Cauchy

POR BALTASAR RODRÍGUEZ SALINAS *
JOSÉ L. DE MARÍA **

El matemático francés Agustín-Louis Cauchy es uno de los más fructíferos de todos los tiempos, tanto por su labor investigadora como por su elaboración y rigorización de muchas ideas anteriores y contemporáneas. De hecho, Cauchy instauró un método de fundamentación de las matemáticas, especialmente del Análisis y se le considera el fundador del rigor en matemáticas. Sin duda es el más citado por los docentes universitarios que explican Análisis, pues existen objetos matemáticos, teoremas, criterios y fórmulas que llevan su nombre y que actualmente forman parte de los programas de matemáticas.

Es muy difícil entender el trabajo de Cauchy sin entroncarlo previamente en el momento histórico en que vivió, pues coincide con la época de la Revolución Francesa, época sin duda de violentos cambios políticos y sociales. Todo esto añadido a su carácter profundamente monárquico y católico hicieron que su obra y su vida siguiesen los ciclos monárquicos y revolucionarios de finales del siglo XVIII y primera mitad del siglo XIX.

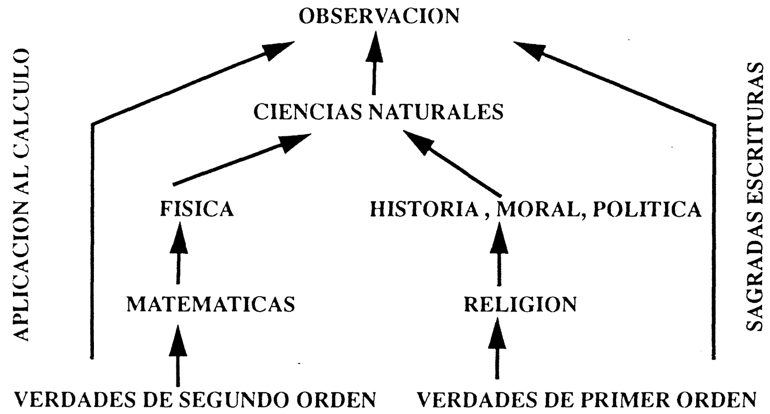
En la reciente biografía escrita por Bruno Belhoste (1991) se nos muestra en un esquema (ver esquema I) la fundamentación ideológica de Cauchy en las que aparecen verdades de primer orden basadas en la Religión Católica y verdades de segundo orden basadas en las Matemáticas.

Los biógrafos de Cauchy opinan que el entorno histórico de su infancia influyó de forma definitiva en todo su posterior crecimiento y maduración científica.

En el año 1774 reinaba en Francia Luis XVI con una monarquía autoritaria que desembocó en 1788 en la Bancarrota del Estado. Esta crisis afectaba a la familia de Cauchy, pues su padre Luis Francisco había pasado por cargos administrativos de relevancia. Siendo un brillante estudiante de Ciencias clásicas en la Universidad de París, a la edad de veintitrés años, en 1783, se convirtió en secretario general de Luis-Thiroux de Crosnes que ostentaba el cargo de Intendente de la alta Normandía. Cuando este último fue ascendido al cargo de Teniente General de la Policía de París se llevó consigo a Cauchy y le nombró lugarteniente. Luis Francisco Cauchy

* Académico Numerario.
** Profesor de la U.N.E.D.

se casó en París con Marie-Madeleine Desestre con la que tuvo cuatro hijos y dos hijas. De sus hijas, Teresa murió pronto y Adela se casó con su primo G. de Neugurg. Su hijo más pequeño Amadeo murió en 1831. Alejandro (1792-1857) ocupó cargos judiciales y Eugenio (1802-1877) se dirigió por la Administración.



ESQUEMA I

Agustín-Luis nació el 21 de agosto de 1789 en París y fue bautizado en la Iglesia de Saint-Roch pocas semanas después del asalto a la Bastilla y entre cambios como la abolición del Régimen Feudal y la Declaración de los Derechos del Hombre. La carrera del padre de Cauchy se vió comprometida por la insurrección de París en la que clases bajas e intelectuales pidieron la dimisión del primer ministro, Necker. Muchos mandatarios fueron guillotinados, como Fleselles, Foullon y Bertier de Savigny. Luis-Thiroux, como Teniente General de Policía, fue privado de su libertad el día 15 de julio y por tanto Luis-Francisco Cauchy se vió seriamente amenazado.

Los biógrafos se inclinan a pensar que estos años determinaron la tremenda lucha que durante su vida mantuvo Agustín-Luis para intentar deshacer los resultados de la Gran Revolución de 1789 a la que veía como un gran desastre.

Cuando Luis Thiroux fue condenado a muerte en 1790, el padre de Cauchy, temiendo por su vida y la de su familia, dejó París con su mujer y dos hijos, Agustín y el pequeño Alejandro-Laurent, recién nacido el 12 de marzo. Huyeron a Arcueil, donde permanecieron hasta que pasó el reinado del terror pasando en algunas ocasiones hambre. Allí estaba la "Sociedad de Arcueil" fundada por Laplace y Berthollet. Como anécdota, Luis Francisco presentó varias veces a Laplace y a Legendre a su hijo Agustín y Laplace en una ocasión dijo refiriéndose a Cauchy:

"Ahora veis aquí un muchacho que un día nos reemplazará a todos nosotros simples geómetras".

En Arcueil, Luis Francisco se hizo cargo de la educación de sus hijos, formándoles en latín y griego, así como dándoles una amplia formación religiosa que familiarizó a Cauchy con los textos Bíblicos. En una carta de Luis Francisco se dice:

"Las Ciencias son hermanas de las Artes y nadie interesado en las últimas puede ignorar las primeras".

Con la caída de Robespierre, el 27 de julio de 1794, la familia regresó a París, donde Luis Francisco fue nombrado Director de la Oficina de Artes y Oficios. Continuó educando a sus hijos y observando la gran capacidad de su hijo Agustín se lo comentó a Laplace que le aconsejó de la siguiente forma:

"No le permita abrir un libro de matemáticas ni escribir un simple número antes de que acabe sus estudios de literatura".

Los contactos personales con partidarios de Napoleón contribuyeron a que a comienzos de 1800, Luis Francisco fuese nombrado Secretario del Senado.

Siguiendo el consejo de Laplace y de Legendre, el padre de Agustín inscribió a su hijo en l'Ecole Centrale du Panthêon en otoño de 1802, donde completó sus estudios de Humanidades. Este colegio era uno de los tres mejores de París. En dos años estudió lenguas clásicas, dibujo y ciencias naturales. El código disciplinario era liberal contrariamente a los Liceos Imperiales que en 1804 Napoleón instauraría.

A pesar de sus múltiples premios nacionales en Humanidades, y pese a la tradición de su familia, decidió ser ingeniero, lo que agradeció su padre aunque siguieron fomentando sus estudios de clásicas, aprendiendo hebreo y presentando ambos artículos sobre temas bíblicos en la Academia de Inscripciones y Bellas Artes.

Cauchy tenía un carácter vigoroso y una enorme pasión por la verdad que sus contemporáneos confundieron con testarudez, sobre todo en materia de política.

Sin pretender simplificar se pueden explicar las características de Agustín en términos de su familia:

- Gran habilidad para formalizar situaciones y manipular abstracciones, gran rigor lógico y conceptual, así como claridad y precisión de exposición. Cualidades de gran valor en el estudio de las leyes. Por eso no sorprende en Cauchy su continua obsesión por la formalización de los métodos y procedimientos matemáticos que hasta entonces habían sido usados sin justificación.

En otoño de 1804 recibió clases de matemáticas por Dinet y en 1805 fue examinado por Biot resultando segundo de los 293 candidatos y 125 admitidos, por lo que pudo elegir destino en l'Ecole des Ponts y Chaussées.

En aquel tiempo los estudiantes tenían que elegir varios libros de texto. Cauchy eligió los siguientes:

Curso de Análisis Algebraico de Garnies.

Tratado elemental de Cálculo Diferencial e Integral de Lacroix.

Tratado de Mecánica de Prony.

Geometría Descriptiva de Monge.

Hojas de Análisis Aplicado a la Geometría de Monge.

Aplicación del Algebra a la Geometría de Monge y Hachette.

Su especial talento para resolver problemas geométricos fue comentado entre sus profesores. Por ejemplo en 1806 resolvió un problema sobre la determinación de líneas de máxima pendiente y Hachette le publicó en Correspondance sur l'Ecole Polytecnique una elegante demostración del Teorema de Monge. "Si una superficie con ecuación de grado n es contactada por un cono, la curva de contacto de esas dos superficies pertenece a una superficie curva de grado n-1".

Cuando dejó l'Ecole Polytecnique tenía 18 años.

Al final de 1807 fue a l'Ecole de Ponts et Chaussées donde ganó 4 premios de estudios. En vacaciones asistía a la Sociedad de Arcueil y en 1808 fue asignado a las obras del sistema de aguas de París, al Ourcq Canal y a la construcción del Acueducto de Saint-Denis.

En dos manuscritos presentó un trabajo sobre la teoría de puentes de piedra y sobre la construcción de Arcos.

En esos momentos ya pertenecía a la congregación de la Santa Virgen, fundada en 1801 por el jesuita Jean Baptiste Bourdier-Delpuits, para llevar la oración a la Universidad bajo el lema "Cor unum et ánima una". El enfrentamiento entre el Papado y Napoleón puso a la congregación contra el Imperio.

Habiendo completado su estancia en l'Ecole des Ponts et Chauseés, fue nombrado ingeniero ayudante en enero de 1810 por Count Molé, Director General de l'Ecole y enviado a Cherbourg donde Napoleón comenzaba a construir su flota para las operaciones contra Inglaterra. Cauchy, físicamente frágil y por primera vez separado de su familia durante su estancia en Cherburgo y durante un largo período de tiempo, demostró con creces sus cualidades como ingeniero y organizador. Escribía a su padre el 8 de junio de 1810: "El proyecto del Puerto de Napoleón es más y más importante y el trabajo me proporciona conocimientos muy interesantes".

Llevaba consigo al partir:

La Mecánica Celeste de Laplace.

El Tratado de las funciones analíticas de Lagrange.

La Imitación de Cristo de Kempis.

