De la Geometría Numerativa a la Geometría Algebraica

POR JOSE M. AROCA HERNÁNDEZ-ROS *

A D. Pedro Abellanas, que hace más de veinte años me convenció de que debía estudiar geometría numerativa.

¿N'est-il pas, pour le moins, aussi nécessaire d'enseigner les ressources employés, à diverses époques, par les hommes de génie, pour parvenir à la vérité, que les efforts pénibles qu'ils ont été ensuite obligés de faire pour les démontrer selon le goût des esprits ou timides ou peu capables de se mettre à leur portée?

¿Enfin, quel mal pourrait-il en résulter, surtout si l'on se montrait sévère à conclure, si l'on ne se payait jamais de demi-aperçus, si l'on n'admittait jamais l'analogie et l'induction, qui sont souvent trompeuses?

(E. Poncelet, Traité des proprietés projectives des figures. Paris 1822)

Algebraic geometry was created by Max Noether. The Italian school, headed by Corrado Segre, Castelnuovo, Enriques and Severi, erected an admirable structure but his logical foundation was shaky. The notions were not well-defined, the proofs were insufficient. And yet, as Bernard Shaw puts it: "There is an Olympian ring in it. It must be true, for it is fine art"

(B.L. van der Waerden, Arch. Hist, Exact Sci. 7,3 (1971))

It is a tribute to Hilbert's vision that he coulld forese that the rigorous development of Intersection Theory and Enumerative Geometry would be one of the great mathematical endeavors of the twentieth century ... Tremendous progress has been made over the last decade, and now for the first time in over a century, a full understanding and rigorous treatment of all the matherial in Schubert's book appears close.

(S.L. Kleiman, Intersection Theory and Enumerative Geometry. Proc. Symp. in Math. Vol 46 part 2, 1987).

* Catedrático de la Universidad de Valladolid.

1.- Introducción

Los tres párrafos que preceden estas líneas, son sumamente significativos sobre el espíritu con que los geómetras del siglo XIX hacían la Geometría, sobre la consideración que merecían de sus coetáneos (las líneas de Poncelet muestran una clara tendencia a la autojustificación), sobre la forma en que esta consideración empieza a cambiar en los matemáticos del segundo tercio de nuestro siglo, y sobre la forma en que los geómetras de hoy, después de un siglo de desarrollos técnicos impresionantes, pueden escribir y entender los resultados de la Geometría Numerativa de modo riguroso (no corregirlos).

La situación de la Geometría en los principios del XIX queda reflejada en las palabras de Young[1].

"Durante los dos últimos siglos (se está refiriendo a los siglos XVII y XVIII) el rigor había estado totalmente ausente del Análisis, pero era en la Geometría en la que nadie confiaba. Descartes eliminó la Geometría reduciéndola a Análisis. Lagrange estaba orgulloso del hecho de que en su Mecánica no había ni una sola figura. Monge había introducido su geometría diferencial de superficies, y antes había Geometría Diferencial de curvas planas. Todas estas cosas eran respetables porque usaban Análisis".

Corrado Segre[2] en unas palabras dirigidas en 1891 a los estudiantes de Matemáticas, se refiere en numerosas ocasiones a los tiempos heroicos de la geometría en los cuales no se trataba solamente de descubrir nuevos resultados, sino de combatir para demostrar la utilidad y la validez de los métodos geométricos a los analistas que no querían reconocerlas (sic.), y, volviendo a la autojustificación,defiende que, cuando se trata de descubrir una verdad, la pureza del método empleado debe pasar a segunda línea y que, aunque en Matemáticas es muy grave, se debe incluso sacrificar el rigor, con la seguridad de que en un futuro inmediato el desarrollo de la Ciencia llevará a probar de modo plenamente satisfactorio los resultados. Lo que es cierto y notable es que en un momento en que el Análisis se asentaba en bases firmes, esta Geometría, que buscaba la respetabilidad, de Poncelet, Chasles y en menor medida de la escuela alemana era totalmente deficiente en rigor, y extremadamente imprecisa en sus enunciados, era, en resumen, la antítesis del Análisis tal como lo concebían Cauchy o Gauss. Según la mayoría de los coetáneos no geómetras de Poncelet, y de muchos de los matemáticos posteriores, su "intuición geométrica" era poco más que un juego, sin embargo este juego era como se puede ver hoy en día, a la hora de juzgar la validez de sus resultados, de una precisión increible.

Como vías de introducción a la Geometría Algebraica en el siglo XIX se pueden elegir tres líneas principales, la teoría de intersección, que empezando en el "Teorema de Bezout", lleva, en un paseo a lo largo de todo el siglo por el monumento de ingenio que fue la Geometría Numerativa, hasta la Topología Algebraica de nuestro siglo. El estudio de las integrales abelianas que se centra en las "vidas antiparalelas" y las obras ingentes de Riemann y Weierstrass (ingente en significado que no en volumen la del primero), y, la línea puramente algebraica de la teoría de ideales que se inicia en la célebre memoria de 1882 de Dedekind-Weber, llega a su culminación con la obra de Lasker, y, se complementa con la teoría de eliminación de Kronecker y Mertens, para ser el germen de la Geometría Algebraica de Emmy Noether, Van der Waerden y O. Zariski. Tal como se indica en el título de esta nota hemos elegido la primera porque se extiende a lo largo de todo el siglo, y porque las otras dos por su interés evidente para la teoría de funciones y la aritmética pueden ser objeto de otras notas dentro de este mismo ciclo.

No sabemos quien fue el primero en observar que dos curvas algebraicas planas de ordenes p y q (la definición de curva algebraica se debe a Descartes (1637) y para Newton (1676) el orden de una curva plana era el grado de su ecuación), se cortan en $p.q$ puntos. Una referencia fiable es la de Enriques[3] que atribuye esta observación a Maclaurin en su "Geometría Orgánica" de 1920, obra en la cual prueba este resultado en diversos ejemplos. La verdadera demostración, comienza con la teoría de eliminación de Euler (1746) y tras una prueba incompleta de Cramer (1750), Bezout (1764) da la primera demostración algebraica completa del hecho de que un sistema de n ecuaciones algebraicas con n incógnitas tiene un número de soluciones igual al producto de los grados de las ecuaciones, aunque al interpretar geométricamente los resultados en el caso $n = 2$ especifica que el número de puntos de intersección de dos curvas algebraicas planas de ordenes m y n es a lo sumo $m.n$. Después y a lo largo del siglo XIX se dan numerosas demostraciones de este resultado, que conocido, como hoy, con el nombre de Teorema de Bezout, se vuelve piedra de toque de cuantos "principios geométricos" aparecen durante el siglo.

2.- Elementos imaginarios

Desde el punto de vista geométrico, el Teorema de Bezout admite discusión por la posibilidad de aparición de: soluciones múltiples, soluciones asintóticas o en el infinito y soluciones no reales. Cada una de estas líneas de discusión abre interesantes perspectivas; la primera da lugar al concepto de multiplicidad de intersección, la segunda a la noción de infinito proyectivo y la tercera a la introducción de la noción de punto imaginario; de la segunda ha hablado suficientemente J. Etayo[4], y no la tocaremos aquí, ya que no corresponde al campo de la Geometría Algebraica.

