Evolución de la integral en el siglo XIX

POR PEDRO JIMENEZ GUERRA *

Retomando la idea expresada años atrás por Bernouilli, Joseph Fourier (1768-1830) afirma en su "Teoría analítica del calor", aparecida en 1882, que cualquier función acotada en un intervalo $[-a,a]$, se puede expresar en la forma

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{a}) + b_n \, sen(\frac{n\pi x}{a})],$$

con

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x) \cos(\frac{n\pi x}{a})\, dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\, sen(\frac{n\pi x}{a})\, dx.$$

En este trabajo, algunas de cuyas ideas habían sido ya presentadas por Fourier a la Academia de Ciencias de París en 1807 y en el que se emplean términos sorprendentes para la época como el de "función arbitraria" o "función discontinua" (aunque este término se emplea en el sentido que tenía en el siglo XVIII, que no corresponde exactamente con la idea actual), Fourier emplea dos tipos de argumentos diferentes para determinar los coeficientes a_n y b_n (actualmente denominados coeficientes de Fourier). En el primero de ellos, ingenioso y sugestivo, aunque no muy riguroso, los coeficientes a_n y b_n se determinan mediante cálculos de sistemas de infinitas ecuaciones mientras que el segundo, siguiendo un método empleado ya por Lagrange para series finitas trigonométricas, se basa en multiplicar por $\cos \frac{n\pi x}{a}$ o por $sen\, \frac{n\pi x}{a}$ en ambos términos de la igualdad (1), supuesto que ésta se verifica, e integrar después suponiendo que la integral de la serie es igual a la suma de la serie de las integrales de sus términos (cuestión generalmente aceptada en esa época y que posteriormente Weierstrass y

---

* Académico Numerario

Darboux probarían para series uniformementes convergentes de funciones integrables).

De esta forma se plantea de manera natural la cuestión de la existencia de las integrales de las funciones $f(x)\cos nx$ y $f(x)$ sen nx, lo que a pesar de ser $f(x)$ una función "arbitraria" e incluso "discontinua" (aunque su idea de discontinuidad fuese a lo sumo en un número finito de puntos), Fourier justifica interpretando las integrales $\int_{-a}^{a} f(x)\cos(nx)\,dx$ y $\int_{-a}^{a} f(x)\,sen\,(nx)\,dx$ como el área de los recintos de ordenadas de las funciones correspondientes, cuya existencia estaba plenamente asumida en esta época. Recordemos que durante el siglo XVIII la integral se interpreta más como la operación inversa de la diferencial que como límite de una suma, aunque ambos puntos de vista eran aceptados. Ahora bien, para utilizar la integral como operación inversa de la diferencial y calcular la integral a partir de una primitiva (en lenguaje actual) se necesita primeramente determinar la existencia de ésta, por lo que no sorprende, que dada la "arbitrariedad" que Fourier pretendía, retomase la idea de la integral como área (y límite de sumas) para justificar más fácilmente la existencia de tales integrales.

Hacia 1814 y antes de estar familiarizado con los trabajos de Fourier, Agustín Louis Cauchy (1789-1857) reconoce ya la importancia del concepto de continuidad, que introduciría posteriormente en su " Cours d'analyse" (1821) (y que ya había sido considerado por Bernard Bolzano (1781-1848)) y la importancia de la concepción de la integral como límite de una suma, reafirmándose en sus ideas al conocer los trabajos de Fourier y en particular la interpretación dada por Fourier a los coeficientes que aparecen en la ecuación (1).

En 1823 Cauchy define en sus "Résumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimale", la integral de una función continua (y acotada) f en un intervalo $[a,b]$ como el límite de las sumas

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_{i-1})\ ,$$

cuando el diámetro de las particiones $\sigma = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ del intervalo $[a,b]$, tiende a cero. Para asegurar la existencia de este límite, Cauchy se limita, como hemos comentado anteriormente, a funciones continuas, aunque en sus argumentos usa repetidamente la propiedad de la continuidad uniforme aunque sin apreciarlo, lo que hace que su demostración no sea totalmente correcta, ya que su método exigía aplicar el teorema de la continuidad uniforme que sería establecido por Heinrich Eduard Heine (1821-1881) en 1872.

