él llama uniformes, es decir, las que mantienen constante la distancia entre cada dos tangentes paralelas. En las revistas de la Academia de San Petersburgo aparecen varias de estas publicaciones, incluso años después de su muerte, en 1783, al encontrarse numerosos originales inéditos. El estudio que se acaba de citar se incluye en la memoria "De curvis triangularibus", *Acta Acad. Petropolitanae*, 1778 (publicada en 1780), llamando curva triangular a la de tres retrocesos cuyas evolventes son de anchura constante. (Más adelante, en 1860, relaciona E. Barbier estas curvas con el problema probabilístico de la aguja de Buffon). Continúa, pues, Euler el estudio de las curvas planas que había atacado en su *Introductio in analysin infinitorum* (1748) y, más sistemáticamente, en una memoria publicada en 1775 [1].

Estamos ya en plena utilización de las nuevas técnicas en la geometría de las curvas planas pero considerándolas como parte del análisis mismo y de la geometría analítica, cosa nada rara desde que la geometría se había de algún modo sumergido en el álgebra. De manera bien expresiva lo dice l'Hôpital en el primer libro de texto de análisis que se publica, al titularlo *Análisis infinitesimal aplicado al estudio de las curvas* (1695).

Varios de estos argumentos recopila S.F. Lacroix (1765-1843) en su *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797), en el que determina la tangente, las parábolas de máximo contacto y el círculo osculador, lo que le permite definir la curvatura, su radio y su centro y, por consiguiente, la evoluta. Es de notar que ya Newton había obtenido en sus *Principia* el centro de curvatura como intersección de dos normales infinitamente próximas y Leibniz el círculo osculador como el que pasa por tres puntos consecutivos o infinitamente próximos también. El mismo Leibniz, en *Acta Eruditorum*, 1692 (1694), define la envolvente de una familia uniparamétrica, dando métodos para calcular su ecuación, y Johann Bernoulli estudia la envolvente de las trayectorias de los proyectiles para obtener la llamada parábola de seguridad.

Todos estos autores, y otros más, van destilando resultados analíticos que admiten una versión geométrica o están provocados por ella. En el capítulo de las curvas alabeadas, el omnipresente Euler, en una obra sobre superficies que luego citaremos, de 1760, determina la tangente en un punto, el radio de curvatura y la posición del plano osculador, que ya había sido introducido por Bernoulli. Establece también Euler la representación de una curva por sus ecuaciones paramétricas, con parámetro el arco, como en los *Comment. Acad. Petropolit.*, **8** (1736). Antes, a sus 16 años, escribe A.C. Clairaut las *Recherches sur les courbes à double courbure*, 1729 (1731), considerando las curvaturas de las dos curvas planas obtenidas al proyectar la curva dada sobre dos planos ortogonales, de modo que aparece así la curva como intersección de dos superficies cilíndricas; y en ella estudia la tangente y el plano normal.

Simultáneamente al caso de las curvas, planas o alabeadas, y tomándolas en ocasiones como medio, se realiza el estudio de las superficies. Ya en 1697 planteaba Johann Bernoulli, en el *Journal des Savants,* el problema de encontrar el arco más corto entre dos puntos de una euperficie convexa. Al año siguiente lo resuelve su hermano Jakob para cilindros, conos y superficies de revolución. En 1728 había obtenido Euler las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en "De linea brevissima in superficie quamcumque duo quaelibet puncta jungente", *Comm. Acad. Petrop.* , **3,** 1728 (1732), utilizando el método del cálculo de variaciones introducido por él. En realidad se suele considerar a Johann Bernoulli inventor de este cálculo por su contribución al problema de la braquistócrona, curva ya estudiada por Leibniz y los Bernoulli [2]; Johann llega también a las ecuaciones de las geodésicas de una superficie en 1742. Anticipamos el nombre en cien años, ya que el de *geodésicas* se debe a Liouville en 1844.

De nuevo Clairaut, que entre 1733 y 1739 trabajaba sobre la forma de la Tierra, estudia las superficies de revolución y establece la relación entre el ángulo con que una geodésica corta a los meridianos y el segmento de perpendicular comprendido entre esos puntos de intersección y el eje de revolución (*Mem. Acad. París*, 1733 (1735)). Y es Euler el primero en considerar las superficies desarrollables en "De solidis quorum superficiem in planum explicare licet", *Novi Comment. Acad. Petropol.*, **16** (1771), obteniendo las ecuaciones que han de verificar y demostrando que la familia de tangentes a una curva alabeada describe una superficie desarrollable. En este trabajo, análogamente a como antes hizo con las curvas, expresa las coordenadas de los puntos de la superficie en función de dos parámetros, lo que, quizá por vez primera, avanza la idea de coordenadas curvilíneas que en Gauss tendrá total realización.

Justamente suele tomarse a Euler como el fundador de la geometría de la superficie. En "Recherches sur la courbure des surfaces", *Mem. Acad. de Berlin,* **16** (1760), analiza la curvatura de las curvas de intersección de la superficie con planos normales a ella y obtiene que en cada punto las curvaturas máxima y mínima corresponden a dos curvas situadas en dos planos perpendiculares entre sí: esas curvaturas se llamaron *curvaturas principales,* y *direcciones principales* son las de aquellas dos secciones. Si designamos por k_1 y k_2 las curvaturas principales, el *teorema de Euler* nos dice que la curvatura k de una sección normal que forma un ángulo A con una de las direcciones principales es

$$k = k_1 \cos^2 A + k_2 sen^2 A.$$

Dieciséis años más tarde encuentra Meusnier, como veremos, la curvatura de cualquier sección plana, no necesariamente normal.

Las superficies mínimas es otro de los temas de este capítulo y uno de los mejor tratados desde que fue iniciado por Lagrange, entre 1760 y 1764, como aplicación de sus trabajos sobre el cálculo de variaciones. Él fue también quien estudió detalladamente los problemas de contacto de curvas y superficies en su *Traité des fonctions analytiques* (1797), cuestión que posteriormente culminó Cauchy en *Leçons sur les applications du calcul infinitesimal à la géometrie* (1826), donde obtiene dos de las fórmulas de Frénet. También Lacroix, como vimos en el caso de las curvas planas, ha dedicado sus esfuerzos a la teoría de contacto. Obtiene la esfera osculatriz a una curva alabeada y su radio, que conocemos como radio de curvatura normal; y aplicándolo a las curvas sobre una superficie reproduce de nuevo el teorema de Euler. En cuanto al contacto entre superficies, le aparece el plano de máximo contacto en un punto de una superficie, que es el plano tangente, pero ve que no hay en general esfera osculatriz; busca entonces otras superficies cuadráticas que tengan con la superficie contacto de segundo orden y halla el paraboloide osculador, probando que dos superficies que tengan en un punto común las mismas curvaturas principales, tienen en él un contacto de segundo orden.