La utilización de elementos imaginarios en geometría, lleva implícita la aceptación de un cierto principio de continuidad. Si analizamos por ejemplo la intersección de una recta con una circunferencia, al desplazar la recta paralelamente a si misma, aparecen inicialmente dos puntos reales que se transforman en uno y luego desaparecen; este hecho está reñido con una idea básica de continuidad, que requeriría que el número de puntos fuese siempre dos. El punto único no presenta problema, ya que basta suponer que es un punto doble, pero la desaparición del punto supone una falta de simetría. Es precisamente Poncelet (1822) quien suprime esta falta de simetría al describir la intersección por medio de la involución que la cónica induce en la recta, así los puntos de intersección son los puntos dobles de esa involución (obsérvese que los puntos dobles de la involución de la recta, definida por la ecuación $(x - a) . (x' - a) + b^2 = 0$ son precisamente $(a + bi, a - bi)$. Posteriormente Staudt (1856), siguiendo una idea de Möbius, usa el hecho de que cada par de puntos imaginarios conjugados están contenidos en una única recta real, para definirlos mediante: su punto medio (real), las dos direcciones que se pueden tomar sobre la recta que los soporta y sus "distancias al baricentro" iguales a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las partes imaginarias. Esta idea de los elementos reales auxiliares no era completamente nueva, Maclaurin por ejemplo interpretó el producto de distancias de un punto real a dos imaginarios conjugados como la distancia a otro punto real auxiliar.

Desde otro punto de vista, ya desde finales del XVIII los números complejos se interpretaban como "números vectores" (especialmente por Wessel (1797) y Argand (1806)), aunque no tuvieron plena aceptación hasta Gauss (1831) y Cauchy (1847) y no se consagraron en Geometría hasta la utilización sistemática de coordenadas en la obra de Plücker también mencionada por J. Etayo (loc. cit). Sin embargo persistieron hasta final de siglo artículos que continuaban con el tratamiento geométrico de los elementos imaginarios, una buena referencia es el de 1871 de Stolz[5], que justifica la importancia de los elementos geométricos imaginarios, prefiriéndolos a las coordenadas complejas por su carácter intrínseco y su independencia del sistema de referencia (lo cual no le supone sin embargo obstáculo para trabajar con puntos de coordenadas reales). En este artículo se analizan todas las definiciones anteriores y se prueba su equivalencia. Así si consideramos un haz de circunferencias generado por dos que no tienen puntos reales en común (Plücker), este haz tiene un eje radical, los dos puntos imaginarios en que todas las circunferencias del haz cortan a esa recta real son los de Staudt, y todas las circunferencias inducen en el eje radical una involución común cuyos puntos dobles son los imaginarios de Poncelet.

Volviendo a nuestro enfoque geométrico, el método de la escuela de Monge, consistente esencialmente en asignar a una figura, algunos de cuyos elementos son imaginarios, las propiedades que tiene cuando esos elementos son reales, da lugar inicialmente a la teoría de "correlativos" de Carnot (1801), consistente en considerar juntamente con cada figura las que le son correlativas, esto es, "aquellas que resultan de variar continuamente sus partes sin violar las leyes de recíproca dependencia entre ellas y su estabilidad" (Enriques loc.cit.), así, cuando una propiedad carece de significado en una figura se pasa a una correlativa. Este es el germen del principio de continuidad general de Poncelet, del que hablaremos más adelante, y que en este caso particular de los elementos imaginarios queda perfectamente recogido por Chasles; éste, en la nota XXVI de su "Aperçu"[6], dice:

"No se puede considerar la condición de imaginario mas que como indicando solamente un estado de una figura en el cual, ciertas partes, que serían visibles en otro estado, dejan de existir, de suerte que la idea de imaginario no tendría sentido si no fuera acompañada de la idea actual de una existencia real del objeto a que se aplica".

De este modo al ser la condición de imaginario descripción de un estado, no tiene sentido la célebre y repetida crítica de Klein a la afirmación de Poncelet de que las cúbicas planas no singulares tienen tres puntos de inflexión. Desde nuestro concepto de punto imaginario esta afirmación es falsa. En efecto, se puede demostrar fácilmente que la cúbica tiene nueve inflexiones y que toda recta que pasa por dos puntos de inflexión de una tal cúbica pasa por un tercero. Entonces, como no puede haber cuatro en la misma recta, y, si seleccionamos uno de ellos los ocho restantes deben estar alineados con él por parejas, tenemos una configuración de 9 puntos y 12 rectas de modo que cada recta contiene tres puntos y por cada punto pasan cuatro rectas. Bien razonando directamente, bien comprobando que esta configuración contiene a la 8_3 (Hilbert-Cohn-Vossen[7]), se comprueba que seis de los puntos tienen siempre coordenadas imaginarias. Por esta razón Poncelet encontraba solo tres, pero eso no supone error, sino que de acuerdo con su noción de punto imaginario sólo hay tres. De modo que aunque esa idea de "estado imaginario" presenta a veces serias dificultades de manejo e induce a errores de cálculos, al menos en este caso no presenta contradicción alguna.

3.- Multiplicidad

Pasando al concepto de multiplicidad, las primeras definiciones fueron de naturaleza dinámica, fundadas en el mismo principio que permitía el manejo de los elementos imaginarios; con notación actual, para calcular la multiplicidad de intersección de n hipersuperficies $\{H_i\}$ que se corten en un punto P, si la intersección es transversal, es el producto de las multiplicidades; si no, se buscan familias de superficies $H_i(t)$ tales que $H_i(0) = H_i$, entonces si los puntos de intersección de las $H_i(t)$ que tienden a P cuando t tiende a 0 son $\{P_j(t)\}$ y las hipersuperficies se cortan en ellos transversalmente, la multiplicidad de intersección en P es la suma de las multiplicidades de intersección en los puntos $P_j(t)$. Llegar a un enunciado tan preciso no fue ni mucho menos cuestión trivial, el elemento fundamental del mismo es la posibilidad de mover continuamente las hipersuperficies para alcanzar la transversalidad de la intersección.

La idea de continuidad en los elementos geométricos es antigua . Chasles (loc.cit Nota XXIV) la adjudica a Leibniz del que asegura que la propone como "expresión clara del principio de la naturaleza de que todo se hace por grados insensibles, o más propiamente, "natura abhorret a saltu". El primer enunciado del "Principio de continuidad" aparece en el "Traité des propriétés projectives" publicado por Poncelet en 1822 (aunque según referencia de Zeuthen-Pieri[8] estaba en preparación desde 1812). Poncelet insiste desde la introducción en lo que el describe como "principio filosófico que consiste en que ciertas propiedades geométricas no se alteran por cambios sucesivos de las figuras, siempre que éstas no dejen de satisfacer una misma definición general, entonces reconociendo las propiedades en casos límites, estas propiedades pueden llevarse a la situación general".

Poncelet utiliza su principio para resolver el problema de Braikenridge. "Si los tres lados de un triángulo ABC giran alrededor de tres puntos fijos E,F,G mientras que los vértices A y B se deslizan por dos curvas dadas, a,b de grados m y n, el tercer vértice describe una curva de grado $2m.n$" (Generaliza un problema de Newton en el cual a y b son rectas y era perfectamente conocido que en este caso el lugar es una cónica), Braikenridge había probado, contando simplemente de cuantas maneras C puede alcanzar E o F, que los puntos E y F necesariamente están en la curva con multiplicidad $m.n.$ Poncelet resuelve el problema calculando el grado de la curva solución por intersección con una recta general. Por continuidad reduce el problema al caso en que la recta pasa por E, así $m.n$ de los puntos de corte se confunden en E y aparecen otros $m.n$ distintos de E lo cual prueba el resultado.

Por el mismo método, prueba que dos cónicas se cortan en cuatro puntos y luego el teorema de Bezout por paso al caso especial de tomar una familia de m rectas como curva de grado m.