Si bien el ambiente no era muy propicio para la creación, allí en Cherburgo comenzó su carrera como matemático.

En un artículo presentado en 1809 Poinsot había establecido la existencia de tres nuevos poliedros regulares no convexos: dos dodecaedros y un icosaedro. Estos con los cinco regulares convexos y un dodecaedro de Kepler eran los poliedros regulares conocidos. Poinsot no era capaz de demostrar que eran los únicos. En 1811 Cauchy presentó un artículo resolviendo el problema de Poinsot y generalizando la clásica fórmula de Euler a redes de polígonos y poliedros. La evaluación del trabajo corresponde a Legendre y Malus, que observó: "Las demostraciones son rigurosas y desarrolladas de forma elegante".

Animado Cauchy en 1812 presentó otro trabajo sobre polígonos y poliedros. En la primera parte estableció ocho teoremas de variación de ángulos en polígonos rectangulares y esféricos y en la segunda parte hizo una demostración por absurdo del teorema 1 del libro 9 de los Elementos de Euclides, según ambos:

"Dos poliedros convexos con caras iguales y similarmente colocadas, son necesariamente iguales salvo isometrías y superposiciones. Es decir un poliedro rígido es completamente rígido".

Después de una polémica con Malus a propósito de la demostración por absurdo, Legendre, Biot y Carnot aprobaron el artículo con estas palabras:

"Queríamos dar una idea de la demostración de Cauchy, pero hemos reproducido casi completamente sus argumentos. Así hemos comprobado la brillantez con que el joven geómetra ha resuelto un problema que se había resistido a los maestros".

También probó un teorema de la que se llamaría posteriormente Teoría de Galois, generalizando un teorema de Ruffini.

A partir de ello se puede deducir que Cauchy, como sólo muy pocos matemáticos del siglo XIX, ya desde el inicio de su carrera científica aspiraba a dominar un amplio sector de la totalidad de las matemáticas, incluyendo algunos campos de aplicación de ellas. Resulta por eso comprensible que Cauchy acometiese diversas disciplinas de las matemáticas con diferente intensidad y con resultados de muy distinta envergadura científica. Cauchy fue uno de los matemáticos más fecundos que han existido. Publicó siete libros y más de 800 trabajos científicos. En el año 1813 Cauchy regresó a París. No resulta del todo claro por qué renunció a su empleo de ingeniero en Cherburgo. Al parecer su familia era de la opinión de que le sería mucho más conveniente quedarse en París para no desperdiciar sus cualidades y consagrarse por entero a la ciencia.

En los años siguientes Cauchy pudo dedicarse sistemáticamente a problemas matemáticos. Fue el período de su más afortunada actividad científica, durante el que, aunque sólo fuese en estado embrionario, alcanzó sus más relevantes resultados científicos. Este período se prolongó hasta la Revolución de julio de 1830.

Por de pronto Cauchy tuvo que esforzarse por conseguir alguna ocupación científica oficial, ya fuese en la Academia o en una Universidad. Aunque indudablemente le apoyaban eminentes matemáticos franceses - debido a la importancia de sus trabajos ya publicados o a causa de los contactos personales de la familia Cauchy, igual da - todos sus esfuerzos resultaron infructuosos. Haciendo valer la influencia política de su importante cargo público intervino también el padre de Cauchy, pero en vano. Así Cauchy fue propuesto en los años 1813 y 1814 como miembro de la Academia para los puestos que en aquél entonces habían quedado vacantes. Pese al reconocimiento de sus méritos científicos, fueron elegidos otros de mucha más edad. Sólo tras la restauración de la Monarquía se abrieron al antirrepublicano Cauchy las puertas de todas las Instituciones y obtuvo reconocimiento público.

Mientras tanto, en 1814, envió Cauchy a la Academia Francesa un tratado sobre las integrales definidas que se convertiría en la base de las funciones complejas. En 1816 ganó un premio de la Academia por un trabajo sobre la propagación de las ondas en la superficie de un líquido, los resultados aún son clásicos en hidrodinámica. Inventó el método de las características, que es crucial para la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales en 1819. Y en 1822 se ocupó de una materia que le llevaría a un lugar preferente entre los grandes científicos, la teoría de la elasticidad.

En 1816, tras la caída de Napoleón, fue reorganizada la estructura de las Instituciones Científicas de París, y se procedió contra los científicos de orientación revolucionaria y aquellos que se comprometieron con la Revolución. En esta situación fueron obligados a abandonar las instituciones científicas, entre otros, los matemáticos L.N.M. Carnot y G. Monge, cuyos méritos científicos estaban fuera de toda duda. Cauchy fue nombrado, no elegido, para una de las plazas vacantes de la Academia. Antes Cauchy había sido profesor adjunto (1815) y catedrático (1816) en la Escuela Politécnica. En algún momento antes de 1830 debió ser destinado a la Facultad de Ciencias y también al Colegio de Francia. Sus famosos textos, que datan de este período, hechos con una exactitud poco usual hasta entonces y que contienen su obra fundamental en análisis, se convirtieron en clásicos. Estas obras han sido traducidas varias veces.

En 1818 Cauchy se casó con Aloïse de Bure, hija de un editor que publicó la mayoría de sus obras. Tuvieron dos hijas, una de las cuales se casó con el vizconde de l'Escalopier y la otra con el conde de Saint-Pol. Cauchy vivió en la rue Serpente en París y en la cercana ciudad de Seaux.

La tranquila vida de Cauchy pronto se vió convulsionada por la Revolución de 1830, en la cual fue reemplazado Carlos X de Borbón por Luis Felipe de Orleans. Cauchy rehusó jurarle fidelidad con lo que perdió sus cátedras. Pero esto no fue suficiente, Cauchy se exilió. No está claro por qué lo hizo: quizás porque temía un nuevo Terror y nuevas persecuciones religiosas, quizás porque quería indicar sus sentimientos contra la nueva autoridad, o quizás porque sencillamente no quería honestamente vivir bajo un usurpador.

Dejando su familia, Cauchy fue primero a Friburgo, donde vivió con los jesuitas. Ellos le recomendaron al rey de Cerdeña, quien le ofreció una cátedra en la Universidad de Turín. Cauchy aceptó. En 1833, fue llamado a Praga, donde Carlos X se había establecido, para encargarse de la educación del príncipe heredero, más tarde duque de Chambord. Cauchy aceptó, para emular a Bossuet y Fénelon, la dirección de dicha educación. Por ese tiempo fue nombrado barón por Carlos X. En 1834 se reunió con su mujer en Praga.

La vida en la corte y los viajes le llevaron mucho tiempo a Cauchy y el ritmo de sus publicaciones bajó. En 1838 su trabajo en Praga finalizó y

volvió a París. Continuó su trabajo en la Academia asistiendo a la reunión de los lunes y presentando una o más publicaciones en el semanal Comptes Rendus; se dice que la Academia puso límite al tamaño de ellas. En el curso de menos de veinte años, Comptes Rendus publicó 589 notas de Cauchy y muchas más fueron enviadas y no publicadas. Como académico estaba libre del juramento de fidelidad. Un intento de procurarle una cátedra en el Colegio de Francia se perdió por su intrasigencia. Biot nos cuenta que dos ministerios de educación intentaron establecer relación con Cauchy sin resultados. Bertrand más especificamente dice que la única cosa que le pedían era mantener el secreto de no haber jurado. Pero según Biot, "incluso tal posibilidad asustaba a Cauchy e intentó convencer por todos los medios que pudo imaginar diplomáticamente contra una sensibilidad casi infantil". Pero esto prueba el amor que tenía Cauchy a la verdad y que no comprendía Biot.

Sin embargo, existía en París con la denominación de Bureau des longitudes una oficina específica de pesos y medidas cuyos miembros recibían sueldo. En el año 1839 Cauchy fue elegido por los miembros de esta oficina de longitudes para un puesto que había quedado vacante. Si bien no fue explícitamente ratificado en su cargo por el Gobierno, continuó en sus funciones, de forma que estaba en una situación semilegal para una institución del Estado francés.

Cuando la revolución de febrero de 1848 estableció la Segunda República, una de sus primera medidas fue derogar el juramento de fidelidad. Entonces Cauchy volvió a su cátedra de la Sorbona (la única que estaba vacante) y la mantuvo incluso cuando Napoleón III restauró el juramento en 1852, pero fueron eximidos el republicano Arago y el monárquico Cauchy.

Un amplio rastro de trabajos traza la vida de Cauchy. Al principio, en un apacible ambiente hogareño Cauchy desarrolló su actividad científica y pedagógica. Ambas cosas se superponían en él. La última comunicación de Cauchy a la Academia acaba con la frase "esto es lo que explicaré en una próxima memoria". Dieciocho días más tarde murió. También hizo poesía en latín y francés, la cual ha sido olvidada.

Aunque Cauchy no interviniese directamente en los acontecimientos políticos, sin embargo su actividad y sus opiniones tuvieron para él claras consecuencias políticas. Por otra parte, siendo Cauchy uno de los científicos más eminentes de la Francia postrevolucionaria era todo un modelo para la unión de Fe y Ciencia, de Iglesia e Instituciones Científicas, una prueba de la ratificación racional de la rectitud de la política eclesiástica. Cauchy era libre y bien sabía lo que hacía, pero esto no lo ven algunos que careciendo de fe y sobre todo con categoría inferior a Cauchy le presentan como manipulado por la Iglesia. Esto queda contestado por lo que decía en una ocasión Cauchy: "Yo soy cristiano, es decir, yo creo en la divinidad de Jesucristo, con Tycho-Brahe, Copérnico, Descartes, Newton, Fermat, Leibniz, Pascal, Grimaldi, Euler, Guldin, Boscowich, Gerdil, con todos los grandes astrónomos, todos los grandes físicos, todos los grandes matemáticos de los siglos pasados. Yo soy también católico como la mayor parte de ellos; y, si se me pregunta la razón, yo la daré con mucho gusto. Se vería que mis convicciones son el resultado, no de prejuicios de nacimiento, sino de un examen profundo".