He aquí, pues, el pequeño retablo [3] de cosas sueltas, aunque relacionadas algunas entre sí pero sin componer aún una doctrina autónoma, que nos es dado contemplar cuando nos acercamos a los comienzos de nuestro siglo XIX. En esa ancha y difusa banda entre los dos siglos, un nombre viene a unirse al de Euler para constituir la vanguardia de lo que ha venido a llamarse *geometría diferencial,* siquiera en su versión *clásica*, esto es, la teoría local de curvas y superficies del espacio euclídeo representadas por ecuaciones analíticas: ese nombre es el de Gaspard Monge (1746-1818).

2. La escuela francesa

En anteriores trabajos [4] hemos situado la figura de Monge como punto de convergencia de las dos direcciones, casi enfrentadas, que se apreciaban en la geometría desde Descartes. Una ya desplazada pero que con él iba a despertar hacia un nuevo florecer: la rama sintética, puramente geométrica, que pronto daría paso a la geometría proyectiva. Y la otra, la que seguiría haciendo uso de las técnicas y de la metodología que el análisis había desarrollado, e iba a conducir a sentar las bases de la geometría diferencial.

Monge contribuye a esta fundamentación de dos maneras complementarias: con su propia investigación y con la formación de un destacado plantel de discípulos: Meusnier, Dupin, Malus, Lancret, Hachette, Rodrigues, a los que hay que añadir después un grupo de matemáticos franceses que a partir de 1836, fecha de su fundación, publican sus resultados en el *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* que hoy apodamos popularmente "el Liouville", en alusión a su fundador [5]: Frénet, Serret, Puisseux, Bertrand, Ribaucour, Saint Venant, ... Todos ellos mencionados hoy todavía por dar nombre a figuras y teoremas a los que dedicaron su atención.

Un resumen de estas investigaciones se contienen en las notas que el mismo Joseph Liouville (1809-82) incluye en la edición de 1850 de la obra clave de Monge en este terreno y que mantiene todavía en su título la visión que entonces se tenía de tales estudios: *Applications de l'Analyse à la Géometrie.* Parece que la obra fue escrita en 1795 y que en 1802 se hizo, en colaboración con Hachette, nueva redacción, así como una posible edición en 1807.

En ella se recogen también las incursiones que con anterioridad había hecho Monge en estos temas. Por ejemplo, sobre las evolutas de curvas alabeadas a las que dedicó una memoria escrita en 1771 y publicada en 1785: *Developpées, rayons de courbure et les différentes genres d'inflexions dans les courbes à double courbure.* Ahí aparece de modo implícito el concepto de *torsión,* definitivamente establecido por su discípulo Lancret; no su nombre, que sustituye al entonces utilizado de *flexión,* y que se debe a L.I. Vallée que lo incorpora en la edición de 1825 de su *Traité de géometrie descriptive.* El mismo M.A. Lancret (1774-1807) define la tangente, normal y binormal en cada punto de la curva pero, igualmente, el nombre de *binormal* lo pone A.J.C. Barré de Saint Venant (1796-1886) en *Journal de l'Ecole Polytechnique,* **18** (1845). Este último autor llegó a ocuparse de la teoría de curvas a través de sus investigaciones sobre elasticidad. Fueron precisamente las lecciones del libro de Monge las que suscitaron el interés por la naciente geometría diferencial, interés provocado por las demandas de la mecánica, física, técnica y astronomía, que encontraban ya insuficientes los resultados de la geometría elemental.

Volvamos a nuestro autor y a uno de los temas de las *Applications,* seguramente iniciado por él: el de las superficies regladas. Monge estableció la ecuación en derivadas parciales de tercer orden a que satisfacen todas las superficies regladas, haciendo a continuación Hachette el estudio geométrico. (Añadiremos que posteriormente continuaron esta teoría F. Minding (1838), M. Chasles (1839), Bonnet y P. Serret (1860)). Ya en un artículo que Monge presentó en 1775 a la Academie des Sciences de París consideró como caso particular de las superficies regladas las desarrollables y encontró igualmente la ecuación en derivadas parciales que éstas han de verificar.

Tomando así el relevo de Euler en lo referente a estas superficies desarrollables, y definiendo las *líneas de curvatura* de una superficie como las tangentes en cada uno de sus puntos a las direcciones principales que aquél estableció, prueba que las normales a una superficie a lo largo de una línea de curvatura engendran una superficie desarrollable. Un hecho curioso se le presenta al considerar superficies regladas no desarrollables cuyas generatrices son isotropas; ya su discípulo Poncelet había introducido en su memoria de 1822 [4] las curvas imaginarias y, en particular, las isotropas, determinadas luego por la condición $ds^2 = 0$. Estas superficies tienen un sistema único de líneas de curvatura, precisamente las líneas isotropas, de modo que en todos los puntos coinciden las dos curvaturas principales, iguales a la curvatura en la dirección de la generatriz isotropa. Ahora bien, sobre cada una de estas líneas existe un único punto real, así que en el estudio de estas superficies sólo identificaba la única curva real que hay en ellas, llegando al resultado sorprendente de que tales superficies, imaginarias, eran en realidad curvas desde el punto de vista real: "Ce résultat est extraordinaire", se ve forzado a exclamar [3].

Insistiendo en este tipo de materias, mencionaremos el de las congruencias rectilíneas o familias de rectas dependientes de dos parámetros. Estas rectas pueden siempre agruparse en dos series de superficies desarrollables y, cuando estas superficies son ortogonales, las rectas de la congruencia son, como se sabe, normales a un conjunto de superficies a las que tales desarrollables cortan en sus líneas de curvatura. Monge había sido llevado a estudiar y obtener estos resultados analizando un problema de ingeniería que en 1771 publicó en las *Mémoires de l'Academie des Sciences* bajo el título "Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais", que más tarde recogerá, como veremos, su discípulo Dupin.

Digamos finalmente que su aportación a la teoría de curvas y superficies fue decisiva a la hora de tomar conciencia de que se estaba edificando una nueva disciplina. Él va estableciendo una estrecha relación entre las familias de superficies y las ecuaciones en derivadas parciales, el estudio paralelo de las ecuaciones diferenciales totales, su célebre teoría de las características o la solución de la ecuación de las superficies mínimas, que había iniciado Lagrange. Tras Monge hubo nuevas contribuciones a esta última teoría. Así, Meusnier demostró en 1785 que las superficies mínimas son aquéllas cuyas curvaturas principales en cada punto suman cero, lo que equivale evidentemente a caracterizarlas por la anulación de la curvatura media, cuando Sophie Germain (1776-1881) introdujo este concepto, como media aritmética de esas curvaturas principales, en el *Journal* de Crelle, **7** (1831). Igualmente aportaron nuevos resultados Legendre, Bonnet, Riemann y Lie y, ya en 1873, se ilustró con el problema de Plateau que consiguió, como es bien conocido, superficies mínimas de película jabonosa.