La primera definición geométrica de multiplicidad no derivada del principio de continuidad es de naturaleza estática y derivada de un proceso completamente distinto, y puede encontrarse en Halphen[9], que en orden a contar propiamente el número de puntos de intersección de dos curvas planas, enuncia el siguiente principio:

"El número de puntos de intersección de dos curvas planas que se confunden en un punto A , es igual a la suma de los ordenes infinitesimales de todos los segmentos con extremos sobre las dos curvas y situados sobre una recta cuya distancia a A sea infinitamente pequeña de primer orden".

Así se tienen en cuenta no sólo las ramas de ambas curvas que confluyen en A, sino también el orden de contacto (suma de los ordenes infinitesimales) de cada par de estas ramas. Este principio contiene la idea que posteriormente desarrolla M. Noether en su teoría de puntos infinitamente próximos, ya que en la práctica la medida del orden infinitesimal se lleva a cabo por sustitución de las curvas por su parábolas osculatrices de cada orden, así para ramas de curvas, si las parábolas osculatrices de orden r (desarrollos en serie de la ecuación) coinciden y no lo hacen las de orden $r+1$, el orden infinitesimal del segmento que une un punto de cara rama, y por tanto el contacto, es $r+1$. Del mismo modo se analizan todas las posibles singularidades de las dos curvas y se deja perfectamente preparado el camino de Noether.

4.- Clase y género

El concepto cartesiano (1637) de tangente a una curva algebraica, recta que tiene un punto doble en común con la curva, admite dos interpretaciones, la una debida a Barrow (1669), es la de considerar la tangente como límite de secantes cuando dos de los puntos de intersección confluyen en uno, la segunda, independiente completamente del cálculo infinitesimal y restringida solo a curvas algebraicas, es del abate G.P. De Gua ("Usage de l'Analyse de Descartes pour découvrir, sans le sécours du calcul différentiel, les propriétes des lignes géométriques de tous les ordres" París 1740). De Gua, hablando en términos actuales, toma la ecuación homogénea de la curva e impone que una recta genérica tenga una intersección doble con ella en un punto dado. Entonces el polinomio que resulta de eliminar una variable entre la ecuación de la curva y la de la recta, debe tener una raíz doble, que será raíz de la derivada, de aquí que los coeficientes de la ecuación de la recta han de ser proporcionales a las derivadas parciales, en el punto, de la ecuación de la curva. Así concluye que todas las rectas por un punto múltiple son tangentes (impropias) y que por cada punto simple pasa una tangente propia.

No entraremos aquí en la polémica Poncelet-Gergonne sobre la paternidad del principio de dualidad, ya referida por J. Etayo (loc.cit.) pero sí queremos resaltar que Gergonne en su publicación sistemática de pares de teoremas duales en sus *Anales,* influido seguramente por lo que sucede con las cónicas, atribuye a la curva de tangentes a una curva dada el mismo grado de esta, es decir, supone que el número de tangentes a una curva por un punto (clase de la curva) y que es el número de puntos de intersección de la dual de la curva con el haz de rectas dual de una recta general, es igual al grado de la curva. En efecto, es evidente que para una cónica regular el número de tangentes por un punto general es de dos, así, el principio de dualidad parece ser extensible a relacionar el grado de una curva general con el número de sus tangentes que pasan por un punto dado del plano. Sin embargo, ya era conocido desde 1756 (en un "Traité des Courbes Algébriques" anónimo, según cita de Berzolari[10]) que la clase de la curva dual de una curva general de grado n es $n.(n\text{-}1)$, pese a ello en 1827, nueve años después del artículo definitivo de Poncelet, Gergonne sigue manteniendo todavía la existencia de esa igualdad, la razón es la conocida "Paradoja de Poncelet":

Dada una curva plana general de grado n, si su clase es $n.(n\text{-}1)$, entonces por un punto del plano pasan $m = n.(n\text{-}1)$ rectas tangentes a ella. De aquí, por el principio de dualidad una curva de clase m debe ser cortada en $n = m.(m\text{-}1)$ puntos por una recta genérica, luego su grado debe ser n, se presenta así una paradoja ya que la curva sería de orden mayor que su clase y de clase mayor que su orden. Poncelet[11] explica la paradoja en base a la "generalidad". La curva dual de la curva general de grado m no es general como curva de grado $m.(m\text{-}1)$ debido a que aparecen en ella singularidades correspondientes a multitangentes es decir rectas con más de un punto de tangencia o tangentes en una inflexión, entonces al construir la doble dual aparecen componentes excedentarias producidas por rectas que pasan por un punto doble o múltiple de la dual. Es decir la paradoja se explica por el hecho de que las curvas duales de curvas planas generales de orden o clase mayor que dos presentan necesariamente singularidades.

La demostración de Poncelet de la relación entre grado y clase es una perfecta aplicación del principio de continuidad y encaja plenamente en su filosofía, consistente según Zeuthen (loc.cit.) en "Aplicar su principio solamente en los casos en que la representación analítica, sin ningún cálculo, basta para obtener una demostración perfecta".

Así, para encontrar la clase de una curva general de orden m, la corta por un haz de rectas paralelas, sobre este haz, y a partir de las intersecciones con una transversal fija l, lleva a ambos lados de la transversal las $m.(m\text{-}1)/2$ cuerdas interceptadas por la curva sobre cada recta del haz. De este modo tiene una serie de segmentos con origen en l, cuyos extremos describen una curva cortada en $m.(m\text{-}1)$ puntos por cada recta del haz, la curva es entonces de grado $m(m\text{-}1)$ y por tanto debe ser cortada por l en este número de puntos. Claramente las rectas del haz que pasan por esos puntos son las tangentes buscadas.

Poncelet observa entonces que para una curva singular (siempre como en todo lo que sigue, las curvas se considerarán irreducibles y sin componentes múltiples) de grado n la clase será $m < n.(n\text{-}1)$ y cada punto doble ordinario supone una disminución de dos unidades en la clase y cada cúspide ordinaria de tres, por ejemplo observa que la cubica general es de clase 6, la nodal de clase 4 y la cuspidal de clase 3. Poncelet comete sin embargo el error (1822) de generalizar linealmente el resultado afirmando que un punto múltiple de orden r hace descender la clase r unidades.

Estos resultados son la base de los de Plücker que introduce sus célebres fórmulas, bajo la hipótesis de la existencia en la curva de cuatro tipos de singularidades generales (las llamadas posteriormente singularidades plückerianas):

- Puntos dobles ordinarios (esto es, con dos tangentes distintas).
- Tangentes dobles ordinarias (esto es, con dos puntos de tangencia distintos).
- Puntos de retroceso de primera especie.
- Tangentes estacionarias de primera especie.

Con solo este tipo de singularidades, y teniendo en cuenta los cálculos de Poncelet, se obtiene la primera fórmula de Plücker:

Si C es una curva de grado n y clase m y tiene t puntos dobles ordinarios y r puntos de retroceso de primera especie:

$m = n.(n-1) - 2.t - 3.r$

La segunda fórmula es la dual de la primera y la tercera expresa que:

$[n.(n-1)/2] - (t+r) \geq 0$

Esta diferencia fue denominada por los matemáticos ingleses desde Maclaurin, deficiencia, ya que este había probado que el número máximo de nodos de una curva de grado n es al menos $n.(n\text{-}1)/2$, entonces parece lógico dar este nombre a la diferencia entre el número máximo posible de nodos y el número real de ellos. Posteriormente Clebsch (1865) le llamó género de la curva, y Riemann fue quien comprendió su significado topológico (los matemáticos ingleses le siguieron llamando deficiencia hasta muchos años después).