Lo más importante de todo es que Cauchy era coherente con su pensamiento religioso. Más de un tercio de sus biógrafos lo retratan como un católico ferviente que tomó parte en ayudas como la de François Règis para madres solteras, para la alimentación de Irlanda y para la redención de presos por el trabajo, desempeñando una importante actividad en la Sociedad de San Vicente de Paul. Cauchy fue uno de los fundadores del Instituto católico, una institución de enseñanza superior. Sirvió en un comité que promovió la observancia del Sabbath y mantuvo trabajos para los becarios en Levante. Biot dice que fue un trabajador social en Sceaux y gastó su salario entero en los pobres de la ciudad. Justificaba su comportamiento diciendo: "No tiene importancia, es sólo mi salario; no es mi dinero, es del emperador".

La vida de Cauchy fue estudiada principalmente por Valson, el cual tiende a presentarlo como un santo con virtudes y sin defectos. Su estilo mantiene cierto aire dulzón de las historias de santos. Contrariamente a la intención de Valson, esa biografía ha dado lugar a que algunos no creyentes viesen un Cauchy fanático y testarudo. N.H. Abel llamó a Cauchy loco, infinitamente católico y fanático. Estas cosas pueden ser debidas a una forma de reaccionar contra el libro de Valson.

Una historia que es dificilmente creible es contada por Bertrand en una referencia de Valson. Bertrand, quien admiraba profundamente el genio científico de Cauchy, cuenta que en 1849, cuando se incorporó a su cátedra de Mecánica celeste en la Sorbona:... su primera lección decepcionó profundamente a los asistentes sorprendidos desagradablemente por la variedad confusa de cosas expuestas. La tercera lección, recuerdo, estaba casi enteramente dedicada a la extracción de la raíz cuadrada, donde el número 17 fue tomado como ejemplo, obteniendo la décima cifra decimal mediante un método conocido por los asistentes, pero nuevo para Cauchy que había dado con él la noche anterior. Yo no volví, pero fue un error porque las siguientes lecciones me habrían introducido en los más brillantes descubrimientos de los diez años anteriores del maestro.

Esta historia es una reacción vehemente a lo que afirmó Valson sobre Cauchy diciendo que era un profesor que "nunca dejaba un tema hasta que lo exprimía de tal modo que satisfacía los requerimientos de los espíritus más exigentes". De hecho la manera como solía trabajar Cauchy distaba bastante de lo descrito por Valson, como ya veremos.

De acuerdo con Valson cuando Mme. Cauchy se juntó con su marido en Praga, él se lamentaba de estar separado de sus padres, pero no mencionó en ningún momento a sus hijas. En cambio, de acuerdo con Biot, su mujer y sus hijas vivieron con Cauchy en Praga, y Valson no menciona a sus hijas en casi ningún momento exceptuando sus nacimientos, y para indicar que se encontraban a su lado en el momento de su muerte. Tampoco menciona a su mujer en muchas ocasiones. Esto hace parecer que Cauchy fuese un hombre de escasas relaciones humanas aunque efectuase numerosos trabajos de caridad. Bertrand tampoco habla de Cauchy como poseedor de grandes virtudes humanas, a pesar de que se ajusta más a la realidad. Biot habla de que Cauchy defendía las posturas democráticas y se relacionaba con personas peculiares como Laurent, denominando la forma de actuar de Cauchy como "la de un niño". Pero está claro que todos ellos exigían demasiado a Cauchy, como si fuese un verdadero santo.

Hans Freudenthal escribe así: La primera prueba de su extraña conducta es su exilio. Se puede entender su negativa al juramento, pero no es tan fácil de entender su exilio con un rey que además era un depravado. Pudo ser una heroicidad, pero por el contrario no lo fue.Fue una hazaña donde un paladín leal siguió a un rey y todo el resto de Francia vio aquella etapa como una suave transición de una crisis altamente peligrosa para el país. Su comportamiento quijotesco da lugar a pensar que era una persona bastante melodramática. Stendhal le juzgó así ya en 1826 cuando relata una sesión en la Academia de Ciencias en los siguientes términos:

Después de una conferencia de un naturalista Cauchy se levantó y protestó del aplauso diciendo: "Aunque todo lo expuesto fuese tan cierto como erróneo pienso que es, no sería conveniente divulgarlo entre el público, esto no puede más que perjudicar nuestra religión", lo que produjo grandes carcajadas entre el público y dejó a Cauchy como algo que el mismo pretendía, como un mártir despreciado.

Probablemente Stendhal estaba equivocado y Biot conociese mejor la realidad y expresó que Cauchy era como un niño. Entre sus escritos se pueden encontrar dos defendiendo a los jesuitas que se basaban en que éstos eran perseguidos por su virtud. No es fácil de entender la ingenuidad de estos artículos si no fuese Cauchy quien los escribió.

Otra historia confirmada de Cauchy, extraída del diario del rey de Cerdeña con fecha de 10 de enero de 1831, es que durante una audiencia Cauchy contestó cinco veces iniciando su respuesta con "Ya me imaginaba que Su Majestad me preguntaría esto y ya vengo preparado para responder". Entonces sacó una memoria de su bolsillo y comenzó a leer.

H. Freudenthal añade: Su manía de leer memorias es confirmada por el General d'Hautpoul en sus escritos de Praga.

Es curioso observar que los que acusan a Cauchy de comportarse como un niño, caen en puerilidades en sus juicios. Así no ven la grandeza de Cauchy al fijarse en los defectos que tenía como todo hombre. Como R. Tagore decimos: "El que de noche llora porque no ve el Sol, las lágrimas le impiden ver las estrellas". La altura matemática de Cauchy es indiscutible. Y su altura moral es coherente por ser un hombre de principios que le llevaban a la práctica de una caridad moderna. Y esto naturalmente no es bien visto por los que detestan a la Iglesia, que desearían no ver ambas cosas reunidas en un hombre de la categoría científica de Cauchy.

Algunas veces a lo largo de sus publicaciones en la Academia, de pronto cambió de tema y siguió otro tema diferente del expuesto; el tema se aclaraba unas semanas o unos meses más tarde. Era entonces cuando Cauchy enviaba a la Academia una información sobre un artículo de un *savant étranger*, no miembro de la Academia, que le había sido enviado para su examen. Entre tanto había probado algún resultado que lo mejoraba generalizándolo o profundizándolo. Desde luego en su notificación nunca olvidaba indicar sus investigaciones previas relacionadas con el artículo. Esto aparentemente parece denotar un comportamiento injusto y en otro caso lo sería pero no en el de Cauchy. Cauchy no dirigía las matemáticas, sino que éstas lo dirigían a él. Si se encontraba con una idea, no perdía tiempo en publicarla. Que apareciera en el semanario *Comptes Rendus* no era nada fácil y por esto fundó en 1826 una revista privada llamada *Exercises de mathématiques*. Sus doce números anuales se llenaron con artículos de Cauchy de los temas más diversos sin ningún orden ni concierto.

Cinco volúmenes de Exercises aparecieron antes de dejar París. Reanudó las publicaciones en Turín, después en Praga y otra vez en París. Así aparecieron diez volúmenes. Además publicó en otras revistas y existen al menos dieciocho memorias suyas publicadas separadamente, fuera de cualquier colección o publicación periódica, además de numerosos libros de texto. Sus publicaciones eran tan numerosas que ni la Academia podía publicarlas. En las reuniones de la Academia del 14, 21 y 28 de agosto de 1848 presentó cinco trabajos y cinco memorias, y en las reuniones siguientes hasta el 18 de diciembre, diecinueve trabajos y diez memorias.

Sobre el 1 de marzo de 1847 Lamé presentó a la Academia una demostración del último teorema de Fermat. Liouville indicó que se basaba en hipótesis no probadas en la aritmética de cuerpos. Cauchy trató inmediatamente este problema, que había considerado anteriormente. Durante varias semanas informó de seis intentos infructuosos en la resolución del problema, entonces no resuelto. Alrededor del 24 de mayo Liouville leyó una carta de Ernst Kummer que negaban las suposiciones de Lamé, pero ni siquiera este incidente hizo callar a Cauchy y quince días más tarde había generalizado los resultados de Kummer.

La historia de que la memoria de Abel se perdió por negligencia de Cauchy no se ha podido probar. Se supone cierta porque D.E. Smith descubrió un trabajo de 1829 de Legendre y Cauchy sobre el trabajo de Abel. No es cierto que Cauchy no reconociese los méritos ajenos. Cuando leía un trabajo modestamente reconocía sus méritos aunque mejorase sus propios resultados. De todos los matemáticos de la época fue de los más considerados por sus compañeros. Sus recensiones sobre sus propios descubrimientos eran muy ingenuas porque jamás olvidaba agradecer lo que debía a otros. Si caía en un error pedía disculpas de forma cándida.

La mayor parte de sus trabajos están escritos apresuradamente, pero no de forma poco correcta. Era totalmente distinto de Gauss, quien publicó mucho menos de lo que era capaz y muchos de sus trabajos ni siquiera vieron la luz. Los trabajos de Cauchy tienen una frescura de la que carecen los de Gauss, que son maduros. Además estimulaban nuevas investigaciones mucho más que los de Gauss, y en temas más diversos y amplios que los de éste. Sus publicaciones y métodos hacían pensar a Gauss que Cauchy tenía una inteligencia demoniaca que le hacía conocer todos los secretos mejor y más profundamente que cualquier otro hombre. No hay tal misterio. Cauchy publicaba tan rápidamente que hasta en alguna ocasión repitió el mismo trabajo y hasta no recordaba si lo había publicado anteriormente. Como ya hemos dicho, publicó siete libros y más de 800 trabajos. Existen más conceptos y teoremas llamados de Cauchy que de cualquier otro matemático. Sólo en elasticidad existen al menos dieciseis conceptos con su nombre. Todos ellos son simples y fundamentales. Cauchy los descubrió de forma no muy simple y el modo con que los usaba o no usaba demuestra que no sabía que eran fundamentales. En todo lo que Cauchy abordó hay una inusual falta de profundidad. El fue uno de los más grandes matemáticos y seguramente el más universal, además de contribuir considerablemente a la física matemática. Pero por el contrario fue aparentemente superficial y uno de los que más han contribuido a la matemática sin saberlo.

Como todo tiene su fin, Cauchy murió el 23 de mayo de 1857. Cuando el mismo mes de mayo enfermó se congregaron en torno a él representantes de la Iglesia. Los jesuitas llegaron apresuradamente y el Cardenal de París le administró la extremaunción.