Hemos nombrado a Meusnier, Jean Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place (1754-93), discípulo de Monge en Mezières, a quien éste mostró el trabajo ya citado sobre curvatura de las superficies que Euler publicó en 1760 y que Meusnier extiende en su famoso teorema que da información completa sobre la curvatura de cualquier curva de una superficie en un punto dado. Como sabemos bien, la curva sección de la superficie con un plano que forma en el punto un ángulo **m** con la normal en él a la superficie tiene curvatura **k** /cos **m**, siendo **k** la curvatura de la sección normal de igual dirección que la curva en ese punto. Este teorema, que conservamos con el nombre de su autor, junto con otros resultados que reproducen más elegantemente los de Euler, fue publicado en la "Mémoire sur la courbure des surfaces", *Mém. savants étrang.*, **10**, 1776 (1785).

Pierre Charles François Dupin (1784-1873) fue también discípulo de Monge en la École Polytechnique, de donde salió ingeniero naval. Más tarde se hizo profesor de geometría en París y destacó durante su larga vida como político y promotor industrial, llegando a par de Francia y senador en tiempos de Napoleón III. Nunca perdió el contacto con el mundo de la ingeniería, al tiempo que introducía nuevas nociones geométricas. Estas se recogen principalmente en su obra *Développements de géometrie* (1813), subtitulada de modo expresivo para conectar ambas direcciones: *Avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique,* etc., volviendo a temas que también Monge había tocado. Incluso su segundo libro, *Applications de géometrie,* 1822 (1825), acentúa la orientación práctica. En la más teórica, y en su primera obra, nos legó, dentro de la teoría de superficies, una exposición, que es la que prácticamente se utiliza en la actualidad, de las líneas de curvatura, conjugadas, asintóticas, las cíclides o envolventes de familias de esferas tangentes a tres dadas, y, desde luego, la famosa *indicatriz* que lleva su nombre y que clasifica los puntos de una superficie asociando a cada uno una cónica que aproximadamente puede entenderse como la sección de la superficie por un plano paralelo al tangente y suficientemente próximo a él, o bien, la sección por ese plano del paraboloide osculador a la superficie estudiado por Lacroix.

Mencionemos finalmente a otro de los discípulos de Monge, Olinde Rodrigues (1794-1851), cuyo nombre va unido a una fórmula que da los polinomios de Legendre pero que ha sido perpetuado sobre todo por el teorema que lo ostenta y que caracteriza las líneas de curvatura de una superficie: la diferencial del vector normal a la superficie más la del vector que determina la línea de curvatura por la curvatura normal en la dirección de ésta, es cero. Sus resultados, de 1815, fueron publicados en *Correspondance sur l'École Polytechnique*, **3**, y en el *Bulletin de la Société Philomatique,* **2**.

Todavía podíamos hacer una breve referencia al "grupo de Liouville", empezando por él mismo que en 1846 y en la revista por él fundada introduce las superficies de su nombre, que son aquéllas cuyas geodésicas pueden obtenerse mediante una cuadratura. Fréderic Jean Frénet (1816-88), en la tesis doctoral que presentó en Toulouse en 1847, obtuvo sus famosas fórmulas que vieron la luz en un resumen de la misma titulado, una vez más, "Sur les courbes à double courbure" y publicado en el *Journal* de Liouville, **17** (1852). El año anterior, y en la misma revista, las había dado a conocer Joseph Alfred Serret (1819-85), adelantándose a Frénet en la publicación pero no en la obtención, que seguramente debió de conseguir de modo independiente. Y así son hoy también conocidas por *fórmulas de Frénet-Serret.* Posteriormente quedarían incorporadas a la teoría del triedro y de la referencia móvil, de G. Darboux y E. Cartan.

He aquí, premiosa y aburridamente contados, algunos antecedentes de lo que pronto habrá que llamar *geometría diferencial.* Hasta ahora no había sido más que una mera aplicación directa a problemas geométricos de las ideas que nacieron del cálculo. No es, pues, profundamente original ni ha conseguido desgajarse de sus orígenes, pero éstos son los mimbres con los que se ha de fabricar el cesto. De ahí que nuestra exposición no haya constituído un todo orgánico sino sólo una relación de resultados. Como ideas subyacentes en toda esta época podrían señalarse la de función, límite y traslación, que son las que dan base a esta teoría. Pero en ella no aparece todavía demasiado clara la fundamentación de las nociones de curva y superficie a través de la de correspondencia o función y la abstracción de la tangente como función derivada.

3. Gauss.

El paso decisivo que va a inaugurar una nueva época de la geometría diferencial, el que la elevará de ser un simple capítulo del cálculo a constituirse en disciplina independiente, lo da la pequeña obra de una figura majestuosa de la matemática de su tiempo, y aun de todos los tiempos. Karl Friedrich Gauss (1777-1855) irrumpe en los más variados campos de la matemática, en los que supo dejar la impronta de su genio, combinando la fertilidad y originalidad de los matemáticos del XVIII con el espíritu crítico de los nuevos tiempos. Así comparte con sus contemporáneos Kant, Goethe, Beethoven y Hegel la manifestación en su propio país de las modernas ideas en la forma más poderosa [6].

Seguramente otros capítulos de esta historia harán su semblanza y analizarán sus aportaciones en cada una de las ramas que cultivó. Aquí nos limitaremos a entrar directamente en lo que atañe a la nuestra, centrada en la teoría de superficies, cuya mayor riqueza y complejidad respecto de las curvas pudo comprobar, y para la que proporciona todas las ideas fundamentales. Con él se pasa de la consideración de las superficies sumergidas en el espacio euclídeo, que caracteriza la etapa anterior, a mirarlas en sí mismas, intrínsecamente, sin relación con su situación en el espacio, lo que se logra a través de las nociones fundamentales de la longitud del arco y de la curvatura. Es como si, resumiendo su postura, se preguntase: ¿qué puedo decir de una superficie de la que se conoce sólo su curvatura?.

Para llegar a la culminación de su obra, Gauss explota sistemáticamente en las superficies el empleo de aquellas coordenadas intrínsecas de Euler que la representan paramétricamente: las llamadas coordenadas curvilíneas. En ellas no sólo está en germen la idea de mapa local, que será destacada luminosamente por Riemann, sino que nos permiten arriesgar la idea de que a través de ellas tuvo Gauss el presentimiento profundo de que buena parte de las nociones de la geometría diferencial no estaban montadas sobre la superficie instintivamente pensada, sino sobre el anillo de funciones en ella definido.