Las fórmulas de Plücker sufrieron numerosas generalizaciones, unas respecto al tipo de singularidades de la curva plana y otras a curvas alabeadas o superficies. El propio Plücker corrigió el error ya citado de Poncelet y estableció en $r.(r-1)$ la disminución de clase producida por una singularidad nodal ordinaria de orden r. Cayley en 1866 introduce la idea "colorista" (v. Kleiman[12]) de hacer una singularidad arbitraria "equivalente" a una familia de nodos y cúspides ordinarias, en un esfuerzo de aplicar las fórmulas a cualquier curva singular. Esta generalización fue obtenida en la década de los 70 por G.H. Halphen, H.J.S. Smith y M. Noether.

Halphen (loc.cit) extiende las fórmulas de Plücker a curvas planas con singularidades arbitrarias dando una regla correcta de cómputo de la disminución de clase basada en el mismo principio analítico que la del cómputo de la multiplicidad de intersección.

"Si para cada recta a trazada desde un punto dado P exterior a la curva y que la corta en puntos confundidos, se calcula la suma de los órdenes de todas las cuerdas infinitamente pequeñas determinadas por la curva sobre otra recta trazada desde el mismo punto e inclinada un ángulo infinitamente pequeño de primer orden respecto de a, el doble de esta suma hará conocer el número de veces que la recta a debe ser contada entre las $m(m\text{-}1)$ tangentes trazadas desde P a la curva."

Cayley en 1845 extiende la fórmula a curvas alabeadas (en un espacio de dimensión 3) y a superficies desarrollables. Posteriormente (1882) Veronese las extiende a curvas en espacios de dimensión n y siguiendo una línea completamente distinta Brill (v. Brill-Noether[13]) descubre la posibilidad de obtener toda curva racional como límite de curvas con singularidades plückerianas.

Merece mención aparte el trabajo de Salmon (1847) sobre superficies (puede encontrarse detalladamente explicado en Fulton[14]). En términos geométricos el grado de la superficie dual de una superficie S es el número de planos tangentes a S por una recta genérica del espacio. Es fácil comprobar que para la superficie general de grado n, este número es $n.(n-1)^2$, para verlo basta observar que este número es precisamente la multiplicidad de intersección de S (de grado n) con las polares de dos puntos de la recta (de grado $n\text{-}1$). También, como en el caso de curvas, los puntos nodales ordinarios disminuyen este número en dos, pero aquí puede presentarse un fenómeno especial, si la superficie S tiene una curva singular C puede aparecer un exceso de intersección al calcular la multiplicidad de intersección de S y sus polares. Para estudiar este fenómeno Salmon considera tres superficies de grados m, n y p que se cortan de modo que su intersección contiene a una recta C, y para calcular la multiplicidad de intersección hace uso del principio de continuidad, pasando al caso en que la primera superficie degenera en un plano que contiene a C y una superficie general de grado m-1, esta superficie corta a las otras dos en (m-1).$n.p$. puntos, m-1 de los cuales están en C, las otras dos superficies cortan al plano en curvas de grados n-1 y p-1 (puesto que contienen a C) y estas curvas planas se cortan en (n-1).(p-1) puntos; entonces el número total de puntos de intersección fuera de C es:

$$(m-1).n.p - (m-1)+ (n-1).(p-1)=m.n.p - (m+n+p-2)$$

Por los mismos métodos estudia diversas posibles curvas C evaluando la disminución de multiplicidad que produce, así, si C es una recta doble calcula que esta disminución debe ser $m+2n+2p-4$, lo cual tiene como consecuencia que si S es una superficie con una recta doble C, la disminución de clase producida por esta recta debe ser $5n$ - 8, sin embargo, Salmon se da cuenta de que la disminución es aún mayor debido a la aparición de puntos de pinzamiento (es decir puntos en los cuales los dos planos tangentes a S a lo largo de C coinciden; un buen estudio de este tipo de puntos se puede encontrar en M. Abellanas[15]). Así una cubica con una recta doble (p. ej. $y^2-z\ .\ x^2-x^3=0$) en lugar de clase 12 como la cúbica general o de clase 5 que debería tener si la línea doble disminuyese la clase en 5.3-8 unidades, tiene clase 3.

Así los métodos analíticos de Halphen y los sintéticos de Salmon producen avances sólidos y notables. Como Zeuthen observa:

"Estas fórmulas se obtienen tanto por el análisis como por los métodos de la geometría numerativa sin embargo son siempre dominio de ésta, y podrán ser utilizadas a su vez para deducir otros resultados de la misma naturaleza".

De entre estos resultados y como aplicación directa, debemos mencionar la teoría de curvas adjuntas; la adjunta de una curva de grado n es otra de grado n-3 que pase por todos sus nodos. Esta teoría tiene su origen en la determinación explícita por Riemann de las integrales de primera especie, generalizada por Clebsch, Gordan, Brill y Noether y a mediados de nuestro siglo por F. Gaeta, a mayores dimensiones y codimensiones y vuelve a ser de nuevo hoy objeto de investigación activa.

5.- De la continuidad a la conservación del número

Hemos señalado ya cómo Chasles atribuye a Leibniz el principio de continuidad; otros exégetas del principio como Enriques van más allá y se remontan a Euclides o Apollonio. Su enunciado formal se debe a Poncelet que dice de él que es un:

"Principe de permanence ou continuité indéfinie des lois mathématiques des grandeurs variables par succession insensible".

Y que es imposible probarlo o reducirlo a otras verdades más evidentes, dado que es:

"une de ces vérités premières qu'il est impossible de ramener à des idées plus simples, parce-qu'elles ont leur source et leur certitude immediates dans notre manière de voir autant que dans les faits, dans la nature des choses".

En su opinión este principio es una cuestión puramente geométrica, por ello tampoco se pregunta por sus límites de validez, y lo aplica incluyendo casos de degeneración como casos límites, seleccionando estos casos aparentemente sin más criterios que la belleza e inmediatez del resultado y que la aplicación del principio proporcione un número ya conocido. Ello lleva a escribir a Cauchy (en un informe sobre una memoria sometida a la Academia por Poncelet en la sesión de 5 de Junio de 1820) que:

"Este principio no es, hablando propiamente, mas que una inducción fuerte, con cuya ayuda se extienden resultados obtenidos bajo ciertas restricciones, a los casos en que dichas restricciones no existen. Aplicado a las curvas de segundo grado, ha conducido a su autor a resultados exactos. Sin embargo pensamos que no será admitido en toda su generalidad y que no debe ser aplicado indiscriminadamente a toda suerte de problemas en Geometría o Análisis, pues un exceso de confianza puede conducir a veces a errores manifiestos. Así, se sabe, que en la determinación de integrales definidas y por consiguiente, en la evaluación de longitudes, areas y volúmenes, se encuentran en gran número de fórmulas que no son válidas mas que si los valores de las magnitudes que en ellas intervienen se encuentran contenidos dentro de ciertos límites".

Realmente y atendiendo a las formas en que se puede utilizar, el principio no es único y contiene al menos, según hace observar Enriques, cuatro métodos diferentes:

a) Principio de paso al límite:

Toda relación algebraica entre los elementos de una figura dependiente de un sistema de parámetros, se mantiene por paso al límite en estos.

b) Principio de extensión:

Si una relación algebraica entre elementos de una figura dependiente de un parámetro se verifica para valores de este que satisfacen una cierta desigualdad, se verifica para todos los valores del parámetro. (Al igual que el primer principio es válido sin restricciones, en este segundo hay que entrar en discusión según la estructura del espacio en que se mueve el parámetro).

c) Legitimidad del cálculo con elementos imaginarios.