Publicaciones

Los trabajos de Cauchy aparecieron en las publicaciones de la Academia, en algunas revistas científicas, en libros o en colecciones como los *Exercises*. Algunos de sus cursos fueron publicados por otros. De acuerdo con Valson existen dieciocho memorias sueltas. Un jesuita, llamado Padre Jullien, catalogó sus trabajos supervisados por el propio Cauchy. El catálogo no se publicó. La lista de Valson se basa en este catálogo, pero no se sabía si estaba completo, ni tampoco está claro que Valson viese las memorias sueltas e incluso se duda si existieron. Son muy pocas las que han sido reproducidas. Cauchy dejó muchas anécdotas relacionadas con ellas, pero no se conocen su paradero. Lo que la Academia posee es muy poco.

En 1882 la Academia comenzó la edición de las obras completas de Cauchy. Falta el volumen XV de la segunda serie. No se sabe si se publicó finalmente toda o si está incompleta. Parece ser que el volumen que falta pudiera estar reservado para las memorias sueltas, entre las que están algunos de los trabajos más importantes de Cauchy. Afortunadamente una de ellas se imprimió separadamente.

La publicación por la Academia de los trabajos de Cauchy no contiene anécdotas. Se ordenaron los trabajos de acuerdo con el lugar donde se publicaron. La primera serie contiene las publicaciones de la Academia, la segunda serie el resto. Esto hace de la publicación un poco engorrosa. No hay comentarios ni referencias ni están corregidas las erratas de imprenta. Algunos trabajos se imprimieron dos veces. En otros casos, sin embargo, estas repeticiones se eludieron. Estas críticas no quieren quitar el valor tremendo de la publicación de la Academia.

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.^{re} PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.° 7.

1821.

Un importante trabajo bibliográfico sobre Cauchy fue hecho por B. Boncompagni.

Desde la biografía de Valson y los dos bosquejos de Biot y Bertrand no se ha hecho ninguna nueva investigación biográfica sobre Cauchy, exceptuando la de Terracini.

El trabajo de Valson es bastante poco satisfactorio pues en muchos casos él no entendía las matemáticas de Cauchy, por ejemplo la definición de residuo la utilizaba de forma equivocada. Lamentablemente, nadie ha realizado ningún estudio global sobre Cauchy. Existen, sin embargo, algunas investigaciones históricas sobre áreas concretas de las matemáticas que dedican algún espacio a Cauchy. Casorati sobre funciones complejas, Verdet sobre óptica, Studnicka sobre determinantes, Todhunter sobre elasticidad, Brill y Noether sobre funciones complejas, Stäckel y Jourdain sobre funciones complejas, Burkhard sobre varios tópicos, Miller sobre teoría de grupos, Jourdain sobre cálculo, Love sobre elasticidad, Lamb sobre hidrodinámica, Whittaker sobre óptica, Carrucio sobre funciones complejas, Courant y Hilbert sobre ecuaciones diferenciales, Truesdell y Toupin sobre elasticidad. [Véase 21].

Es difícil tener un conocimiento tan amplio de materias como lo tuvo Cauchy y por ello es difícil evaluar su obra exactamente como se merece.

Cálculo

El clásico *Cours d'analyse* (1821) es uno de los libros de Cauchy de Cálculo que impresionaron profundamente a sus contemporáneos. N.H. Abel dijo de él: "Un trabajo excelente que debe ser leído por todos los analistas que aman el rigor de las matemáticas". En la introducción el mismo Cauchy dice: "En cuanto a los métodos he intentado utilizarlos con el mayor rigor posible que requiere la geometría y nunca teniendo en cuenta los argumentos tomados de la generalidad del álgebra".

Cauchy no necesitaba ninguna metafísica del cálculo. Rechazaba la generalidad del álgebra que asumía que lo que era válido para números reales lo era para los números complejos, que lo que es cierto para las magnitudes finitas lo es para las infinitesimales, que lo que es cierto para las series convergentes lo es para las divergentes. Esto parece trivial hoy, pero fue una idea revolucionaria en su tiempo.

Cauchy rehusó hablar sobre la suma de series infinitas excepto en el caso que fueran convergentes y fue él quien definió por primera vez la convergencia ordinaria y absoluta de las series, y los límites de sucesiones y funciones. El descubrió y formuló *criterios de convergencia*: el principio de Cauchy de $s_{m+n} - s_n$ tendiendo a cero, el criterio de la raíz usando el límite superior de $\sqrt[n]{a_n}$, el criterio del cociente sobre a_{n+1}/a_n , el criterio integral. Definió el límite superior e inferior, fue el primero en demostrar la convergencia de $(1+1/n)^n$ y también el primero en utilizar el símbolo del límite.

Cauchy estudió la convergencia de series para las operaciones de suma y producto, y reagrupamiento. Para evitar problemas definió con mucho cuidado la convergencia de las series dobles. No es raro en sus trabajos el cálculo del radio de convergencia de las series de potencias. Mediante el famoso ejemplo de exp $(-x^{-2})$ advirtió del peligro de usar las series de Taylor sin cuidado. Probó el teorema de Lagrange con su resto, primero por cálculo integral y más tarde mediante un teorema generalizado del valor medio. En la primera demostración usó la expresión integral del resto que está relacionada con su famosa fórmula

$$\int^{t} \underset{n}{\cdots} \int^{t} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int^{t} (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau.$$

El celebrado *calcul des limites* (1831-32) es un método importante con series de potencias que aparece de la multiplicación, inversión, sustitución y en la resolución de ecuaciones diferenciales, que de una manera estándar reduce las cuestiones de convergencia a las de las series geométricas.

Cauchy inventó nuestra noción de continuidad y probó que una función continua tiene un cero entre argumentos cuyos valores son de distinto signo, teorema también probado por Bolzano. Y también consideró funciones multiformes. En contra de Lagrange una y otra vez daba importancia al límite origen del cociente diferencial. Dio la primera definición rigurosa de integral definida como límite de sumas y definió las integrales impropias, el bien conocido concepto de valor principal de una integral con integrando sigular, y consideró integrales de funciones infinitamente grandes sobre caminos infinitamente pequeños acercándose al concepto de δ - función.

Cauchy hizo mucho uso de los factores discontinuos y de la transformación de Fourier. También inventó lo que hoy llamamos jacobiano, aunque su definición se limitaba a dos y tres dimensiones.

Dio una demostración del teorema fundamental del álgebra utilizando la técnica del valor absoluto de una función analítica. Sus investigaciones (1813, publicadas en 1815) sobre el número de raíces reales sólo fueron superadas por Sturm en 1829. En 1831 expresó el número de raíces complejas de $f(z)$ en un dominio mediante la fórmula del residuo logarítmico, haciendo notar que la misma expresión da el número de veces que $\mathrm{Re} f(z) / \mathrm{Im} f(z)$ pasa de $-\infty$ a ∞ a lo largo de una curva cerrada, en otras palabras, el número de vueltas que da la imagen de f alrededor de cero. Esto proporcionó una nueva demostración del teorema fundamental del álgebra, semejante a la de Gauss.

En matemáticas Cauchy nunca fue dogmático. Aunque insistía sobre el límite origen del cociente diferencial, él nunca rechazó la formal aproximación, que él llamó simbólica. En sentido amplio usó la aproximación formal a las ecuaciones diferenciales y en diferencias. La verdad es que Cauchy fue más flexible que dogmático pues en varias ocasiones trabajó en contra de sus propios criterios. Trabajó con series, transformadas de Fourier, integrales impropias y múltiples como si los principios de rigor que él mismo había fundado no existiesen. Desde luego, es bien conocido que él creía que la suma de una serie convergente de funciones continuas era continua. Abel dio un contraejemplo, y es claro que Cauchy conocía las dificultades que existían. Es menos conocido que Cauchy llegó a formular rigurosamente tal cuestión para la convergencia uniforme. Sin embargo, no se dio cuenta de la importancia que tenía la convergencia uniforme.

Probó que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n} \right)^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n\,!}$$

mediante un método muy conocido pero no justificado de permutación de límites. Su demostración de que $\lim_{x\to\infty} (f(x+1)-f(x)) = \alpha$ implica $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = \alpha$ es un modelo y el primer ejemplo donde aparece ε. Es probablemente el comienzo de un método que se ha reafirmado después de Cauchy.

Funciones complejas.

Los descubrimientos más importantes ligados al nombre de Cauchy en las matemáticas puras y aplicadas son sin duda alguna sus teoremas fundamentales sobre funciones de variable compleja.

Funciones complejas particulares habían sido estudiadas por Euler. En hidrodinámica D'Alembert había estudiado lo que hoy se llaman ecuaciones de Cauchy-Riemann y lo había hecho mediante funciones complejas. A comienzos del siglo XIX los .números complejos no eran aceptados de forma unánime y las funciones multiformes, como la función logaritmo, producían grandes discusiones. La interpretación geométrica, aunque conocida por algunos, fue dada a conocer al gran público por Gauss en 1830. Es claro que era antes conocida por los matemáticos que la interpretaban las funciones complejas como pares de funciones reales. La demostración de Gauss del teorema fundamental del álgebra, aunque interpretado en el campo real, presupone algunos hechos de la teoría de funciones complejas. Las ideas más atrevidas fueron dadas por Euler y Laplace al trasladar caminos del campo real al complejo.