La definición de la integral, dada por Cauchy, como límite de una suma y no como operación inversa de la derivación, supone un retorno a la noción de integral de la antigüedad y primera parte del siglo XVII. Así, la integral definida, que durante mucho tiempo quedó en un lugar secundario, vuelve con Cauchy a desempeñar un papel primordial.

Aunque el mismo Cauchy enfatiza el hecho de que el argumento empleado en la definición anterior es válido bajo las condiciones de ser la función continua y acotada en el segmento, él extiende la definición al caso de funciones acotadas con un número finito de discontinuidades, estableciendo en el caso de ser la función f acotada en $[a,b]$ y discontinua en un punto $c\in (a,b)$ entonces los límites

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f \qquad \text{y} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f$$

existen, definiendo la integral de la función f en $[a,b]$ como la suma de los límites anteriores, extendiendo el razonamiento de manera obvia al caso de un número finito de discontinuidades.

Por otra parte, la notación de integral definida adoptada por Cauchy, es la usual $\int_a^b f(x)\, dx$ lo que representa una considerable simplificación frente a la notación

$$\int f(x)\, dx \begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}$$

empleada por Euler.

Una de las principales ventajas de su integral, según el propio Cauchy, consiste en que "permite demostrar en general la existencia de integrales o funciones primitivas", estableciendo los siguientes teoremas fundamentales:

Teorema I. La función $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es una primitiva de la función f.

Teorema II. Todas las primitivas de la función f son de la forma $F+C$, siendo C una constante, es decir, si G es una función con derivada continua G' entonces $\int_a^x G'(t) = G(x) - G(a)$.

Teorema III (usado por Cauchy para probar el teorema II y que resulta de éste trivialmente). Si G es una función tal que $G'(x) = 0$ para todo x de $[a,b]$, entonces G es constante (en $[a,b]$).

De esta forma Cauchy relaciona la integral definida de f en $[a,b]$ con la integral indefinida F mediante la fórmula

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\ ,$$

describiendo el significado geométrico de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ como el área delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las ordenadas $x = a$ y $x = b$, *e.d.* como el área del recinto de ordenadas de la función f (en $[a,b]$). Por otra parte, cabe señalar que aunque en sus sumas Cauchy toma el valor de la función en el punto inicial de cada segmento de la partición, afirma que el método empleado para demostrar la existencia del límite de dichas sumas, sigue siendo válido tomando el valor de la función en un punto arbitrario del segmento.

La integral de Cauchy resuelve de manera plenamente satisfactoria los problemas de la teoría de funciones de la época y la cuestión relativa al significado de los coeficientes de Fourier, para la idea de función, incluso discontinua, que se tenía entonces. No obstante, con la aparición del concepto moderno de función, debido a Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), se plantea de manera natural la integración de funciones con infinitas discontinuidades, siendo el propio Dirichlet quien con su célebre función igual a 1 si x es racional y a 0 si x es irracional, demuestra la existencia de funciones no integrables (según Cauchy) (1829), llamando la atención sobre la existencia de funciones que son discontinuas en un conjunto infinito de un intervalo finito y planteando la necesidad de extender el concepto de integral para funciones de esta naturaleza, exponiendo como condición suficiente para la existencia de la integral de una función acotada con infinitas discontinuidades que "si a y b denotan dos cantidades incluidas entre $-\pi$ y π, es siempre posible colocar otras cantidades r y s entre a y b que están suficientemente cerca y tales que la función es continua en el intervalo desde r a s'' (1829), condición que en términos actuales consiste en suponer que el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función sea diseminado. No obstante, Dirichlet no justificó su afirmación, anunciando una nota al respecto que nunca apareció. Probablemente, Dirichlet no llevó adelante la extensión de la integral propuesta por él, ya que cuando en 1837 aparece una cuidada versión en alemán de su artículo de 1829, impone la continuidad de la función y emplea la integral de Cauchy. No obstante, debe resaltarse el hecho de que con Dirichlet aparece por primera vez claramente la distinción entre función contina y función integrable, siendo por otra parte el primero, como ya se ha indicado, en concebir las funciones como correspondencias entre números reales, idea ya preconizada por Euler, Fourier y Cauchy.