Por otra parte, y dicho también en forma más actual, fue el primero en comprender, si bien no de un modo explícito, que para la definición de la derivada de un vector era excesivo exigir la estructura de un grupo de transformaciones del espacio, como las que posteriormente darían lugar a las derivadas de Lie. Comprendió que es posible definir una derivación -

la derivada geodésica - en una superficie que no contenga necesariamente un grupo de traslaciones, y esto le concedió la libertad de pensar en una geometría propia intrínseca y diferente sobre la superficie. No creo exagerado mirar hoy así las más originales concepciones del pensamiento de Gauss [7].

Se manifiesta éste en una obra de unas cuarenta páginas que es seguramente la más importante de la historia de la geometría diferencial y, desde luego, su partida de nacimiento como teoría intrínseca de superficies. Está dividida en 29 secciones, no todas de la misma importancia, y tardó alrededor de quince años en escribirla. Su publicación data de 1827 y se trata, como es obvio, de las *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

Desde 1805 ocupaba Gauss una cátedra en la Universidad de Göttingen y era director de su Observatorio. Bien pudo ser su dedicación parcial a trabajos de astronomía, como después a los de cartografía y geodesia, la que inspiró la orientación de su teoría en una forma eminentemente distinta de la de Monge.

Monge era un ingeniero y veía la superficie como la frontera de un cuerpo sólido y, en consecuencia, hacía hincapié en las propiedades de la superficie relacionadas con el espacio circundante [3]. Pero Gauss trabaja sobre la superficie de la Tierra que localmente, en cartografía, se representa sobre un plano; el plano se estudia como tal, no es preciso suponerlo dentro del espacio tridimensional, y las coordenadas del plano nos proporcionan las coordenadas geográficas de cada mapa de la Tierra, que se podrá estudiar como una superficie exenta de su espacio ambiente. No es difícil ya pensar para una superficie en general unas coordenadas curvilíneas $(\mathbf{p},\mathbf{q})$, trasladadas a ella desde las cartesianas del plano, tal como Euler había establecido, y estudiar la superficie, igual que hacemos en el caso del plano, respecto de esas coordenadas, y no de las del espacio.

Por otra parte, y estirando la idea, lo mismo que los problemas geométricos del plano euclídeo tienen su instrumento de resolución en la introducción del concepto de longitud, ya que de él dependen las magnitudes geométricas básicas, como ángulos y áreas, así también buscará atacar los de la superficie terrestre - y los de cualquier superficie en cuanto tal - por la medición de distancias sobre ella, cosa tanto más lógica cuanto que las técnicas de triangulación geodésica que utiliza en la práctica así se lo inspiran.

Vamos a indicar muy resumida e intuitivamente el desarrollo de las ideas principales que Gauss expone en su trabajo [8].

La diferencia entre las coordenadas cartesianas del plano y las curvilíneas en una superficie estriba fundamentalmente en que las primeras componen dos familias de rectas paralelas entre sí mientras que las segundas son dos familias de curvas cuyas "separaciones" y el ángulo que cada dos de ellas forman en un punto van variando al pasar por continuidad de un punto a otro. Esto obliga, como sabemos hoy muy bien, a cambiar la expresión pitagórica de la distancia en el plano por una expresión más general que Gauss expone así: el cuadrado de la distancia entre dos puntos próximos de coordenadas (p, q) y $(p+dp, q+dq)$ es:

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2,$$

donde E, F y G son funciones de p y q. "Esta ecuación es una de las cumbres de todo el edificio de las matemáticas y de la física - dice exaltado un autor [9] -, una cumbre donde deberíamos exclamar reverentemente como Fausto al percibir de repente el símbolo del macrocosmos: '¿Era un Dios quien escribió estos signos?' Sólo eran necesarios dos pasos, uno dado por Riemann y el otro por Einstein, a fin de llevarnos desde la ecuación de Gauus al dominio de la relatividad general."

Por nuestra parte observemos de lo dicho que estas funciones, E, F y G, rigen las propiedades de la superficie que se conservan en cualquier transformación que deje invariante la métrica, es decir, que mantenga las distancias; por ejemplo, curvando una superficie sin estirarla. Así, el camino de mínima distancia entre dos puntos, medido sobre la superficie, o el ángulo de dos direcciones en uno de sus puntos: son las tantas veces repetidas propiedades *intrínsecas* de la superficie, que serían vistas desde ella sin salir al exterior. No podría ocurrir esto, como es evidente, con otros elementos, como las líneas asintóticas o las de curvatura.

¿Y la curvatura misma de la superficie? Gauss, inspirado por sus trabajos de astronomía, la define mediante la aplicación esférica, la hoy llamada *aplicación de Gauss:* Si se toma en cada punto de una región acotada A de la superficie el vector unitario normal a ella y se trasladan todos esos vectores a un mismo origen, sus extremos definen una región $n(A)$ de la superficie esférica de radio unidad. El área de $n(A)$ es lo que inicialmente llamó Gauss curvatura total de A, curvatura que ya era conocida por la escuela de Monge, aunque sin relacionarla con la geometría intrínseca (véase O. Rodrigues, *loc. cit.*) Y si a es un punto de A,

$$k_a = \lim_{A \to a} \text{ár. } n(A) \,/\, \text{ár. } A$$

es, todavía de forma preliminar y hoy no muy rigurosa, y por analogía con la curvatura de curvas planas, la *curvatura* (de Gauss) *en el punto* a. Ahora, la *curvatura total* de A se define ya por:

$$\int_A k_a \, d\sigma,$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área.

Gauss continúa estudiando su curvatura y viendo que en cada punto es igual al producto de las dos curvaturas principales en él: obtiene su fórmula en distintas expresiones analíticas y, una de ellas, en función de los coeficientes E, F y G de aquella primera forma cuadrática fundamental que daba la distancia, y de sus derivadas. Lo que entraña una sorprendente consecuencia: la curvatura de una superficie es, según eso, una propiedad intrínseca de la misma, depende sólo de ella y no de la forma en que se halle sumergida en el espacio. Para saber que la Tierra es curva, volviendo a la imagen con que iniciábamos este tema, no hace falta ver'a desde fuera, como nos la retratan desde un satélite: basta con que midamos longitudes sobre ella. Como suele apuntarse, si fuéramos seres bidimensionales, incapaces de concebir el espacio exterior, y nos moviéramos sobre la Tierra como si fuera un plano, podríamos, a pesar de todo, comprobar que no es un plano. Y otra consecuencia más: si una superficie se transforma isométricamente, un papel que se arrugue, por ejemplo, la curvatura en cada punto permanece invariable [10]. El mismo Gauss se vio inclinado a llamar *teorema egregio* a tan magno resultado.