La primera teoría intelegible sobre los números complejos se halla en el *Cours d'analyse* de 1821. En él se justifica las operaciones algebraicas y pasos al límite con números complejos, considerando valores absolutos, y se define la continuidad de las funciones complejas. Cauchy no dio clases sobre integración compleja, aunque esta materia había sido objeto de la *memoire* presentada a la Academia Francesa en 1814 y publicada en 1825. En su introducción se aclara que esa memoria se escribió para justificar los fructíferos métodos de Euler y Laplace. No obstante, aún se sentía Cauchy incómodo en el campo complejo. Interpretaba las funciones complejas como pares de funciones reales de dos variables con las condiciones de Cauchy-Riemann. Esto es más esquivar el método complejo que abordarlo. Gracias a las objeciones críticas de Legendre, Cauchy restauró la visión compleja en notas a pie de página en sus publicaciones de 1825, aunque no llegó a admitir caminos de integración complejos. El problema que Cauchy consideraba en su memoria es poco claro en la actualidad. El consideraba una función diferenciable $f = u + iv$ de la variable compleja $z = x+iy$ y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann formaba la integral doble

$$\iint u_x \, dxdy = \iint v_y \, dxdy$$

sobre el rectángulo $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$. Realizando las integraciones obtuvo la igualdad fundamental

$$(1) \qquad \int_{y_0}^{y_1} (u\,(x_1,y) - u\,(x_0\,,\,y))\,dy = \int_{x_0}^{x_1} (v\,(x,y_1) - v\,(x,y_0))\,dx.$$

Usando la otra ecuación diferencial de Cauchy Riemann obtuvo la otra igualdad fundamental, que juntas dan

$$(2) \qquad i\int_{y_0}^{y_1} (f\,(x_1,\,y) - f\,(x_0\,,\,y))\,dy = \int_{x_0}^{x_1} (f\,(x,y_1) - f\,(x,y_0))\,dx,$$

que es el teorema de la integral de Cauchy para un circuito rectangular si se coloca la i entre la d y la y.

Por supuesto se supone en esta demostración la regularidad. Cauchy había advertido que las fórmulas anteriores podían caer en defecto si existe una singularidad en el rectángulo. Esta observación fue hecha incluso al comienzo del teorema. Trató de calcular la diferencia entre los dos miembros de (2) pero una exposición muy confusa le hizo decir que la aclararía en otro trabajo.

Sea $a+ib$ la singularidad (simple polar). Entonces las integrales (1) y (2) deben ser interpretadas por sus valores principales. Esto significa que el primer miembro de (1) es el límite de la integral sobre los rectángulos $\{x_0 \leq x \leq x_1\,,\, y_0 \leq y \leq b - \varepsilon\}$ y $\{x_0 \leq x \leq x_1\,,\, b + \varepsilon \leq y \leq y_1\}$ y la diferencia entre ambos miembros de (1) y (2) es el límite de la integral sobre $\{x_0 \leq x \leq x_1\,,\, b-\varepsilon \leq y \leq b+\varepsilon\}$. En otras palabras, es

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0}^{x_1} (f\,(\,x,\, b+\varepsilon) - f\,(\,x, b-\varepsilon))\,dx,$$

donde x_0 y x_1 pueden ser sustituidos por otros valores $a-\delta$, $a+\delta$ más próximos a a. Esta expresión es lo que llama Cauchy una integral singular. En el trabajo de 1814 permite que la singularidad caiga en el borde del rectángulo.

Desde luego, si existe una singularidad $a+ib$ en el rectángulo, de acuerdo con el teorema del residuo la diferencia de los dos miembros de

(2) debe ser $2\pi i$-veces el coeficiente de $(z-(a+ib))^{-1}$ en la serie de Laurent de $f(z)$. Esto todavía no era conocido por Cauchy en su trabajo de 1814. El consideró solamente singularidades polares simples, tomando $f(z)$ como una fracción $g(z)/h(z)$ y probando que la diferencia es igual a

$$(3) \qquad 2\pi i \frac{g(a+ib)}{h'(a+ib)} .$$

En 1825 en sus notas a pie de página da la expresión

$$(4) \qquad 2\pi i \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon f((a+ib)+\varepsilon)$$

que ya había aparecido en 1823.

El resultado general más importante es el cálculo de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz \quad \text{(sobre el eje real)}$$

como la suma de las expresiones (3) del semiplano supeiior, las singularidades sobre el eje real son contadas como la mitad de estas sumas. Las condiciones en las que piensa que se puede pasar del rectángulo como camino de integración al eje real no las formula claramente. Parece que requiere que f(z) se anule en el infinito lo cual es obviamente demasiado. En cualquier caso aplica el resultado a funciones con una infinidád de polos, y este requerimiento no es coherente. En 1826 dio condiciones más sofisticadas pero aún excesivamente exigentes, y además al final del trabajo vuelve a las condiciones antiguas. En 1827 descubrió "buenas condiciones": $zf(z)$ es acotada sobre una apropiada sucesión de círculos con centros fijos y radios tendiendo a infinito.

Incluso en la forma publicada en 1814, el teorema de la integral de Cauchy era ya un instrumento muy potente, y por este método se podían calcular gran número de integrales definidas. El método por integrales dobles parece un poco extraño, pero en aquél tiempo debió de parecer natural, de hecho Gauss usó el mismo tipo de integrales para tratar singularidades en su tercera demostración del teorema fundamental del álgebra (1816).

La integración propiamente compleja no aparece en la memoria de 1814, e incluso las reflexiones de Poisson en 1823 son rechazadas por Cauchy. Pero como fueron un aguijón, él y no Poisson siguió adelante con la idea. En una memoria suelta de 1825 hizo una gran avance hacia lo que es el teorema de la integral de Cauchy. Definió integrales sobre caminos arbitrarios en el campo complejo, y a través de las ecuaciones de Cauchy-Riemann dedujo mediante el cálculo variacional el resultado de que en un dominio de regularidad de $f(z)$ la integral sólo depende de los extremos del camino. Curiosamente no introdujo caminos cerrados. Más tarde, permitió que el camino atravesara una singularidad simple polar a, en cuyo caso se debía interpretar mediante su valor principal. Desde luego, entonces la variación sería distinta de cero e igual a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon f\,(a+\varepsilon)\, \pi i.$$

En el caso de una singularidad múltiple polar a, las integrales sobre los caminos a ambos lados de a difieren en

$$\frac{1}{(m-1)\,!} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d^{\,m-1} \varepsilon^m f\,(a+\varepsilon)}{d\varepsilon^{m-1}}\, 2\pi\, i\,,$$

una fórmula dada en 1823 por lo menos. (Hacemos notar que en ese momento Cauchy desconocía los desarrollos en serie de potencias de las funciones analíticas). Lo anterior lleva al teorema del residuo para polos, y fue extendido a singularidades generales aisladas por L.A. Laurent en 1843.

Es un hecho histórico que permitiendo singularidades simples sobre el camino de integración, Cauchy usaba su teorema del residuo como un instrumento mucho más potente que la presentada generalmente en los libros de texto actuales con su formulación restringida.

La importante memoria de 1825 ni se usó ni se mencionó hasta 1851, una circunstancia muy extraña y dificil de explicar. ¿Es que Cauchy no creía en el método variacional para la demostración? ¿Estaba preocupado por la condición (innecesaria) que había impuesto a los caminos, limitándose a un rectángulo dado? ¿Es que Cauchy no se había dado cuenta de que podía haber formulado su teorema para caminos cerrados que tanto necesitaba? En cualquier caso durante veinticinco años se limitó a caminos rectangulares y coronas circulares, basándose más en la anticuada memoria de 1814 que en la de 1825.

El círculo como camino de integración y la fórmula de la integral de Cauchy para este caso particular ya había sido usada de alguna forma en 1822 y 1823, e incluso en 1819. La bien conocida expresión integral para la enésima derivada también aparece, pero desde luego en la forma

$$f^{\,(n)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (re^{\,i\theta})^{-n} f\,(re^{\,i\theta})\; d\,\theta,$$

ya que los caminos de integración compleja eran eludidos.

En 1840 (incluso antes hacia 1831) tal expresión se podía considerar como un promedio sobre el círculo unidad, y calculada como límite de promedios sobre los polígonos regulares.

Aplicaciones indirectas de la definición de Cauchy de la integral se usaron frecuentemente en los años siguientes. En los *Exercices* de 1826-27 muchos de sus trabajos fueron dedicados al cálculo de residuos. El residuo de *f(z)* en a se define de la forma habitual para las singularidades polares, y el residuo en un cierto dominio, como la suma de los residuos en los diferentes puntos del dominio. Demostró gran número de teoremas sobre residuos sin recurrir a la expresión de la integral, y parece que frecuentemente Cauchy se olvidaba de la fórmula.

Por medio de los residuos Cauchy llegó a desarrollar $f(z)$ en fracciones simples en la forma

$$f(z) = \sum \frac{\alpha_\nu}{z - a_\nu}$$

en el caso que dicha función tenga polos simples. Originalmente la condición en el infinito para la que se suponía válida era mucho más exigente. Y seguramente no lo era cuando Cauchy para condiciones más amplias lo aplicó al desarrollo en fracciones simples. Es extraño que en este caso Cauchy no llegara a la "condición buena", y es más extraño aún que en 1843 requiriera la continuidad en el infinito que es una condición muy fuerte.

Desde el desarrollo en fracciones simples de funciones meromorfas hay sólo un paso a la representación del producto de funciones enteras y esto lo usó Cauchy en 1829-30. En casos particulares, Cauchy tuvo en cuenta el factor exponencial, necesario en el producto de factores lineales. El problema general, sin embargo, no se resolvió hasta Weierstrass. Polos y ceros en este tipo de investigaciones solían ser simples. Cauchy estudió el caso de que fueran múltiples, pero sin gran éxito.

Cauchy usó los residuos para muchas cuestiones. Expresó el número de ceros de una función en un dominio mediante el residuo logarítmico y de forma más general para la suma sobre los ceros z_i de $f(z)$ así

$$\sum \varphi(z_i) = \text{suma de los residuos de } \frac{\varphi(z) f'(z)}{f(z)}$$

que tuvo muchas aplicaciones. Era muy consciente de la importancia que desempeñaba la ordenación de tales sumas infinitas. En 1827 Cauchy obtuvo la fórmula de inversión de Fourier en este contexto.

En 1827 Cauchy desarrolló un método para comprobar la convergencia de una especial serie de potencias para funciones implícitas, la llamada serie de Lagrange de la mecánica celeste. Es el método que en el caso general llega al desarrollo en serie de potencias: una función en el campo complejo con derivada continua puede desarrollarse en una serie de potencias convergente en un círculo tal que su frontera contiene el punto singular más próximo al centro de él, $z = 0$. Esto lo demostró en las memorias sueltas de Turín de 1831-32. Un resumen de estos trabajos fue publicado en 1837 como notas en *Comptes rendus* y el trabajo mismo y una parte esencial de él en 1840-41. Aquí Cauchy deduce de una forma insuperable su fórmula de la integral por medio de

$$\int \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\, d\zeta = 0\ ,$$

a partir de su teorema de la integral, pero formulada para caminos circulares, aunque también se aplica a circuitos cualesquiera. El desarrollo del integrando de

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta = f(z)$$

en potencias de z, en un entorno de 0, permite obtener el desarrollo en serie de potencias de $f(z)$. Cauchy también halla una expresión integral del resto y las desigualdades

$$|a_n| \leq \max_{|z|=r} f(z)| / r^n$$

para los coeficientes, que se convertiría en la piedra angular del potente cálculo de límites.