El continuador de la idea de Dirichlet fue su discípulo Rudolf Lipschitz (1832-1903), quien en su tesis doctoral (1864), al extender los resultados de Dirichlet sobre la convergencia de las series de Fourier (recordemos que Dirichlet publicó en 1829 la primera demostración rigurosa de que bajo ciertas condiciones generales la serie de Fourier de una función converge) considera una extensión del concepto de integral en la línea planteada por Dirichlet para funciones acotadas con infinitas discontinuidades, concluyendo (erróneamente) que si la función f verifica la condición de Dirichlet mediante "un argumento apropiado" se puede probar que el conjunto derivado D' del conjunto D de discontinuidades de f, es finito, y partiendo de esto y de la integral de Cauchy, define la integral mediante el siguiente argumento: Si $D' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ entonces en cada intervalo que no contenga ningún x_i, la función tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades pudiéndose definir la integral de la función en dicho intervalo como integral de Cauchy, llegando de esta forma a la existencia de las integrales

$$(3) \qquad \int_{x_{i-1}+\varepsilon_i}^{x_i-\delta_i} f(x)\, dx$$

con $\varepsilon_i + \delta_i < x_i - x_{i-1}$ e $i=1,\ldots, n$, de donde por ser f acotada deduce la existencia de los límites de las integrales anteriores cuando ε_i y δ_i tienden a 0^+, definiendo la integral de la función como la suma de dichos límites:

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \lim_{\varepsilon_i,\delta_i \to o^+} \int_{x_{i-1}+\varepsilon_i}^{x_i-\delta_i} f(x)\, dx\ .$$

Si la función f no es acotada la expresión anterior (4) se toma como definición, entendiendo cada integral (3) como integral impropia de Cauchy y postulando la existencia del límite en (4). A partir de los teoremas fundamentales de Cauchy se prueba fácilmente que una función (acotada o no) es integrable en un intervalo $[a,b]$, según la definición anterior, si existe una función continua F en $[a,b]$, única salvo constantes, tal que

$$(5) \qquad F(s) - F(r) = \int_r^s f(x)\, dx$$

para todo subintervalo $[r,s] \subset [a,b]$ en el que la función f es continua. El procedimiento de extensión de Lipschitz puede aplicarse al caso de que $D^{(2)} = (D')'$ sea finito y en general al de que $D^{(n)} = (D^{(n-1)})'$ sea finito. Es probable que Dirichlet pensara que un conjunto D es diseminado si y sólo si $D^{(n)}$ es finito para algún n (conjuntos reducibles).

Posteriormente, Otto Hölder (1859-1937) basándose en una interpretación más general de (4) mediante el empleo de la integral de Riemann (que comentaremos a continuación) en vez de la de Cauchy, presenta en 1884 una generalización de la integral de Dirichlet dando la siguiente definición de función integrable:

"Una función f es integrable en un intervalo $[a,b]$ cuando es Riemann integrable en un entorno de todo punto del intervalo, excepto a lo sumo en los puntos de un conjunto contable $E \subset [a,b]$, y existe una función continua F satisfaciendo (5) en cada subintervalo $[x', x'']$ en el que la función f es Riemann integrable, siendo $F(b)$-$F(a)$ la integral definida de la función f en $[a,b]$".

En realidad, Hölder no presentó esta definición como una nueva integral, ya que esta generalización se le hizo necesaria en el curso de sus investigaciones sobre las series de Fourier. Cuestión por la que no se detuvo en el estudio de las propiedades de esta integral.

En Berlin, Georg Friederich Bernhard Riemann (1826-1866) asiste a las clases de Dirichlet sobre teoría de números, integrales definidas y ecuaciones en derivadas parciales. En esta época Dirichlet demuestra un especial interés por Riemann quien a su vez considera a Dirichlet como el matemático más grande de su tiempo, "próximo a Gauss". En 1851 Riemann retorna a Göttingen, presenta su tesis doctoral y en 1854 decide tomar como tema para su Habilitationsschrift el estudio de la representación de funciones mediante series trigonométricas. Después de discutir las contribuciones de Dirichlet al respecto, Riemann afirma que es razonable suponer "que las funciones no cubiertas por el análisis de Dirichlet no se presentan en la naturaleza", aunque considera interesante tratar el caso de funciones más generales por dos motivos, primeramente "porque el propio Dirichlet lo ha mantenido así" y en segundo lugar "porque la aplicación de las series de Fourier no se limita a investigaciones físicas y están siendo aplicadas exitosamente en el dominio de la Matemática pura y en la teoría de los números ...".