De él se desprende que una superficie esférica no es localmente isométrica a un plano. Geométricamente era presumible este hecho: un pequeño triángulo sobre la esfera cuyos lados fueran arcos de geodésicas, es decir, de circunferencias máximas, debería representarse isométricamente en un triángulo plano; pero los ángulos de éste suman dos rectos mientras que los del triángulo esférico dan una suma mayor, luego esa representación es imposible. Este fenómeno, generalizable a superficies arbitrarias, hace decir a Gauss que "se cuenta entre lo más elegante de la teoría de superficies curvas" [8], y seguramente es el que le llevó a intuir la existencia de geometrías no euclídeas. Pero además consigue probar que la curvatura total de un triángulo suficientemente pequeño de lados geodésicos es igual a la suma de sus ángulos menos π . Y más adelante extiende la fórmula al caso de polígonos geodésicos.

Como se sabe bien, este resultado ha sido objeto de importantes generalizaciones. Pierre Ossian Bonnet (1819-92), en el *Journal de l'École Polytechnique,* **19** (1848), obtiene una expresión que todos los manuales recogen y que conocemos por *fórmula de Gauss-Bonnet,* y que da la curvatura total de un polígono de lados no necesariamente geodésicos en función de la curvatura geodésica a lo largo del borde del polígono. Esa curvatura geodésica de una curva sobre una superficie, que ya era conocida por Gauss y considerada por vez primera por F. Minding en el *Journal* de Crelle, **5** (1830), debe su nombre al mismo Bonnet y no es más que la curvatura de la proyección de la curva dada sobre el plano tangente. Por su mediación se definen también las geodésicas de una superficie como aquéllas cuya curvatura geodésica es nula.

Añadiremos finalmente, como muestra del juego que el teorema de Gauss-Bonnet ha dado, por sucesivas aplicaciones y extensiones que llegan hasta Chern y la teoría de clases características, ya en las mitades de nuestro siglo XX, que puede dársele en algunos casos una versión "topológica" basada en aquella característica de Euler de los poliedros, igual al número de vértices más caras menos aristas. Entonces, si una superficie cerrada orientada se descompone en un número finito de polígonos, la curvatura total de la superficie es igual a 2π por su característica de Euler (o de Euler-Poincaré). Pero, ¡oh, sorpresa!, resulta así que la curvatura total de estas superficies, que es la integral de un invariante local, sólo va a depender de su característica, que es un invariante global, y no de la métrica a través de la cual la habíamos definido. Es éste, casi con seguridad, el primer teorema que partiendo de estructuras locales nos da una propiedad global de la superficie [11].

4. Riemann.

A la muerte de Gauss ocupa Dirichlet su cátedra de Göttingen y a él le sucede en 1859 Georg Bernhard Riemann (1826-66). De él, probablemente, como de Gauss, se hablará en otras lecciones de este curso, pues que también iluminó las principales cuestiones que estaban en boga en aquellos momentos esplendorosos de la fundamentación matemática. Igual que en el caso de Gauss, es también un breve tratado de Riemann, de unas quince páginas, el que abre nuevos caminos al entendimiento de la geometría y, en concreto, de la geometría diferencial.

Pero hay otro hecho histórico, casi anecdótico y de todos sabido, que lo relaciona con Gauss. A partir de los veinte años realiza sus estudios en Göttingen y en Berlin y en 1851 lee en Göttingen su tesis doctoral "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse", en la que aparecen ya las que luego se llamaron superficies de Riemann. La integral, también de su nombre, se contiene en un trabajo del año 53, presentado como primer ejercicio para optar, en la misma Universidad, a la habilitación para la docencia privada: "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe". Y al año siguiente, el 10 de junio, debía, como segundo requisito, pronunciar una lección elaborada para ese fin. Normalmente el candidato proponía tres proyectos de los que el tribunal elegía uno, por lo general el primero. Riemann somete un primer tema sobre series trigonometricas y fundamentos del análisis, un segundo sobre discusión del número de primos menores que un número dado y el tercero sobre las hipótesis en que se basa la geometría. "Los dos primeros los había preparado bien pero Gauss ha escogido el tercero y ahora estoy en apuros", escribe durante el plazo dado para su preparación.

El resultado es conocido de todos. Gauss, el casi octogenario presidente que había elegido aquel tema, interesado por ver cómo entendía el joven candidato problemas que a él mismo le habían absorbido hasta entonces, quedó auténticamente entusiasmado y acaso fue el único que pudo seguir la exposición de las nuevas y profundas ideas. Su desarrollo está hecho de un modo discursivo, sin fórmulas ni cálculos, y parece que el autor pensaba formalizarlo después analíticamente y que su prematura muerte lo impidió. Sólo entonces se publicó el original, tal como estaba, al encontrarlo Dedekind entre los manuscritos de Riemann. Esta es la pequeña historia de uno de los textos más famosos y de mayor proyección e influencia en la matemática: *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* [12].

Su lectura, bastante difícil para un matemático (otras razones darían los que no lo son), precisamente porque la presenta en forma casi de divulgación, sin concretar formalmente sus pasos, nos va llevando, a través de una generalización que hoy nos parece muy natural pero que entonces tendría que chocar frontalmente con la geometría vigente y con las concepciones kantianas, por los mismos cauces que había trazado su maestro Gauss. Este, recordamos, había tratado las curvas, y sobre todo las superficies, desgajadas de toda adherencia exterior. La métrica definida en una superficie proporciona toda la información intrínseca de la misma y, en particular, la curvatura, que nos mide en cada punto el grado de desviación, de diferencia de la superficie con respecto a una superficie plana. Parece como si Riemann se preguntase si con las superficies se termina la geometría y si no hay más que una métrica para ellas. Pero para entonces ya ha surgido el plano hiperbólico, esencialmente distinto del euclídeo, y, por otra parte, él piensa también en fenómenos de la mecánica y de la física que requieren espacios más amplios que la superficie. Discurrir sobre estas cuestiones es el argumento de su memoria, precaviéndose ya de los escollos que va a encontrar: "... estoy menos ejercitado en estas tareas de naturaleza filosófica donde las dificultades residen más en los conceptos que en la construcción, y no he podido además hacer uso de ningún estudio previo, excepto de algunos breves apuntes sobre el tema que el Consejero Privado Gauss ha dado en su segunda memoria sobre residuos bicuadráticos ... y de algunas investigaciones filosóficas de Herbart."

Para empezar, el mismo espacio físico, que se suponía tridimensional euclídeo, debería ser susceptible de un estudio similar al del plano si esa hipótesis era cierta; pero podría también ser curvo, a la manera como lo es una superficie: curvo, supongámoslo o no sumergido en un espacio euclídeo de dimensión mayor que tres. Y nada impide pensar en otros problemas físicos, como el color, que requieran espacios de dimensión superior, considerando como espacio una colección continua de fenómenos homogéneos.