Todo lo anterior resume la tremenda producción de Cauchy en sólo este área de trabajo. Todo es inspirador pero de alguna manera decepcionante. Parece que Cauchy no tenía una visión general clara de su trabajo. Las demostraciones son innecesariamente complicadas y trabajos antiguos son mejorados por otros más modernos, y repetidamente mencionados y usados. Muchas veces parece que tuviese una venda en sus ojos; por ejemplo, no se dio cuenta de que como consecuencia de sus resultados se deduce que una función regular acotada en todo el plano debe ser una constante hasta que Liouville descubrió este resultado para el caso de las funciones doblemente periódicas, por esta razón se le llama impropiamente teorema de Liouville. Entonces, en vez de usar el teorema de los coeficientes de las series de potencias, utilizó desarrollos en fracciones simples que no es el método apropiado por la condición exigida en el ∞ .

Cauchy tampoco descubrió el teorema de Laurent ni el teorema para una función con un conjunto de acumulación (no vacío) de ceros sobre un dominio regular, que él conocía sólo de forma burda. Lo más decepcionante de todo es que no supo ver la importancia trascendental que tiene su memoria de 1825. Se limitó simplemente a caminos de integración rectangulares y circulares y a un caso particular de su fórmula integral.

A los grandes hombres se les exige mucho, y Cauchy no debía ser una excepción. Esto explica muchas de las críticas a Cauchy.

Una sucesión de notas de *Comptes rendus* de 1846 marca un notable progreso. Cauchy introduce por fín la integración sobre caminos cerrados cualesquiera, aunque no como una consecuencia inmediata de su memoria de 1825.

Un paso más importante fue su estudio y conocimiento de las funciones analíticas multiformes. La historia de este conocimiento es paradigmático de lo que ocurre frecuentemente en las matemáticas: una noción intuitiva que es fructífera pero que no encaja en los requerimientos matemáticos de rigor se usa primero de una forma ingenua y no crítica; en la siguiente fase se ignora u olvida, y los resultados a los que daba lugar se obtienen si es necesario mediante molestos rodeos; finalmente, es reinterpretada para salvar tanto la concepción como el rigor matemático. Cauchy llegó a la fase crítica con las funciones multiformes. Desde 1821 trató las funciones multiformes con remedios drásticos: si estaba ramificada en el origen la admitía en el semiplano superior nada más. Afortunadamente, a menudo se olvidaba de su fuerte requerimiento con el que si hubiese seguido hubiera tenido serios problemas como le ocurrió en 1844; de forma extraña escribió un trabajo totalmente confuso cuando ya había tomado el camino para alejarse de tan fuerte condición. En efecto, mediante un corte en el plano por el eje positivo de abcisas definió el dominio de las funciones ramificadas en el origen; usó incluso caminos de integración en él formados por $|z| = r$ en el sentido positivo, $r \leq z \leq R$ en el sentido positivo, $|z| = R$ en el sentido negativo, $r \leq z \leq R$ en el sentido negativo, de forma que los dos trozos rectilineos daban lugar a una función salto. Tales caminos se habían obtenido anteriormente de una forma natural por una aplicación de caminos rectangulares.

El progreso que Cauchy consiguió en 1846 consistió en restaurar el concepto intuitivo de función multiforme. Tales funciones pudieron entonces ser estudiadas a lo largo de caminos de integración arbitrarios, que se pueden considerar cerrados sólo si ambas, la variable y la función, vuelven a los valores con que comenzaron (desde luego esto no es totalmente correcto). La integración sobre tales caminos cerrados da lugar a los "índices de periodicidad" que ya no son debidas a los residuos.

Esto es una resurrección de la antigua idea de función multiforme con todas sus dificultades. En 1851, el año de la celebrada tesis de Riemann, después de las investigaciones de Puiseux sobre ramificaciones, que también dependen de los trabajos de Cauchy, éste llegó a algunos refinamientos. Mediante líneas uniendo singularidades y, como en su trabajo de 1844, propuso calcular los índices de periodicidad por medio de las funciones de salto a lo largo de tales cortes. Esto es demasiado tosco y le llevó a cometer errores sobre el número de periodos linealmente independientes. La reinterpretación correcta de las funciones multiformes es por medio de las superficies de Riemann.

En cualquier caso el progreso realizado por Cauchy en 1846 fue trascendental. Sus trabajos sobre funciones elípticas e hiperelípticas arrojaron luz sobre el conocimiento de todas las funciones. A pesar de las investigaciones de Riemann esto parecía suficiente para aquel tiempo. Así, Briot y Boucquet, cuando prepararon la segunda edición de su obra clásica, no vieron ninguna ventaja en usar las superficies de Riemann y todavía presentaron la teoría de Cauchy en la forma antigua.

La obra de Cauchy sobre funciones complejas es muy extensa. El podía haber escrito un libro sobre este tema pero nunca lo hizo. Los primeros que hicieron esta labor fueron Briot y Boucquet. Pero hay que tener en cuenta que hasta las superficies de Riemann, con la única excepción del teorema de Laurent y del teorema de acumulación de ceros, todo lo demás fundamental fue obra de Cauchy. También realizó un trabajo no tan fundamental como la generalización del teorema de Abel, investigando "factoriales geométricos".

Teoría de errores

Cauchy realizó tres trabajos sobre la teoría de errores, que presentó lógicamente relacionados, aunque para entenderlos hay que estudiarlos por separado.

El primero parece realizado en 1814, aunque no se publicó hasta 1824 y 1831. Laplace había tratado de ajustar un conjunto de n datos de observación (x_i, y_i) por una relación lineal $y = ax+b$. Antes de Laplace se procedía desplazando la media

$$\left(\sum x_i / n \, , \, \sum y_i / n \right)$$

al origen para homogeneizar el problema, y después estimar a por

$$\sum \delta_i y_i / \sum \delta_i x_i \, , \quad \text{donde } \delta_i = x_i / | x_i | \, .$$

Laplace propuso la alección de a y b que hiciese mínimo el máximo error $| y_i - ax_i - b |$ o de forma alternativa que hiciese mínima la suma de los errores absolutos. Para hacer esto Laplace desarrolló un bello método que es el primer modelo de programación lineal. Cauchy, siguiendo una sugerencia de Laplace, extendió su método ajustando ternas de observaciones (x_i, y_i, z_i) a la relación $z = ax+by+c$. Donde Laplace había razonado por análisis puro, Cauchy presentó una demostración en el marco de la geometría, lo que demuestra su afición a ella.

En aquel tiempo Cauchy consideró el problema de Laplace, ajustando por mínimos cuadrados, lo cual se había abandonado. Pero, en 1837, intentó defender el método pre-Laplaciano. Postuló el error máximo (entre los $| y_i - ax_i |$) a ser "mínimo bajo las peores condiciones". No está claro lo que esto significaba, aunque es un principio tan vago que es suficiente para justificar los métodos más antiguos.

De hecho Cauchy trabajaba en un problema diferente: ajustar sistemas de datos observados a polinomios (algebraicos, trigonométricos o de otro tipo)

$$u = ax+by+cz + \ldots$$

donde el número de términos debía depender de la bondad de ajustarlos a la que se llega en el curso del cálculo. Lo que Cauchy realiza no es más que una eliminación sistemática de *a,b,c,* ... En 1853, cuando Cauchy volvió a prestar atención a este método fue atacado por Bienaymé. Cauchy entonces hizo un extraño quiebro. Lo que parece un argumento a favor de su segundo método es un tercer intento no relacionado con los dos primeros. Cauchy suponía que los errores

$$\varepsilon_i = u_i - ax_i - by_i - cz_i - \ldots$$

tenía una frecuencia de probabilidad f. Los coeficientes k_i mediante los que se elimina a de $\sum k_i \varepsilon_i = 0$, se deben elegir para maximizar la probabilidad de $\sum k_i \varepsilon_i$ en un intervalo dado $(-\rho, \rho)$. Este es un postulado poco aceptable, puesto que generalmente los k_i resultantes dependen de la elección de ρ. El remedio dado por Cauchy es postular que f debe de estar tan bien adaptada que k_i no depende de ρ. Esta es una hipótesis muy extraña, puesto que f no depende del observador sino de la naturaleza; pero sí se obtiene un resultado bonito: las únicas f que satisfacen estos requerimientos son aquellas que tienen una transformada de Fourier φ tal que

$$\varphi(\xi) = \exp(-\alpha \xi^N)$$

donde α y N son constantes. Para N=1 éstas son las célebres estocásticas de Cauchy con la frecuencia de probabilidad

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \gamma^2 \xi^2} .$$

Su comportamiento paradógico fue notado por Bienaymé al no mejorar con la media, y lo utilizó como argumento contra Cauchy.

Cauchy probó también el teorema central del límite por medio de la transformación de Fourier en condiciones más generales que las de Laplace.

Algebra

Cauchy publicó en 1812 el primer tratado accesible sobre determinantes; que contiene: el teorema del producto, simultáneamente descubierto por J. Binet; la inversa de una matriz y los teoremas sobre determinantes formados por subdeterminantes. Conocía los jacobianos de dimensión 3 y, en 1829, simultáneamente con Jacobi publicó la transformación ortogonal de una forma cuadrática sobre los ejes principales, aunque esto lo debió de descubrir mucho antes en sus trabajos sobre elasticidad. Por su tratado el concepto de determinante se hizo famoso y es raro que él utilizara después el nombre de resultante.

Cauchy dio la primera teoría sistemática de números complejos. Más tarde identificó la interpretación geométrica con la algebraica mediante los polinomios en x módulo x^2+1.