La definición de integral dada por Riemann para funciones acotadas en un intervalo $[a,b]$ (su extensión a funciones no acotadas se hace como en el caso de la integral de Cauchy) es similar a la dada por Cauchy (si bien toma el valor de la función en un punto arbitrario de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, considerando la totalidad de las funciones a las que dicho proceso es aplicable, a las que denomina "funciones integrables", y examinando las condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales una función es integrable (es decir bajo qué condiciones las "sumas de Riemann" de una función acotada en un intervalo $[a,b]$, convergen a un número real al tender el diámetro de la partición a cero).

Riemann asegura que para que una función acotada f en un intervalo $[a,b]$ sea integrable es necesario y suficiente que

$$(R_1) \qquad \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta_i = 0,$$

siendo ω_i la oscilación de la función f en el subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ de la partición $P = \{a= x_0 < x_1<\ldots< x_n = b\}$, Δ_i la longitud de dicho segmento y $\|P\|$ el diámetro de la partición P.

Posteriormente, Riemann prueba la condición siguiente, equivalente a la anterior:

(R_2) "Para cada $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe $d > 0$ tal que para toda partición (del intervalo) cuyo diámetro sea menor que d, se verifica que la suma de las longitudes de los intervalos de dicha partición en los que la oscilación de la función sea mayor que δ, es menor que ε".

De esta condición resulta inmediatamente que la función de Dirichlet tampoco es integrable Riemann, aunque el primer ejemplo de función no integrable Riemann cuyo conjunto de discontinuidades sea no denso, fue dado por Henry John Stephenson (1826-1883) en 1875. Por otra parte, cabe señalar que la demostración rigurosa de la condición (R_1) fue dada por Karl J. Thomae en 1875, ya que Riemann la consideró evidente, así como que en las condiciones anteriores (R_1) y (R_2) se encuentra ya claramente el germen de los conceptos de medibilidad según Jordan y de contenido exterior respectivamente, aunque Riemann no interpretara estas condiciones en términos de dichos conceptos.

Con Riemann aparece ya el concepto de función integrable independientemente de cualquier consideración acerca de la continuidad de la función, poniendo él mismo de relieve la existencia de funciones integrables con infinitas discontinuidades en cada intervalo y como él apunta "puesto que estas funciones no han sido nunca consideradas, será bueno comenzar con un ejemplo". Ejemplo que construye de la siguiente manera: Para cada número real x sea

$$(x) = \begin{cases} x - m(x) & si\ x \neq \frac{n}{2}\ con\ n\ impar \\ 0 & si\ x = \frac{n}{2}\ con\ n\ impar, \end{cases}$$

siendo $m\ (x)$ el entero más próximo a x. Evidentemente, la función $y = (x)$ es discontinua en todos los puntos $x = n/2$ con n impar. Riemann considera ahora la función

$$f\ (x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)}{n^2}\ ,$$

que es discontinua en todos los puntos de la forma $x = m/2n$ con m y $2n$ primos entre sí, siendo por tanto, discontinua en un subconjunto denso de la recta real e integrable (Riemann) en cualquier intervalo (acotado) ya que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número finito de puntos (en cada intervalo) $x = m/2n$ en los que el salto $f\ (x+) - f\ (x-) = \pi^2/8n^2$ es mayor que ε.

Las investigaciones realizadas por Riemann promovieron más problemas de los que pudo resolver, pudiendo haber sido la incompletitud de sus resultados lo que hizo que no los publicara en vida, apareciendo un año después de su muerte en 1867, al publicarlos Dedekind, quien consideraba justificada su publicación "no sólo por la interesante naturaleza del tema sino también por su tratamiento de los principios más importantes del análisis infinitesimal". En 1875, aparece la memoria sobre las funciones discontinuas de Jean Gaston Darboux (1842-1917), verdadero responsable de la difusión de las ideas de Riemann en Francia, en donde además de exponer la primera demostración correcta, basada en el teorema de Heine, de la integrabilidad de una función continua en un intervalo, prueba que para toda función acotada f en un intervalo $[a,b]$ las sumas superiores e inferiores $\sum_{i=1}^{n} M_i\, d_i$ y $\sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i$ correspondientes a ella, siendo $d_i = x_i - x_{i-1}$,