Así se ve obligado a iniciar su discurso con la introducción, todavía no muy formalizada, de lo que llama "contínuo" o "cantidad n veces extensa" y que podemos hoy entender como *variedad* n-dimensional. Va particularizando a los casos conocidos de dimensiones uno y dos y propone, ya en abstracto, el tratamiento del caso de dimensión cualquiera n, en el que cada punto viene determinado por n números $(x_1,\dots, x_n)$, lo mismo que en la superficie individualizaba Gauss al punto por el par (p, q). Consideraciones análogas a las de él, que encontraba para la métrica en la superficie una forma diferencial cuadrática, coincidente con la del plano en una proximidad suficiente del punto, llevan a Riemann a establecer la métrica local, para medir longitudes en pasos infinitamente pequeños, también mediante una forma cuadrática que hoy llamamos *métrica riemanniana* y que no llega a escribir pero que nosotros traducimos por

$$ds^2 = g_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

donde las $g_{ij} = g_{ji}$ son funciones de las coordenadas $(x_1,\dots, x_n)$, como ocurría con las E, F y G de la fórmula de Gauss.

Ahora le toca definir la curvatura. Se vale de las geodésicas, las líneas de más corta distancia que parten de un punto dado y poseen en él una dirección inicial. Cada dos de estas direcciones definen un plano y las geodésicas que en ese punto son tangentes a ese plano forman una superficie que tendrá una cierta curvatura de Gauss; sería la curvatura en esa dirección superficial y hoy la llamamos *curvatura seccional.* Puesto que hay $n\,(n-1)\,/2$ direcciones superficiales independientes, con ese número de curvaturas seccionales se lograría determinar localmente la curvatura de la variedad. En el caso de que sea nula la medida de la curvatura en todos los puntos, la variedad sería isométrica al espacio euclídeo, y es un caso particular de las variedades de curvatura constante, en las que las figuras pueden moverse sin sufrir extensión ni contracción, ya que las relaciones métricas están totalmente determinadas por la medida de la curvatura; esto no ocurrirá, naturalmente, si la curvatura varía de un punto a otro. Y si una superficie es de curvatura constante positiva se puede aplicar isométricamente sobre una esfera.

Hagamos un inciso. La curvatura en cada punto ya no es un número, como en la superficie, sino que está referida a las curvaturas seccionales. En 1861 presenta un trabajo para un concurso convocado por la Academia de París en relación con el problema de la conducción del calor; no consiguió el premio, que fue declarado desierto en 1868, porque el camino para obtener los resultados de su ensayo no estaba suficientemente detallado, deficiencia debida acaso a su delicado estado de salud. En este trabajo de París - *Parisarbeit* se suele llamar -, que fue publicado en 1876, plantea el problema de buscar condiciones que garanticen la posibilidad de pasar de una métrica de la variedad a otra, y encuentra condiciones suficientes. Pero en el desarrollo de su exposición se introduce casi sin ser notado el que luego será *tensor de curvatura* de la variedad. Fue después E.B. Christoffel (1829-1900) el que obtiene condiciones necesarias y suficientes, expresa el tensor de curvatura mediante los llamados *símbolos* de su nombre y deja también solamente entrever la idea de derivación covariante que será desarrollada por Ricci y Levi-Cività.

Y volvamos a la memoria para la habilitación, cuya tercera y última parte está dedicada a la aplicación a nuestro espacio de sus anteriores especulaciones. Desde Euclides se supone que los cuerpos tienen una existencia independiente de su posición, lo que indica que la curvatura del espacio es constante. Por otra parte se exige que la curvatura en cada punto sea nula según las tres direcciones superficiales. Se tienen, pues, propiedades de extensión o regionalidad y otras que son propiedades métricas, y deben distinguirse unas de otras ya que para unas mismas relaciones de extensión se pueden concebir distintas relaciones métricas. Esto se traduce en marcar una diferencia entre *ilimitado*, que habla de las relaciones de extensión, e *infinito,* referido a las relaciones métricas. Y así, a través de la experiencia podemos asignar a nuestro espacio la condición de variedad ilimitada de tres dimensiones pero de ahí no se deriva su infinitud. "Por el contrario -dice-, si se suponen los cuerpos independientes de la posición y se atribuye al espacio una curvatura constante, el espacio será necesariamente finito si esta curvatura tiene un valor positivo, por pequeño que sea". Las geodésicas correspondientes a una dirección superficial formarán una superficie ilimitada de curvatura constante, es decir, una superficie que en una variedad "plana", o lineal, de tres dimensiones toma la forma de una superficie esférica y será, en consecuencia, finita.

Una observación: abandonada así la idea de la infinitud de las rectas, que no por eso dejan de ser ilimitadas, aparece un modelo, sobre la esfera, de una geometría distinta de la euclídea y de la hiperbólica, la de la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri. Es un ejemplo de *espacio elíptico,* que a veces se ha llamado también "de Riemann". Conviene, sin embargo, reservar el nombre de *variedad riemanniana* a aquella definida a través de su métrica, como se ha contado incompletamente aquí, y de la cual son ejemplos particulares también el espacio euclídeo y el hiperbólico.

¿Y cómo es, finalmente, nuestro espacio? ¿Es de curvatura constante, positiva, negativa o nula? Podremos conocerla, siguiendo la idea de Gauss, sin salirnos del espacio mismo. ¿Cómo? La postura con que termina Riemann es para entonces bastante revolucionaria: "La respuesta a estas cuestiones no se puede obtener más que partiendo de los fenómenos verificados hasta ahora por la experiencia (...) Esto nos conduce a los dominios de otra ciencia, a los dominios de la física, en donde el objeto al que está destinado este trabajo no nos permite penetrar hoy". Y, así, Einstein demostró, por ejemplo, a partir de la gravitación, que la hipótesis provisional de Riemann de un espacio de curvatura constante había de ser abandonada en favor de un espacio con variaciones locales.

"La afirmación de Riemann de que la geometría del Universo era solamente un capítulo de la física y que debería ser estudiado, como cualquier otro, mediante la cooperación íntima de teoría y experimento, resultó así completamente justificada. También lo fue la fe de Riemann en su maestro Gauss. Cuanto más levantamos nuestra mirada asombrada hasta las pirámides del pensamiento verdaderamente gigantescas de Riemann y Einstein, tanto más admiramos lo mucho que estaba contenido invisiblemente en la forma breve, sin pretensiones, escrita por Gauss en 1827." [9]

5. Continuará

Todas estas ideas, que constituyen el desarrollo más genial de nuestra disciplina, fueron largamente explotadas a lo largo del siglo XIX por las escuelas alemana e italiana. Nuevamente vamos a caer, pues, en una relación algo atomizada de resultados - y podemos volver a [3] -, esta vez surgidos como consecuencia de las concepciones de las mentes poderosas de Gauss y Riemann, lo mismo que los iniciales, que prepararon el camino, nacen de las aplicaciones del cálculo a la geometría y se personifican en Euler y Monge.