Ya hemos hablado de esta parte anteriormente.

d) Principio de inducción del caso límite al caso general.

Esta es la parte más atacada por los detractores del principio, puesto que las propiedades se mantienen por paso al límite, argumenta Poncelet, si se comprueban en este caso son ciertas en general. Aquí también pueden presentarse problemas, por la posibilidad de que un caso límite lo sea de más de un caso general, como más tarde, a principios de nuestro siglo, puntualizaría Kohn.

Zeuthen [16] observa que las condiciones bajo las cuales son verdaderamente válidas las demostraciones basadas en el principio de conservación son las siguientes:

1.- El caso especial que se utiliza debe estar verdaderamente entre los casos límite del caso general propuesto.

2.- Las soluciones que se enumeran en el caso especial deben ser efectivamente límites de aquellas cuyo número se busca en el caso general.

3.- Cada una de las soluciones límite debe ser contada tantas veces cuantas aparecen las soluciones a que reemplaza.

Un ejemplo de la utilización de la primera condición, en una forma del teorema de Bezout, dado por Salmon [17] es el siguiente:

Para establecer de modo general que una curva de orden *m* y una superficie de orden *n* se cortan en *m.n* puntos es legítimo reemplazar la superficie por un sistema de *n* planos, mientras que no está permitido cambiar la curva por un sistema de *m* rectas. Al respecto es interesante citar que la Academia Real de Ciencias de Dinamarca puso a concurso en 1902 la cuestión de averiguar si para cada clase de curvas alabeadas existe o no una forma límite compuesta exclusivamente por rectas (el concurso quedó sin resultado). La dificultad básica está en el concepto de curva general alabeada, ya que se sabía que el orden no es un invariante suficiente, puesto que mientras que las propiedades de una hipersuperficie se encuentran siempre en la hipersuperficie "general" de su mismo grado, esto no sucede en las variedades de codimensión superior a 1, por ejemplo (Zeuthen-Pieri loc. cit.) las curvas alabeadas de orden *m* tienen propiedades que dependen sólo de *m*, pero respecto a otras "se dividen en varias clases que no pueden ser caracterizadas mediante el orden *m*, el número de puntos dobles ni aparentemente por una causasen finita de números" (E. Weyr). Este autor muestra dos curvas de grado 9 con 18 puntos dobles, con propiedades geométricas muy distintas.

Las críticas de Cauchy, junto con las de Gergonne, que atribuye al principio un posible papel en los descubrimientos matemáticos perc declara su nulo interés para las demostraciones, aleja inicialmente a muchos posibles seguidores del uso del principio. El mismo Salmon lo utiliza siempre con reservas. Steiner por un método que no detalla dice haber calculado que hay $6^5 = 7766$ cónicas tangentes a 5 cónicas dadas (el método es bastante simple, el espacio de cónicas tiene dimensión 5, la condición de tangencia a una cónica es una hipersuperficie de grado 6, si las cinco hipersuperficies se suponen en posición general, el teorema de Bezout da el resultado. Resulta sorprendente que Steiner incurriese en este error cuando la condición de tangencia a una recta es de grado 2 y el mismo razonamiento llevaría a la existencia de 32 cónicas tangentes a cinco rectas en posición general, en lugar de la única cónica que existe con esta propiedad). Entonces para justificar la posibilidad de que este número tan elevado sea verdadero, pasa a estudiar (en aplicación del principio de continuidad) el caso en que las cinco cónicas degeneran en pares de rectas o en rectas dobles y contando las soluciones (con los ajustes necesarios) se convence de que el número debe ser bastante menor. Lo que sucede es que la superficie de Veronese de rectas dobles está contenida en todas las hipersuperficies, produciéndose un fenómeno de exceso de intersección como el señalado anteriormente para la intersección de tres superficies con una curva común, el exceso de intersección es 4512 y el número correcto es entonces 3264. Usando exactamente este método H. Berner (1865) obtiene el número correcto, que también había sido obtenido por Chasles por otros métodos (1864).

Sin embargo (v. Zeuthen-Pieri loc. cit.) desde 1859 J.Ph.E. de Fauque de Jonquières, no solo conocía estos resultados sino fórmulas aún más generales, y por una parte la diferencia entre sus resultados y los de Steiner y por otra la desconfianza de M. Chasles, que rechazaba la aplicación del principio, le habían impedido publicarlos.

A partir de 1860 la utilización del principio comienza a extenderse. Cremona (1861) lo usa para redemostrar el teorema de Bezout y para calcular números de puntos necesarios para la determinación de una curva, eligiendo posiciones particulares de estos. Sobre todo es J.Ph.E. de Fauque de Jonquières el primero en usar sistemáticamente el principio. Es también el primero que lo dota de unas bases sólidas al percibir su evidente relación con el teorema fundamental del algebra. Así mismo se da cuenta también de algunas de sus limitaciones, por ejemplo, para estudiar curvas con contactos múltiples con una curva dada, se limita al caso de que ésta sea racional, pero reconoce que descomponer la curva en rectas da lugar a números calculados no como consecuencia de una correcta aplicación de un proceso de límite, sino mas bien resultado de una inducción "intuitiva". También trabaja en superficies y determina su clase y otros caracteres.

A finales de la década de los setenta, las aplicaciones del principio de continuidad se hacen más frecuentes y variadas gracias principalmente a Schubert y en parte como observa Zeuthen, debido a un cambio de denominación que aleja los prejuicios que su uso despertó durante mucho tiempo. En 1874 Schubert propone primero el nombre de "Principio de la posición particular", "Princip der speziellen Lage", y como esta denominación parece reflejar sólo cambio de posición y no la posibilidad de degeneraciones, se decide posteriormente por "Princip der Erhaltung des Anzahl" (1876). Así, se suprimen connotaciones incómodas de la continuidad como es su relación con la degeneración, tan alejada de la idea de continuidad de los analistas, y por otra parte tiene trascendencia la palabra número que, en principio, parece reducir los problemas a los que tienen sólo un conjunto finito de soluciones.

El enunciado exacto de Schubert[18] es el siguiente:

"Un número, a menos que tome el valor infinito, debe conservar el mismo valor cualesquiera que sean las posiciones particulares que se dé a las figuras; sea que se modifiquen sus posiciones absolutas en el espacio, sea que se modifiquen sus posiciones relativas, sea que en lugar de figuras inicialmente generales y verificando ciertas condiciones se introduzcan otras tan particulares como se quiera verificando las mismas condiciones".

A veces se puede suponer que un número depende sólo de otros números y usar el principio de conservación para derivar una ecuación funcional que permite el cálculo del número deseado. Por ejemplo, para determinar el orden de la superficie de las trisecantes de una curva alabeada de orden m, Cayley descompone la curva en dos de órdenes p y q y encuentra la fórmula

$$G(p,q)_3 = G(q)_3 + G(p)_3 + G(p,q_2) + G(p_2,q)$$

Entonces le basta calcular los dos últimos sumandos correspondientes a las bisecantes a cada curva que cortan a la otra y haciendo la hipótesis de que el orden de la superficie buscada depende sólo del orden de la curva y del número de puntos dobles para obtener una fórmula dependiente de dos constantes que se calculan fácilmente en un caso particular.