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},\, x_i]} f(x) \qquad \text{y} \qquad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},\, x_i]} f(x) \;,$$

convergen cuando el diámetro de la partición $P = \{ x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b \}$del intervalo tiende a cero, siendo el límite de las sumas superiores su mayor cota inferior y el de las sumas inferiores su menor cota superior, estableciendo que una tal función f es integrable Riemann si y sólo si dichos límites coinciden. Posteriormente, el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) introduce las integrales superior e inferior, siendo su notación la usual hoy en día, para denotar los límites anteriores, pudiéndose enunciar la condición de integrabilidad dada por Darboux en términos de la igualdad de estas dos integrales. Un resultado similar al dado por Darboux fue obtenido independientemente, también en 1875, por el matemático inglés H.J.S. Smith. Otra condición de integrabilidad Riemann fue formulada por Paul D.G. Du Bois Raymond (1831-1889), probando que la integrabilidad Riemann de una función equivale a que para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto de los puntos en los que la oscilación de la función es mayor que ε , puede ser recubierto por un sistema finito de intervalos de longitud arbitrariamente pequeña. Simultáneamente Harnack y Dini también formularon este aserto, que había sido previamente enunciado por Hermann Hankel en 1870, aunque sin una demostración satisfactoria. Esta formulación del criterio de integrabilidad de Riemann tiene un interés especial ya que preludia claramente la idea de conjunto de contenido cero y representa un paso intermedio entre la condición de integrabilidad dada por Riemann y la que daría después Lebesgue mediante su teoría de la medida.

Hankel, discípulo de Riemann y profesor de la Universidad de Tübingen, al profundizar en el concepto de función como correspondencia entre números reales, distingue dos clases de funciones con infinitas discontinuidades, las funciones puntualmente discontinuas y las totalmente discontinuas, división sugerida por la distinción hecha por Dirichlet y Riemann entre funciones discontinuas integrables y no integrables, pensando que las funciones discontinuas Riemann integrables coincidían con las puntualmente discontinuas y probando, entre otras cuestiones, que el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función integrable Riemann deben formar un conjunto denso. En sus "Fondamenti per la teoria della funzioni di variabili reali" (Pisa, 1878), Ulisse Dini (1845-1918) pone de manifiesto la no validez de la demostración dada por Hankel de que toda función puntualmente discontinua es integrable Riemann, aunque no consigue construir un contraejemplo que evidencie que el resultado, y no sólo la demostración, es incorrecto.

Unos años antes, en 1875, H.J.S. Smith (1826-1883), profesor de Geometría en Oxford, había publicado un artículo "Sobre la integración de las funciones discontinuas", en el que exponía dos métodos totalmente diferentes para construir conjuntos diseminados, a partir del segundo de los cuales construye un conjunto diseminado con contenido (exterior) positivo y que por consiguiente su función característica no es integrable Riemann, consiguiendo de esta forma refutar las afirmaciones de Hankel acerca de la integrabilidad de las funciones puntualmente discontinuas y de que todo conjunto diseminado tiene contenido cero.

Smith había estudiado en París, permaneciendo bastante tiempo en la Europa continental de donde provenía su inspiración matemática que desarrolló principalmente en Teoría de Números, conociendo en ese período los trabajos de Riemann y Hankel. Probablemente el desarrollo de la Teoría de la Medida se hubiese acelerado de haberse conocido en el continente el trabajo de Smith, pero desafortunadamente, el recensor de este trabajo para el Forstchritte Mathematik resaltó únicamente que en él se contenía una formulación más precisa de la condición de integrabilidad de Riemann y una demostración más rigurosa de la misma, no descubriéndose en consecuencia en el continente ejemplos similares de conjuntos diseminados de contenido (exterior) positivo hasta la década de los ochenta (1880).

Una vez desarrollada la Teoría de Conjuntos en la década de los setenta (1870) por Georg Cantor (1845-1918) y definido el número real mediante cortaduras por Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) y mediante sucesiones de Cauchy por Charles Meray (1835-1915) y por el propio Cantor, el mismo año 1872 en que se publica la definición utilizada por Weierstrass en sus lecciones de Berlín, los matemáticos disponen de conceptos suficientemente rigurosos de conjunto, función y número real, que abren el camino hacia un desarrollo general de la Teoría de la Medida.