Uno de los primeros trabajos de Cauchy generaliza un teorema de Ruffini. El prueba que si mediante las permutaciones de sus n variables un polinomio toma más de dos valores, entonces él toma al menos p valores, donde p es el mayor primo en n; en otras palabras, no hay subgrupos del grupo simétrico de n permutaciones con un índice i tal que $2< i < p$. Berrtrand reemplazó p por el mismo n para $n > 4$, aunque para probarlo tuvo que utilizar un teorema de la teoría de números (postulado de Bertrand) probado más tarde por P.L. Chebyschev. Cauchy probó posteriormente el resultado de Bertrand sin esta suposición. Su método dio origen al cálculo de sustituciones, el método de grupos de permutaciones. Conceptos de la teoría de grupos, tales como el orden de un elemento, la noción de subgrupo y la conjugación son la base de estos trabajos. También es fundamental el teorema de Cauchy para grupos finitos: Para cualquier primo p que divida al orden hay un elemento de orden p. Este teorema fue notablemente mejorado por Sylow.

En 1812 Cauchy abordó el teorema de Fermat sobre números poligonales, estableciendo que todo número entero positivo es suma de n números n-gonales. En aquel tiempo se conocían demostraciones para $n =$ 3,4. Cauchy lo probó de forma general con la novedad de que todos excepto cuatro de los sumandos pueden ser tomados iguales a 0 ó 1. La demostración de Cauchy se basa en una investigación de las soluciones simultáneas de

$$\sum x_i^2 = n\ , \qquad \sum x_i = m\ .$$

Cauchy contribuyó a muchas partes de la teoría de números e intentó demostrar el último teorema de Fermat.

Geometría

Su contribución más importante es su demostración de que, salvo congruencias, un poliedro convexo está determinado por sus caras. Su geometría diferencial elemental de 1826-27 influyó de forma importante en varias partes de las matemáticas. Desde luego su teoría de elasticidad contiene mucha geometría diferencial de aplicaciones y de campos vectoriales y tensoriales, y las nociones de gradiente, divergencia, rotacional y su invarianza ortogonal.

Ecuaciones diferenciales

Lo que es fundamentalmente nuevo en las investigaciones de Cauchy sobre ecuaciones diferenciales se puede expresar en dos ideas:

1) Que la existencia de las soluciones no es propiamente evidente, sino que ha de ser probada incluso en el caso que no puedan expresarse en forma algorítmica.

2) Que la unicidad se debe lograr mediante las condiciones iniciales (o de contorno) y no por la accidental constante de integración.

Así surge el famoso problema de Cauchy en ecuaciones en derivadas parciales, que se le debió de ocurrir en sus primeras investigaciones sobre ondas en líquidos (1815). La dificultad de este problema explica que no se hubiera planteado antes.

Para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias, Cauchy utilizó el método de aproximación de Cauchy-Lipschitz, aunque su demostración no se publicó hasta 1840. El celebrado cálculo de límites con datos analíticos dio paso a las soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Cauchy descubrió en 1819 simultáneamente con J.F. Pfaff el método de las características para las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Su método era mejor y más simple que el de Pfaff, pero parecía artificial. El lenguaje geométrico con el que hoy se explica se debe a Lie. Por supuesto Cauchy aplicó también el cálculo de límites a las ecuaciones en derivadas parciales. Pero no está claro qué clase de ecuaciones tenía Cauchy en mente. En 1875 Sonja Kowalewska formuló y resolvió el problema mediante un teorema de existencia que usualmente aparece con el nombre de Cauchy-Kowalewska.

Otro método para resolver un sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n)$$

fue por medio de exp $t\,Z$ con

$$Z = \sum X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y por una análoga expresión si X_i depende de t. La convergencia de tales series se obtiene también por el cálculo de límites.

La parte más importante de las investigaciones de Cauchy en ecuaciones diferenciales está relacionada con las ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes que él encontró en hidrodinámica, elasticidad y óptica. La herramienta más sobresaliente en su investigación fue la transformación de Fourier. La utilizó por primera vez en 1815 en su trabajo sobre ondas en líquidos, y en 1817-18. El descubrimiento de Fourier aunque data de 1807 y 1811 fue publicado en 1824-26 y, por tanto, la reclamación de Cauchy sobre la paternidad de la fórmula de la inversión es muy razonable. Pero es de señalar que reconoció la prioridad de Fourier llamándola con el nombre de éste. Cauchy utilizó la transformación de Fourier con más habilidad aún que éste e incluso que Poisson, y fue el primero en formular el teorema de inversión

La transformación de Fourier no ha vuelto a ser utilizada hasta hace muy poco cuando se fundamentaron las integrales de Fourier con todo rigor, pero había pasado tanto tiempo desde los trabajos pioneros de Cauchy que ya se habían olvidado.

Desde 1821 Cauchy consideró ecuaciones en derivadas parciales de la forma siguiente

$$(5) \qquad F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right) w = 0$$

donde F es un polinomio en las $n+1$ variables $u_1, \ldots, u_n, s$. Tales ecuaciones tienen la solución exponencial

$$\exp\left(\sum u_i x_i + st\right)$$

para todo sistema de u_i, s que cumpla

$$(6) \qquad F(u_1, \ldots, u_n, s) = 0.$$

El método de la transformación de Fourier permite obtener la solución general mediante la superposición de tales soluciones exponenciales con $u_1, \ldots, u_n, s$ imaginarios. Para las ecuaciones de ondas esto significa soluciones de ondas por la superposición de ondas planas armónicas. En los trabajos de 1821 y 1823 un método de interpolación sirvió para satisfacer las condiciones iniciales para $t = 0$. Otra posibilidad es mediante soluciones procedentes de perturbaciones locales (ondas esféricas para especiales condiciones) que dan lugar a soluciones generales por superposición. Esta idea está presente en los trabajos sobre ondas de 1815, y está dejada a un lado pero no ausente en 1821 y 1823.

En 1826 introduce el cálculo de residuos como una nueva herramienta para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. La solución general de

$$F(d/dt)\, w = 0$$

se expresa por la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi(\zeta) e^{\zeta t}}{F(\zeta)}\, d\zeta$$

alrededor de las raíces de F, con un polinomio arbitrario $\Phi(\zeta)$. Varias veces Cauchy evita distinciones casuísticas respecto a las raíces múltiples de F.

En 1830, cuando Cauchy se interesó por la óptica, esta fórmula se aplicó a ecuaciones en derivadas parciales, que significaba que (5) y (6) eran resueltas de forma elegante y explícita respecto de s y t, mientras que el método de la transformación de Fourier lo hacía respecto de $x_1, \ldots, x_n$.

alrededor de las raíces de F, con un polinomio arbitrario $\Phi(\zeta)$. Varias veces Cauchy evita distinciones casuísticas respecto a las raíces múltiples de F.

En 1830, cuando Cauchy se interesó por la óptica, esta fórmula se aplicó a ecuaciones en derivadas parciales, que significaba que (5) y (6) eran resueltas de forma elegante y explícita respecto de s y t, mientras que el método de la transformación de Fourier lo hacía respecto de $x_1, \ldots, x_n$. La fórmula que se obtiene en coordenadas polares no está resuelta y su demostración no es accesible porque la memoria de la cual el trabajo de 1830 es un resumen parece que no fue nunca publicado o se perdió. La construcción de frentes de ondas se hacía por argumentos intuitivos, basados en el principio de Huygens, aunque él mismo no demostró ni dijo nada. De acuerdo con este mismo principio Cauchy construyó soluciones de rayos como una superposición de perturbaciones en planos superpuestos que podían inclinarse ligeramente unos sobre otros, como Cauchy decía.

Desde junio de 1830 a marzo de 1842 hizo varios trabajos en óptica en ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes. Este trabajo fue sugerido por la intervención de P.H. Blanchet. Comienza con un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, en notación moderna

$$(7) \qquad \frac{dx}{dt} = A\,x\,,$$

donde x es un n-vector y A es una aplicación lineal. Se considera

$$S(s) = \det(A - s)$$

y se define la función principal θ como la solución de

$$S\left(\frac{d}{dt}\right)\theta = 0\,, \quad \theta^{(i)}(0) = 0 \; para \; i \leq n-2\,,$$

$$\theta^{(n-1)}(0) = 1\,,$$

que se obtiene como una integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Phi(s)\, e^{st}}{S(s)}\, ds$$

alrededor de las raíces de S. A partir de θ la solución de (7) con el valor inicial $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se obtiene elegantemente mediante el uso de

$$Q(s) = \det(A - s)\,.\,(A - s)^{-1}\,,$$

y aplicando $Q(d/dt)$ al vector

$$(-1)^{n-1}(\alpha_1\theta,\ldots,\alpha_n\theta).$$

Este método se extiende a ecuaciones en derivadas parciales resolviendo (5) para las condiciones iniciales

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^i w = 0 \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-2 ,$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} w = 1 .$$

La fórmula obtenida es mucho más simple que la de 1830, particularmente si F es homogénea. Si además el valor inicial de $(d/dt)^{n-1}w$ es una función H de $\sigma = \Sigma u_i x_i$, se obtiene suponiendo primeramente H lineal y usando después la homogeneidad de F,

$$w(x,t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{1-n} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{s^{n-1}}{F(u,s)} H(\sigma + st)\, ds ,$$

donde $(d/dt)^{-1}$ es la integral de 0 a t y $(d/dt)^{-n} = ((d/dt)^{-1})^n$.

Una fórmula análoga se obtiene si los datos iniciales vienen dados por una función cuadrática de x como, por ejemplo, $r = (\Sigma x_i^2)^{1/2}$.

El método directo de 1830 se aplica también al estudio de perturbaciones locales y frentes de ondas, con el principio de Huygens como base. Cauchy aparentemente consideraba que las perturbaciones de anchura infinitesimal permanecían infinitesimales, aunque esto se demostró falso posteriormente. Sólo con la intervención de Blanchet admitió Cauchy su error.

Es dudoso que estas investigaciones de Cauchy tuvieran una influencia inmediata.

Mecánica

Cauchy alcanzó prestigio por contribuciones a la mecánica de los cuerpos rígidos tales como el elipsoide de inercia y sus ejes principales, las superficies de los ejes de inercia de un movimiento rígido, descubiertos simultáneamente por Poinsot, y la primera prueba rigurosa de que un movimiento infinitesimal es un movimiento helicoidal.