Esta variante funcional se usa con cierta asiduidad por el mismo Cayley, por Castelnuovo, Tanturri, Crepas, etc. hasta, ya a principios de nuestro siglo por Severi, este, recogiendo ideas anteriores de Brill y Giambelli, enuncia el principio de modo impecable.

"Supongamos que una condición impuesta a un conjunto Z de figuras se traduce en una correspondencia entre el conjunto Z y ciertas otras figuras T; para que el principio de conservación y el cálculo simbólico asociado puedan aplicarse al problema, es necesario que la correspondencia sea irreducible o que descomponga en un número finito de correspondencias irreducibles tales que, los elementos de Z que correspondan a un elemento genérico de T, se distribuyan en variedades de la misma dimensión y las variedades de T homólogas a la variedad Z en la correspondencia tengan también la misma dimensión". (la visión de Severi se encuentra resumida en su Geometría Numerativa[19]; en lenguaje de hoy es un planteamiento de platitud de los morfismos que componen la correspondencia).

E. Study y G. Kohn (1903, 1904) discuten la base misma del principio reprochando a Schubert la ausencia de algunas limitaciones en su enunciado, criticando además la falta de precisión de algunas de sus aplicaciones y poniendo en duda los resultados obtenidos por la aplicación del mismo. Hilbert[20] en su problema 15 (v. Kleiman[21]), incluye la demanda de fundamentos más rigurosos para el principio de conservación del número. Junto con la formulación algebraica del problema y a juicio de Kohn, Schubert debería incluir además la condición de que las figuras de las cuales se consideran los casos límites, formen de alguna manera un cerrado en el sentido de la naciente topología de Cantor.

También Zeuthen hace notar que ninguna formulación del principio puede ser precisa si no incluye un método de asignación de multiplicidades a las soluciones que se obtienen en los casos particulares como descomposición de una solución en el caso general, la cuestión de Study y Kohn acerca de las soluciones no aceptables se resuelve entonces fácilmente, son las que tienen asignada multiplicidad cero.

Por otra parte y puesto que ya Poncelet considera los casos especiales no como casos aislados, sino como casos límite, hace observar de Jonquières que la primera objeción de Kohn no tiene sentido porque de hecho el principio se aplica siempre sobre cerrados. Las objeciones se basan curiosamente en un problema de "doble moral" en los cómputos. Por ejemplo:

¿Al contar las secantes a una curva alabeada hay que contar las rectas que pasan por un punto doble de la curva? ¿Cuál de las dos posibilidades hay que considerar?.

1) se puede pensar que cada una de estas rectas es una cuerda de la curva alabeada dada, puesto que esta curva pertenece a una clase de curvas del mismo género y su punto doble proviene de que dos ramas que no se cortaban en las curvas próximas se han aproximado continuamente hasta cortarse.

2) se debe por el contrario considerar cada una de estas rectas como una secante ordinaria puesto que el punto doble entraña una disminución de género y aparece en la familia como un hecho aislado y completamente nuevo, propio de la curva dada, como sucede por ejemplo cuando se consideran curvas intersección de dos superficies que presentan un contacto eventual.

Este tipo de ejemplos, de los cuales hay muchos en la obra de Study, se deben al hecho de que una misma curva puede ser límite de familias muy distintas, así por ejemplo, una cúbica plana con un punto doble puede presentarse indistintamente como límite de curvas generales planas de grado tres y de cúbicas alabeadas con un punto doble.

Otro ejemplo, quizás el más típico, consiste en contar el número de rectas que cortan a cuatro en posición general, haciendo degenerar las cuatro rectas en dos pares de rectas coplanarias, se ven las dos soluciones, la recta que une los dos puntos de corte y la recta intersección de los dos planos. Kohn observa que en cambio no es válido hacer concurrir sólo a dos de ellas, en cuyo caso la recta que pasa por el punto de corte y se apoya en las otras dos sería la solución única. La objeción de Kohn revela uno de los límites del principio, sobre cuatro rectas en posición general la coincidencia de dos es una condición que se expresa con una desigualdad (Enriques loc. cit.). Se ve aquí la importancia ya señalada por Severi de considerar de modo correcto el espacio de parámetros.

En aplicación del principio, sucede que si un problema general tiene un máximo de n soluciones y en un caso límite presenta más de n, en este caso debe tener infinitas; eso sucede por ejemplo, al estudiar la intersección de una curva de orden n con una superficie de orden m, si el número de puntos comunes es mayor que $m.n$, la curva debe tener una componente contenida en la superficie. Es usando esta idea como Maclaurin en su "Geometría Orgánica" en 1720 probó el resultado ya indicado antes de que el número de puntos dobles de una curva de orden m es como máximo $(m\text{-}1)(m\text{-}2)/2$. Poncelet utiliza este tipo de argumentos frecuentemente, por ejemplo para buscar rectas en superficies o en los "Teoremas de cierre". Por ejemplo:

"Se quiere determinar el número de polígonos de n lados inscritos en una cónica dada y circunscritos a otra, la coincidencia del primer vértice y el n+1 se puede expresar mediante una ecuación bicuadrática, entonces, si un polígono cumple la condición, cada vértice determina una solución doble (¡Hay dos sentidos de recorrido!), el número de soluciones es entonces superior a 4 y la ecuación se verifica idénticamente en todo punto de la primera cónica, por lo cual el polígono puede empezarse desde un punto cualquiera".

Estos problemas se pueden plantear para cúbicas y polígonos de más de 6 lados (Kohn) para varias cónicas de un haz y admiten generalizaciones al espacio (Hurwitz, Zeuthen, Gardiner, etc.).

6.- El Cálculo Simbólico

El problema 15 de Hilbert, al que ya hemos aludido, consiste en fundamentar el "Cálculo Simbólico" desarrollado por Schubert[22], método que le permitió obtener una colección impresionante de fórmulas y números geométricos. Una primera fundamentación para problemas de número relacionado con espacios lineales, se debe a Van der Waerden[23]. No podemos entrar aquí a plantear el cálculo simbólico en términos de Schubert, pero no podemos dejar el tema sin hacer al menos una breve exposición de su línea de trabajo y sobre todo de la situación hoy de sus resultados (S. Kleiman).

El grupo de k-ciclos $Z_k(X)$, de una variedad de dimensión n, X, es el grupo abeliano libre generado por todos los símbolos $[V]$ correspondientes a las subvariedades V cerradas e irreducibles de X de dimensión k, si V y W son dos de estas subvariedades que se cortan "propiamente", es decir, de modo que las componentes irreducibles Z_i de la intersección verifiquen que:

$$\text{Codim}\,(Z_i, X) = \text{Codim}\,(V,X) + \text{Codim}\,(W,X)$$

se define el producto de los ciclos correspondientes por:

$$[V].[W] = \Sigma\, m_i\,.\,[Z_i] \quad \text{con} \quad m_i = \Sigma\,(-1)^j \text{ long. } (Tor_j\,(O_{V,Zi}, O_{W,Zi})$$

(donde se trabaja en módulos sobre $O_{X,Zi}$). Esta fórmula, fórmula de Serre, generaliza y formaliza las fórmulas sobre multiplicidades del apartado 2, ya que el número m_i es precisamente el que mide el contacto de V y W a lo largo de Z_i (como observa Kleiman es una notación sofisticada que ha necesitado una evolución de más de un siglo para ser alcanzada). La intersección de dos ciclos no es propia en general, pero una variante del principio de continuidad, el "moving lemma" garantiza la posibilidad de deformar convenientemente (equivalencia racional) los ciclos, con parámetros en una recta proyectiva, para alcanzar la intersección propia, y que el resultado del producto es independiente, módulo equivalencia racional del proceso seguido. Así las clases de ciclos, módulo equivalencia racional forman un anillo graduado $A \cdot X$, se puede definir el grado de una clase de modo que si está representada por un ciclo, dicho grado sea la suma de las componentes de dimensión cero de este. Entonces dos clases se dicen "numéricamente equivalentes" si sus productos por cada clase fija tienen el mismo grado. Las clases módulo equivalencia numérica forman otro anillo. Este anillo fue esencialmente el introducido por Schubert, para sus cálculos en geometría numerativa.