Las ideas de Riemann se van imponiendo en la joven generación de matemáticos. Hemos citado ya a Christoffel, que introduce sus símbolos en una memoria sobre formas diferenciales cuadráticas de *n* variables publicada en el *Journal* de Crelle, **70** (1869). Sus investigaciones llevan a Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), en Padua, al llamado *cálculo diferencial absoluto,* elaborado entre 1887 y 1896 para la teoría de transformaciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, pero que al mismo tiempo repercutió en la teoría de las formas diferenciales cuadráticas. En sus manos y en las de algunos de sus discípulos, sobre todo de Tullio Levi-Civita (1873-1941) que ya en 1901 publicaba, aparte del original italiano, sus *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications,* fue encontrando su camino la teoría de tensores que, junto con las ideas de Riemann, sirvió a Einstein para fundamentar su doctrina, y también la noción de transporte paralelo que daría paso a la definición general de derivación covariante y de conexión, implantada ya en nuestro siglo por obra de los Weyl, Cartan, Ehresmann o Finsler.

Reduciéndonos a las superficies, tras su teoría intrínseca confeccionada por Gauss con su primera fórmula fundamental, se han hecho nuevos avances en problemas dependientes de la situación de la superficie en el espacio tridimensional, con el instrumental de la segunda forma cuadrática fundamental en la que intervienen no sólo los vectores tangentes a la superficie, como en la primera, sino también el vector normal que se sale de ella al espacio exterior. Conocidas son las ecuaciones de Mainardi-Codazzi o de Weingarten. Las primeras aparecen en un trabajo que D. Codazzi (1824-75) presenta en 1860 a un concurso convocado por la Academia de París y que se publica en las *Mém. pres. à l'Acad.*, **27** (1880), así como en los *Annali di Matematica,* **2** (1868-69). Para entonces ya las había publicado G. Mainardi en el *Giornali Istituto Lombardo*, **9** (1856). Gauss manejaba de algún modo estas fórmulas, si bien no explícitamente, en sus *Disquisitiones,* y Bonnet las aplica para demostrar un teorema fundamental de las superficies, el de que una superficie queda determinada, salvo desplazamientos, por las dos primeras formas fundamentales. Apareció publicado en el *Journal de l'École Polytechnique*, **42** (1867).

Este tipo de problemas entra muy dentro del espíritu del momento y unos cuantos se han hecho notables. Por ejemplo, el de hallar todas las superficies que admiten como primera forma fundamental una forma cuadrática definida positiva dada. También había sido puesto como tema de concurso por la Academia de París en 1859 y el premio fue ganado por Edouard Bour (1832-66), cuyo trabajo, a juicio de Liouville, "puede considerarse que posee toda la belleza de una memoria de Lagrange". A veces se da a ese problema el nombre del autor que lo resolvió; mención honorable merecieron también los trabajos en esa línea de Bonnet y Codazzi. La parte principal del de Bour fue publicada en el *Journal de l'École Polyt.*, **22** (1862). De acuerdo con lo que hemos visto, resultará que todas las superficies buscadas estarán determinadas por la forma dada y por una segunda forma cuyos coeficientes satisfagan las ecuaciones de Gauss y Codazzi.

Un segundo problema, también conocido por el nombre de su autor, es el de Minding. Ferdinand Minding (1806-85), profesor de la

Universidad alemana de Dorpat -hoy la estoniana Tartu-, dedicó sus esfuerzos a estudiar la deformación de superficies, de modo que una superficie pueda aplicarse isométricamente en otra. Su problema plantea el caso de dos superficies, de las que se da también su respectiva primera forma fundamental, y se pide averiguar si existe una correspondencia entre ellas que conserve la métrica, es decir, si ambas superficies pueden aplicarse una en otra. Demuestra en *el Journal* de Crelle, **19** (1839) que todas las superficies de igual curvatura constante son efectivamente isométricas. Curiosamente estudiaba en ese trabajo la geometría intrínseca de la pseudoesfera sin percatarse de la aplicabilidad de la misma al plano hiperbólico, lo que le habría llevado a adelantarse en prácticamente treinta años al descubrimiento de E. Beltrami.

De otro problema sugerido también por Minding en el Crelle, **18** (1838), da H. Liebmann la primera demostración, publicada en el *Göttinger Nachrichten* (1899), de que la única superficie cerrada de curvatura constante positiva sin singularidades es la esfera. Es un caso particular de un teorema más general, igualmente demostrado por Liebmann, y que parece deberse a Lagrange (1812), consistente en que una superficie convexa y cerrada no puede deformarse. En cambio, y en relación con el problema de la pseudoesfera, ha de ser ya Hilbert quien demuestre que no existe una superficie de curvatura constante negativa, analítica en todo punto y carente de singularidades.

Si quisiéramos reunir el cuerpo de doctrina de esa geometría diferencial clásica que se gesta en el siglo XIX, podríamos acudir a dos obras que aparecen en sus finales. Una es del más brillante representante de esa geometría en Italia, Luigi Bianchi (1856-1928), que la desarrolla en los tres volúmenes de sus *Lezioni di geometria differenziale* (1902-09). La segunda, los cuatro volúmenes de *Leçons sur la théorie génerale des surfaces* (1887-96) de Gaston Darboux (1842-1917), una geometría al estilo de Monge, expuesta con el fin principal de encontrar nuevas aplicaciones a la teoría tan vasta y tan poco conocida entonces de las ecuaciones en derivadas parciales, y desarrollada, por otra parte, con un cierto sentido cinemático y una viva intuición espacial. Darboux ocupó en Francia una posición análoga a la de Klein en Alemania.

Digamos una palabra sobre esto. Félix Klein (1849-1925) y Marius Sophus Lie (1842-99) habían publicado un trabajo sobre curvas en las que actúa transitivamente un grupo de isometrías. Klein se dedicará al estudio de los grupos discontinuos de transformaciones, que le conducirá al programa de Erlangen de definición de una geometría por las propiedades del espacio que quedan invariantes por uno de tales grupos. Lie trabajará con los grupos continuos y sus invariantes, demostrando su importancia central como principio clarificador en geometría, mecánica y ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Los grupos de Lie y sus álgebras están hoy en la base de nuestra geometría diferencial, enriquecida su teoría por insignes maestros que podemos representar por Élie Cartan.