En 1822 Cauchy anunciaba el nacimiento de la moderna teoría de la elasticidad así:

"Las presentes investigaciones han sido sugeridas por un trabajo de M. Navier del 14 de agosto de 1820. Para establecer la ecuación del equilibrio de un plano elástico, el autor había considerado dos clases de fuerzas, las primeras producidas por dilatación o contracción, las otras por flexión del plano. Además, en sus investigaciones él suponía ambas perpendiculares a las líneas o caras sobre las que actuan. Vino a mi mente que ambas clases podían reducirse a una, que llamaremos tensión o presión, de la misma naturaleza que la presión hidrodinámica ejercida por un fluido sobre la superficie de un sólido. La nueva presión no tendría por qué ser perpendicular a las caras ni tener la misma dirección en cada punto ... Además, la presión o tensión ejercida sobre un plano arbitrario se descompone en magnitud y dirección en las ejercidas sobre tres planos perpendiculares. Yo adopté este punto de vista cuando Fresnel me habló de él en torno a su trabajo sobre la luz, el cual ha sido presentado parcialmente a la Academia, y me dijo que había obtenido un teorema análogo al mío ..."

Raramente una teoría matemática ha sido explicada en tan pocas palabras y sin utilización de símbolos.

Desde la ley de Hook en 1660 hasta 1821, la teoría de la elasticidad era básicamente unidimensional. La teoría de Euler de la membrana vibrante fue una de las pocas excepciones. Incluso la teoría unidimensional de la elasticidad fue una maravillosa base para el análisis de Euler de las derivadas parciales y de las ecuaciones en derivadas parciales. El trabajo de Navier (1821) sobre equilibrio y vibración de sólidos elásticos fue leído en la Academia y publicado en 1827. La investigación de Navier fue la base de la mecánica analítica aplicada a un medio molecular isotrópico que cumple la ley de Hook en dimensiones moleculares: cualquier cambio en la distancia entre dos moléculas causa una fuerza proporcional entre ellas, el factor de proporcionalidad decrece rápidamente con el crecimiento de la distancia. Cauchy conoció este trabajo de Navier. Pero no fue éste el trabajo que aludía en la anterior cita. La primera investigación de Cauchy fue independiente de la de Navier: no fue molecular sino geométrica.

Otro progreso tuvo lugar en 1821. Thomas Young hizo investigaciones sobre interferencias en 1801 que clarificaban que la luz debía ser de carácter ondulatorio en un fluido gaseoso hipotético: el éter. Consecuentemente las ondas fueron pensadas como longitudinales, como el sonido en el aire, aunque el fenómeno de la polarización apuntaba a vibraciones transversales. En 1821 Fresnel dio el gran paso de imaginar el éter con resistencia a la distorsión, como un sólido en un fluido; y maravillosamente encontró la transmisión por ondas transversales. Esto animó a Cauchy a seguir sus investigaciones.

La corta comunicación antes citada fue seguida por detallados tratados en 1827-29, pero todas las fundamentales nociones de la mecánica de medios continuos fueron clarificados en una nota de 1822: el tensor de esfuerzos (y el concepto de tensor en general), el tensor de torsión, la simetría de ambos tensores, sus ejes principales, el principio de equilibrio y la idea feliz de requerir la ley de Hooke para los principales esfuerzos y torsiones. Para los medios homogéneos esto llevaba a las ecuaciones de Navier con una constante elástica, pero independientemente de la subestructura molecular (de Navier). Pronto Cauchy introdujo la segunda constante elástica que surgió de una relación independiente entre el volumen de esfuerzo y el volumen de torsión. Esto condujo a la aceptada teoría de elasticidad en medios isótropos. Para medios anisótropos Cauchy fue inducido por la idea de Poisson a admitir una dependencia lineal general entre esfuerzos y torsiones que tenía treinta y seis parámetros. La única noción fundamental que faltaba fue el potencial elástico que permite reducir el número de parámetros a treinta y uno, que fue debido a Green (1837).

Mientras tanto, Cauchy en 1828-29 siguió las ideas moleculares de Navier y llegó a una teoría de cincuenta parámetros para medios anisótropos. Las discusiones del siglo XIX estaban en favor de la axiomática de "multiconstantes" y en contra de la teoría molecular de "rari-constanrtes", si no en contra de toda teoría molecular de elasticidad.

Cauchy aplicó la teoría general varios problemas concretos: a las láminas, a las vigas rectangulares (definitivamente resuelto por Saint Venant) y a las placas planas (en las cuales Kichhoff finalmente tuvo éxito). La aplicación que estudió Cauchy con más empeño fue la teoría elástica de la luz. El instrumento matemático de esta teoría era la teoría de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes. En la teoría física fue uno de los más grandes intentos pre-Maxwelianos necesarios antes de que los físicos se convencieran de la imposibilidad de cualquier teoría elástica de la luz.

Cauchy desarrolló tres teorías diferentes de refracción y reflexión. Los problemas para explicar la doble refracción (en los cuales tuvo bastante éxito), para ajustar las constantes elásticas a los datos observados sobre la velocidad de la luz bajo diferentes condiciones con el fin de obtener el seno de Fresnel y las leyes tangenciales de polarización para convenientes condiciones de frontera y para eliminar las vibraciones longitudinales extrañas. Cuando supuso las vibraciones transversales paralelas u ortogonales al plano de polarización (y esto lo hizo en la primera y segunda teoría, respectivamente), obtuvo extrañas relaciones entre las constantes elásticas y se vio obligado a admitir improbables e inmotivadas condiciones de frontera. Su tercera teoría, aparentemente influenciada por Green, se basó en una curiosa hipótesis de un éter con compresibilidad negativa - posteriormente llamado lábil por Lord Kelvin - lo cual suprimía las ondas longitudinales. En 1835 Cauchy se ocupó también de la dispersión. El problema era explicar la dependencia de la velocidad de la luz según la longitud de onda mediante una más refinada valoración de la estructura molecular.

Mecánica celeste

Quien no comprenda los métodos computacionales de los astrónomos antes de la llegada de los aparatos electrónicos puede dificilmente evaluar las numerosas y amplias contribuciones de Cauchy a la mecánica celeste. En los libros de astronomía es frecuentemente citado por sus contribuciones. En efecto, debe destacarse que las series que los astrónomos usan fueron estudiadas por Cauchy, probando su convergencia. También debe recordarse su contribución a la solución de la ecuación de Kepler y a los desarrollos de la función pertubatriz. La más conocida contribución de Cauchy a la astronomía (1845) es la comprobación de la complicada computación de Leverrier de la gran desigualdad en el movimiento medio del asteroide Palas por un método más simple. Para ello estudió la transición de la anomalía excéntrica a la anomalía media. El "método mixto" de Cauchy consistió en combinar integraciones racionales y numéricas y estimaciones asintóticas en términos distantes en el desarrollo de la función pertubatriz según los múltiplos de la anomalía media. Tales métodos asintóticos habían interesado a Cauchy tempranamente en 1827.

Bibliografía

1. BELHOSTE, B.: Le cours d'analyse de Cauchy á l'Ecole Polytechnique en seconde année, *Sciences et Tecniques en Perspective*, 9, 1984-1985, pp. 101-178.
2. BELHOSTE, B.: *Cauchy, un mathématicien Legitimiste au XIXe siècle.* Paris. 1985.
3. BELHOSTE, B.: *Augustin-Louis Cauchy, A Biography.* Springer.Verlag New York, 1991.
4. CALLOT, J.P.: *Histoire de l'Ecole Polytechnique,* les Presses Modernes, 1958.
5. CAUCHY, A.L.: *Oeuvres complétes,* 1st, 12 vol, 2nd ser., 14 vol, Paris, 1882-
6. CAUCHY, A.L.: *Exposé Sommaire d'une Méthode pour Déterminer a Priori le Nombre des Racines Réelles Positives et le Nombre de Racines Réelles Negatives d'un Degré Quelconque,* Paris, 1813.
7. CAUCHY, A.L.: *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, lère Partie, Analyse Algébrique,* Paris, 1821.
8. CAUCHY, A.L.: *Résumé des Leçons Donnés à l'Ecole Royale Polytecnique sur le Calcul Infinitésimal* . 1st vol, Paris, 1823.
9. CAUCHY, A.L.: *Mémoire sur les Integrales Définies Prises entre les limites Imaginaires,* Paris, 1825.
10. CAUCHY, A.L.: *Exercises de Mathématiques,* Paris, 5 vol 1826-1830
11. CAUCHY, A.L.: *Leçons sur les Applications du Calcul Infinitésimal à la Géometrie,* Paris, 2 vol., 1826-1828.
12. CAUCHY. A.L.: *Leçons sur le Calcul Différentiel,* Paris, 1829.
13. CAUCHY, A.L.: *Mémoire sur l'Application du Calcul des Résidus à la Solution des Problémes de Physique Mathématique,* Paris, 1827.
14. CAUCHY, A.L.: *Mémoire sur la théorie de la Lumière,* Paris, 1830.
15. CAUCHY, A.L.: *Mémoire sur la Dispersion de la Lumière,* Paris, 1830.
16. CAUCHY, A.L.: *Résumés Analytiques,* Turin, 1833.

17. CAUCHY, A.L.: *Nouveaux Exercices des Mathématiques,* Prague, 1836.

18. CAUCHY, A.L.: *Mémoire sur un methode Generale pour la Determination des Racines Réelles des Equations Algébriques ou même Trascendantes,* Paris, 1837.

19. CAUCHY, A.L.: *Recueil de Mémoires sur la Physique Mathématique,* Paris, 1839.

20 CAUCHY, A.L.: *Exercices d'Analyse et de Phisique Mathématique,* Paris, 1841-1853.

21 FREUDENTHAL, H.: Cauchy, Augustin-Louis, *Dictionary of Scientific Biography*, 3, New York: Charles Scribners's Sons, 1971, pp. 131-148.

22 GRABINER, J.V.: *The Origins of Cauchy's Rigorous Analysis,* Cambridge: MIT Press., 1981.

23. VALSON, C.C.: *La Vie et les Travaux du Baron Cauchy*, 2 vol, Paris, Gautiers-Villars, 1868.