Schubert calculó los anillos de clases de equivalencia numérica de ciclos para el plano proyectivo y para el espacio proyectivo de dimensión 3, así como para la grasmaniana de rectas en el espacio tridimensional y para diversas compactificaciones de las variedades de triángulos en el plano, cónicas[24], cuadricas en espacios de dimensión tres y cubicas alabeadas, utilizando para ello los principios de continuidad y correspondencia. Kleiman cita una relación de los matemáticos directamente relacionados con la obra de Schubert, entre los que se encuentran: Severi, Van der Waerden, Ehresmann, Segre, Todd, Hodge, Pedoe, Weil, Zariski, Chevalley, Samuel, Chow, Serre y Grothendieck.

7.- El principio de correspondencia

El problema de la generación mecánica de curvas viene desde muy antiguo Los primeros trabajos de generación sistemáticos se deben a Newton, que dio un método que conduce siempre a curvas con un punto doble, y calificó de problema muy difícil la generación de curvas no singulares de cualquier grado. Maclaurin (1719) indica que si se hacen girar en torno a sus vértices dos ángulos de lados, a,b y c,d, de modo que el punto de intersección de a y c describe una recta, el de b y d describe una cónica (este tipo de planteamientos conducen a problemas como el de Braikenridge ya señalado) y en esta dirección tienen resultados notables Grassmann y sobre todo Kempe (1877). Este último prueba que toda curva algebraica real puede ser reproducida localmente con un sistema articulado. La generación automática se transforma en un método geométrico de definir curvas de grado arbitrario sin la intervención del análisis. Así Steiner y Chasles, después de haber usado como base de la teoría de cónicas la generación proyectiva de estas como lugar de puntos de corte de rectas homólogas en una proyectividad de haces lineales, inician la tarea de estudiar la posibilidad de generación de una curva de orden $n+ m$ como lugar de puntos de corte de curvas homólogas en una proyectividad entre dos haces de curvas de ordenes m y n, tras un trabajo incomprendido de Grassmann (1851) y numerosos artículos de Chasles y de Jonquières, que caen en errores producidos por no tener en cuenta problemas de compatibilidad en los sistemas de ecuaciones que obtienen; es Küpper en 1888 el primero que da una demostración rigurosa del resultado.

Este problema de generación de curvas se puede interpretar en términos de correspondencias proyectivas (m,n) (cada punto tiene m imágenes y n originales) entre series lineales, y en estos términos se conocía con el nombre de principio de correspondencia. De Jonquières entendía el principio bajo la forma siguiente:

En una correspondencia (m,n) en una recta, hay $m+n$ puntos dobles. Este principio, como hemos señalado estaba inspirado por el comportamiento, ya conocido, de las correspondencias (1,1) y (1,2) y se usa primero por Steiner sin demostración, así como por de Jonquières y por Cremona. Sin embargo a Chasles le resulta difícil admitirlo en toda su generalidad, ya que algebraicamente significa que un polinomio de grado m en x y n en y es de grado $m+n$ cuando se hace $x=y$, sin embargo finalmente y bajo la hipótesis adicional de que el punto del infinito tiene m imágenes a distancia finita, es decir que en la ecuación aparece un término efectivo de grado $m+n$, Chasles lo admite (1864) aunque su demostración no es completa, según hemos señalado más arriba. Entre 1864 y 1877 Chasles publica en los C.R. de la Academia un enorme número de consecuencias del principio, que eran generalmente meras enumeraciones de resultados y no incluían demostraciones. Como él mismo observa: "la aplicación del principio y el encadenamiento de los resultados no hacen precisas las pruebas". Pero en los casos más complejos aparecían demostraciones completas como por ejemplo del hecho de que en todo sistema (a,b) (a curvas por un punto, b tangentes a una línea) de curvas hay $am+bn$ curvas tangentes a una de orden n y clase m.

El Principio de Correspondencia se generaliza a diferentes ámbitos. Cayley (1866) por "una inducción que parece suficiente", prueba un principio de correspondencia válido para correspondencias (m,n) en una curva de género p, estableciendo el número de coincidencias en la correspondencia como igual a $m+n+c.p$ siempre que los n puntos y que corresponden a un punto x sean intersección de la curva de partida con otra que la corte no solo en los m puntos y sino en el punto x con multiplicidad c y en los puntos fijos. Esta fórmula fue probada completamente por Brill (1871), que llama a c valor (Wertigkeit) de la correspondencia y usa reducción de singularidades.

La determinación de todas las correspondencias algebraicas posibles en una curva se debe a Hurwitz (1885), que establece para ellas la fórmula de Cayley-Brill e incluso la generaliza a correspondencias singulares.

Schubert, Pieri y finalmente Severi, extienden el principio de correspondencia a más dimensiones.

8.- Singularidades

En el tratamiento analítico de los problemas anteriores juega un papel esencial el estudio de las singularidades. El origen del mismo cabe situarlo en Newton, y más específicamente en su "Metodus functionum et serium infinitarum" (v. Brill-Noether loc. cit.) de 1736. Newton se ocupa primero de la aproximación decimal de una raíz de una ecuación, y después, por extensión aplica el mismo método a ecuaciones en dos variables $f(x,y)=0$, parte de una raíz de la forma inicial $(0,a)$, sustituye en f, $y=a+z$, obteniendo una nueva ecuación cuya forma inicial se busca anular de nuevo para $z=b.x+z'$ etc. Para estudiar fácilmente las formas iniciales, Newton escribe la ecuación ordenadamente en potencias crecientes de x e y, de modo que todos los términos del mismo grado en x están en la misma columna y los del mismo grado en y en la misma fila; tiene así el "negativo" del célebre Polígono de Newton. De Gua es el que se da cuenta de cómo el Polígono permite separar las formas iniciales pesadas, y de que no necesita escribir todos los términos de la ecuación, sino solamente los de grado inferior a un número determinable en función de ésta. La primera separación completa de las ramas se encuentra en la "Introduction a l'Analyse des lignes courbes" de Cramer (1750) (Enriques loc.cit.). Cramer busca solamente obtener aproximaciones de "grado tan alto como se quiera" a la ecuación de las ramas quedando fuera de su ánimo encontrar la expresión de éstas en términos de series de potencias y más aún la convergencia de estas series. Tras los trabajos de Taylor sobre el caso de ecuaciones de orden 1 como series en y, y la obra en esta dirección de Cauchy, el resultado esencial para la Geometría Algebraica es el teorema de Puiseux que en 1850, cien años después de Cramer y empleando el mismo método de Newton que éste, prueba que toda ecuación algebraica $f(x,y) = 0$ tiene una solución desarrollable en serie convergente de potencias en la variable x con exponentes fraccionarios con denominador acotado (series de Puiseux).