Por otra parte, la geometría diferencial clásica no participa de la idea kleiniana de geometría, ya que es una geometría estrictamente local, que permite moverse en los entornos de cada punto pero no pasar de los de un punto a otro. Lleva en sí, no obstante, el germen que le hará acceder, al menos parcialmente, a una geometría global. El traslado paralelo de Levi-Cività, el triedro móvil de Darboux, la teoría de la referencia móvil del mismo Cartan, no hacen más que añadir un nuevo convenio a lo que la geometría local nos daba, y que está contenido en la noción de derivación covariante ya aludida [13]. Ahora, definir una conexión lineal es establecer un isomorfismo entre los espacios vectoriales de las derivaciones en cada pareja de puntos, que depende únicamente del camino que los une. Este isomorfismo es la última idea de paralelismo. La generalización de asociar a cada punto una geometría en el sentido de Klein es ya inmediata. Desde este sorprendente punto de vista, la geometría diferencial es el estudio de la red de interconexiones de las geometrías locales en cada punto y esa noción de interconexión es el último reducto de la noción de traslado paralelo [7].

Y hemos llegado ya, sobradamente, al siglo actual y, por tanto, al final de nuestra excursión. Hoy la geometría diferencial tiene unas hechuras en las que se hace difícil entrever su relación con la clásica. Creo que cualquiera que, sin una formación previa, cogiera un texto actual, pensaría que se trataba de una disciplina totalmente aparte de la anterior. En ésta, no obstante -y me gustaría haber sabido explicarlo-, se hallan precisamente las bases profundas de lo que ha llegado a ser, aquellas bases -podríamos concluir, remedando a Riemann- "welche der Differentialgeometrie zu Grunde liegen".

Bibliografía y Notas

[1] J.-P- COLLETTE: *Historia de las matemáticas,* Siglo XXI Ed., Madrid (1985).

[2] Hay una curiosa historia de rivalidad entre los dos hermanos, Johann y Jakob. El primero retó públicamente a todos los matemáticos, al viejo estilo de Tartaglia y de Cardano, a encontrar la curva que un grave recorrería en el menor tiempo posible, estando sus extremos a distinta altura. Él tenía la solución -la cicloide- y recibió en seguida la de Leibniz y, dentro del plazo dado, una de l'Hôpital, otra de Jakob, que esta vez no se dejó apabullar por su hermano menor, y, finalmente, una anónima inglesa, que se supone de Newton, contra el que posiblemente iba el desafío. (Se dijo que cada nación sabia envió su campeón y uno más habría sido difícil de encontrar. "¡ Y nosotros, Dios mío, nosotros, gente hispana, no estábamos!", se duele en una de sus *glosas* Eugenio D'Ors.) En

W. DUNHAM: *Viaje a través de los genios,* Ed. Pirámide, Madrid (1992),
puede verse la anécdota narrada y también otras, muy ilustrativas y sorprendentes, de nuestros grandes matemáticos.

[3] No es posible, naturalmente, tanto en este apartado como en el siguiente, hacer una referencia detallada de textos en los que encontrar las noticias aquí resumidas. Todas ellas están diseminadas, y muchas de ellas reiteradamente, en distintos libros de historia y de geometría diferencial. Algunos de los que hemos consultado irán apareciendo en estas notas cuando nos refiramos a cuestiones concretas. Sirvan como ejemplo las notas históricas contenidas a todo lo largo de un texto bien conocido:

D.J. STRUIK: *Geometría diferencial clásica,* Aguilar, Madrid (1966).

[4] J.J. ETAYO: "Los caminos de la geometría", *Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII,* R. Acad. de Ciencias, Madrid (1988), 11-29. "El reinado de la ge›metría proyectiva", *Historia de la Matemática en el siglo XIX* (1ª parte), R.Acad. de Ciencias, Madrid (1992), 115-138.

[5] Como, por la misma razón, decimos simplificadamente "el Crelle" para designar el *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* Lo cual se extiende también a muchos libros y textos: el hoy casi mítico *Elementos de análisis algebraico*, por ejemplo, era ya en mis tiempos de estudiante "el Rey Pastor". Claro que también así, *El Rey Pastor,* se titula una ópera de Antonio Mazzoni -como también otras de G. Sarti, B. Galuppi, P.A. Guglielmi y del mismo Mozart-, pero su libreto, del entonces casi inevitable *Metastasio*, el abate Pietro Trapassi, no es fácil que pueda ser confundido con el otro.

[6] D.J. STRUIK: *A concise history of mathematics*, Dover Publ., New York (1948).

[7] No puedo pasar por alto, al desgranar aquí reflexiones y aun citas literales, el recuerdo de un momento del pasado y de un compañero, para mí el más brillante y profundo, al que referirlas: Juan B. Sancho Guimerá. Permítaseme, aunque sea al socaire de notas suyas manuscritas, evocar su amistad y su colaboración generosa en tiempos difíciles para ambos, cuando conjuntamente preparábamos oposiciones a cátedras universitarias, y descubrir levemente su figura, tantas veces velada por él mismo, ya que nunca ha buscado su propia ostentación sino el enriquecimiento de los que a él se confiaron.

[8] Su exposición analítica en el lenguaje y notación actuales, que está repartida entre las lecciones de muchos textos de geometría diferencial clásica, puede seguirse de modo sistemático en el muy conocido:

M. SPIVAC: *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. II, Publish or Perish Inc., Boston (1970).
Va además precedido de un exordio, "Cómo leer a Gauss", para facilitar el paso a la forma moderna al lector que quisiera enfrentarse con el texto original.

[9] P. LE CORBEILLER: "La curvatura del espacio", *Matemáticas en el mundo moderno,* Ed. Blume, Madrid-Barcelona (1974), 144-150.

[10] En cambio la curvatura media, curiosamente, no es un invariante isométrico; no es, por lo tanto, una propiedad intrínseca. Basta verlo en un cilindro, deformable isometricamente en un plano, y que tiene ciertamente nula la curvatura total; pero no la media, que es el inverso del diámetro, mientras que en el plano es cero. Y es que las curvaturas principales no se conservan, aunque sí su producto.

[11] S.-S. CHERN: "From triangles to manifolds", *Am. Math. Monthly,* **86** (1979), 339-349.

[12] Hay una traducción española de E. Vidal Abascal publicada simultáneamente en *Rev. Mat. Hisp.-Amer,* **18** (1958) y en *Monogr. Matm.*, II, Publ. Inst. "Jorge Juan", Madrid (1958),

91-106.También el libro [8] de Spivac contiene la traducción inglesa así como el desarrollo analítico del texto bajo el título: "¿Qué decía Riemann?".

[13] J.J. ETAYO: *Pequeña historia de las conexiones geométricas,* Real Acad. Ciencias, Madrid (1983).