El mismo método fue aplicado a intentar resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y primer grado, es decir del tipo $A\,(x,y) + B\,(x,y).\ y' = 0$, con A y B analíticas, por Briot-Bouquet[25] y a ecuaciones de grado arbitrario por H.B. Fine[26]. Ambos probaron la existencia de solución convergente a este tipo de ecuaciones, incluso en los puntos en los cuales se anulan los coeficientes (la prueba definitiva de este resultado para ecuaciones de primer orden y primer grado no se ha dado hasta Camacho-Sad en 1984, y empleando el polígono de Newton ha sido obtenida por J.Cano en 1990 y el resultado es falso en general).

Los desarrollos en serie entroncan directamente con los métodos de Halphen para el cálculo de la multiplicidad de intersección. Este y Smith ponen de manifiesto la importancia en sus cálculos de ciertos exponentes específicos del desarrollo, que luego han sido conocidos como exponentes característicos. Hamburguer (1871) calcula mediante una técnica de divisiones sucesivas los desarrollos de Puiseux de ramas lineales, por un método que, al contrario del de Puiseux se puede extender a cuerpos base de característica arbitraria (v. A. Campillo[27]).

Un punto de vista radicalmente distinto es el de Noether, que en 1871 enuncia la posibilidad de aplicar "transformaciones cuadráticas", no sólo para calcular los desarrollos en serie de Puiseux, sino también para estudiar la naturaleza geométrica de la singularidad. Parece ser que la idea de transformar mediante transformaciones cuadráticas una curva en otra con singularidades ordinarias se debe a Kronecker, que la comunicó verbalmente a Riemann y Weierstrass en 1858, pero su método trabaja directamente con la ecuación de las ramas y en cierto sentido con transformaciones locales, además como observan Clebsch y Klein para llegar a un modelo con sólo puntos dobles, precisa pasar por curvas alabeadas. Por el contrario, la propuesta de Noether, utiliza transformaciones racionales invertibles en todo el plano (transformaciones de Cremona) que contraen tres rectas y "explotan" tres puntos para la reducción de singularidades a singularidades ordinarias calculando después las ecuaciones de las ramas por el método de Taylor.

Uno de los aspectos esenciales en el método de Noether es la introducción de los puntos infinitamente próximos, que permiten formalizar y sistematizar todos los resultados y técnicas de infinitésimos utilizados por los geómetras analíticos, lo cual los hace desbancar completamente en este campo a los geómetras sintéticos. La reducción de singularidades permite extender a curvas algunos de los invariantes geométricos de las curvas lisas. Como ya hemos señalado permite estudiar el anillo de las correspondencias sobre curvas arbitrarias.

Bibliografía

Los textos usados como guía directa del trabajo son

L. BERZOLARI. *Thèorie générale des courbes planes algébriques.* Encyclopédie des sciencies mathematiques. [III,19] Gauthier-Villars París 1915.

A. BRILL-M. NOETHER. *"Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit"* Jahresbericht der Deutsche Math. Ver. 3 1892.

M. CHASLES. *Aperçu historique sur l'origine et developpement des Methodes en Geometrie.* 3ª Ed. París 1889.

F. ENRIQUES. *Lezioni sulla teoría geométrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* Nicola Zanichelli. Bologna 1915.

G. LORIA *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche.* 2ª Ed. Torino 1896 de una precisión increíble.

H.G. ZEUTHEN-M. PIERI. *"Geométrie Énumerative"* Encyclopedie des Sciencies Mathematiques (III.2) Gauthier-Villars París 1915.

La bibliografía consultada en detalles concretos y citada en el texto es la siguiente:

1. L. YOUNG. *Mathematicians and Their Times*. North Holland Amsterdam 1981.

2. C. SEGRE. *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*, Riv. di Mat I, 1891. Trad. On some tendencies in geometric investigations. Bull. Amer Math. Soc. (2) 10, 1904.

3. F. ENRIQUES. *Lezioni sulla teoría geométrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Nicola Zanichelli. Bologna 1915.

4. J. ETAYO. *El reinado de la geometría proyectiva*. "Historia de la Matemática en el siglo XIX" (1ª parte). Acad. Ciencias, Madrid, 1992, págs. 115-138.

5. O. STOLZ. *Die Geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie*. Math. Ann. IV. 1871.

6. M. CHASLES. *Aperçu historique sur l'origine et developpement des Methodes en Geometrie*. 3ª Ed. París. 1889.

7. HILBERT D. - COHN-VOSSEN S. *Geometry and the Imagination*. Chelsea Pub. New York 1952 (Trad. del original alemán de 1932. Anschauliche Geometrie).

8. H.G. ZEUTHEN-M. PIERI. *"Geométrie Énumerative"*. Encyclopedie des Sciencies Mathematiques (III,2) Gauthier-Villars. París 1915.

9. G.H. HALPHEN. Apéndice a la traducción francesa de O. Chemin, Ed. Gauthier Villars, París 1882 del libro de G. Salmon. A treatise on the higher plane curves. Dublín 1852.

10. BERZOLARI, L. *Thèorie générale des courbes planes algébriques*. Encyclopédie des sciencies mathematiques. [III, 19] Gauthier-Villars. París 1915.

11. V.J. PONCELET. *"Traité des propriétés projectives des figures"*. París,1866.

12. S.L. KLEIMAN. *The enumerative Theory of Singularities. Real and Complex Singularities*. (Proc. Con. Edit. P. Holm.). Sijthoff & Noordhoff, Groningen 1977.

13. BRILL-NOETHER. " *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit* " Jahresbericht der deutsche Mat. Ver. 3 1892.

14. W. FULTON. *Introduction to Intersection Theory in Algebraic Geometry*. Proc. CBMS Regional Conference held at G. Mason Univ. 1983. A.M.S. 1984.

15. M. ABELLANAS. *Estudio de los modelos canónicos de codimensión 1 de variedades algebraicas*. Tesis doctoral. Madrid 1984.

16. H.G. ZEUTHEN. *"Lehrbuch der abzälenden Methoden der Geometrie"*. Leipzig 1914.

17. G. SALMON. *A treatise on the analytical geometry of three dimensions*. (no dispuse de la edición original de 1882, pero poseo una curiosa traducción al español de 1888 efectuada por L. de la Puente, Teniente de Navío y Profesor de la Escuela Naval de Ferrol).

18.H.C. SCHUBERT. *"Kalkül der abzählenden Geometrie"*. Leipzig 1879 p. 12.

19. F. SEVERI. *Introduzione a la Geometría Algebraica. Geometría Numerativa* . Ed. Universitarie. Roma 1947.

20. D. HILBERT. *Mathematische Probleme*. Gött Nachr. 1900.

21. S. KLEIMAN. Problem 15. *Rigurous foundation of Schubert's enumerative calculus. Mathematical developments arising from Hilbert's Problems*. Proc. Symp. Pure Math. vol 28 Providence 1976.

22. H.C. SCHUBERT. *Kalkul der abzählenden Geometrie*. Teubner, Leipzig 1879.

23. B.L. VAN DER WAERDEN. *Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie.* Math. Ann. 102. 3. 1929.

24. H.C.H. SCHUBERT. *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten grades in n-Dimensionen.* Math. Ann. 45. 1884.

25. C.A. BRIOT & J.C. BOUQUET. *Proprietés des Fonctions définies par des Equations Differentielles.* Journ. Ecole Polyt. Cahier 36. 1856.

26. H.B. FINE. *On the functions Defined by Differential Equations, with an Extension of the Puiseux Polygon Construction to these Equations.* Amer. Journ. of Math. vol. XI 1889.

27. A. CAMP ILLO. *Algebroid curves in positive characteristic.* Srpinger Verlag Berlin, 1980.