Ya Hankel había llamado la atención sobre las propiedades de los conjuntos S_ε de los puntos en los que la función tiene un salto mayor que ε, aunque sin reconocer plenamente que las propiedades de la medida de los conjuntos juegan un papel crucial en la Teoría de la Integración. Por otra parte, Dini utilizando el concepto de Cantor de conjunto de primera especie (reducible según Dirichlet), demuestra entre otras cuestiones que toda función acotada en un intervalo cuyo conjunto de discontinuidades sea de primera especie es integrable, habiendo probado con anterioridad en 1878 que todo conjunto de primera especie puede recubrirse por un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, es decir es de contenido cero. Usando esta propiedad demuestra que si dos funciones coinciden salvo en un conjunto de primera especie y una es integrable entonces la otra también lo es, coincidiendo sus integrales. Repasando las demostraciones realizadas por Dini se observa que siguen siendo válidas sustituyendo los conjuntos de primera especie por conjuntos que pueden ser recubiertos por un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña, aunque Dini no salió del contexto de los conjuntos de primera especie, sin percibir el valor de una teoría del contenido o de conjuntos de contenido cero. Por otra parte, Dini parece cuestionar ya la identificación entre los conjuntos de primera especie y los diseminados, según se desprende de sus dudas, ya comentadas, sobre la validez de la proposición de Hankel.

En un artículo escrito en 1881, cuando aún era estudiante de la Escuela Superior de Pisa, Volterra pone de manifiesto la existencia de conjuntos diseminados de contenido exterior positivo, empleando un método de construcción de conjuntos diseminados coincidente en lo esencial con el empleado por Smith unos años antes. A partir de estos resultados construye, también en este artículo, un ejemplo de función puntualmente discontinua (según Hankel) no integrable Riemann, y demuestra en un artículo posterior, también de 1881, la conjetura de Dini acerca de la existencia de funciones con derivada acotada no integrable Riemann, llegando a afirmar " que en algunos casos puede suceder que la definición ordinaria de integral (en términos de función primitiva) no esté contenida en la Riemann ...", lo que no debe considerarse como una crítica de Volterra a la integral de Riemann, ya que se apresura a añadir "que la definición de Riemann es superior a la concepción antigua que exigía la existencia de una primitiva de la función para que ésta fuese integrable".

Independientemente de Volterra y Smith (aunque mediante métodos similares), P. Du Bois-Raymond, que en un principio también había confundido los conjuntos diseminados con los de primera especie, considerando en consecuencia la condición de integrabilidad de Dirichlet (de que los puntos de discontinuidad de la función formasen un conjunto diseminado) como un caso particular de la de Riemann, construye un conjunto diseminado no de primera especie, reconociendo la existencia de conjuntos diseminados con contenido exterior positivo (a partir de los que prueba inmediatamente la existencia de funciones no integrables Riemann que no obstante satisfacen la condición de Dirichlet), e introduciendo el término "sistema integral de puntos" para referirse a los conjuntos de contenido cero y distinguirlos de los diseminados, pero fue Alex Harnack (1851-1888) quien de manera sistemática desarrolló la noción de conjunto de contenido cero destacando su importancia en la teoría de la integración.

En su artículo sobre series trigonométricas de 1880, Harnack afirma "que la importancia de los conjuntos de primera especie se debe al hecho de no ejercer influencia alguna sobre el valor de la integral" y define como conjuntos de primera especie a aquellos que pueden ser recubiertos por un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña (pensando que esta definición era tan sólo una reformulación de la dada originalmente por Cantor). Ese mismo año Cantor construye uin conjunto similar al de Du Bois-Raymond (con un punto de "condensación de orden infinito" en teminología de este último) que parece ser condujo a Harnack a distinguir en su "Die Elemente der Differential und Integralrechnung" de 1881, entre conjuntos de primera especie y conjuntos de contenido cero, a los que denominó "conjuntos discretos" (término que en la actualidad tiene un sentido diferente) "ya que en los problemas de cálculo integral se comportan como un conjunto finito de elementos separados". Entre las propiedades de los "conjuntos discretos" establecidas por Harnack, mencionemos la de que tanto la unión finita de conjuntos discretos como la adherencia de un conjunto discreto, son a su vez conjuntos discretos. En un artículo suyo de 1882, aparece ya una noción semejante a la "propiedad que se verifica en casi todo punto", diciendo que dos funciones

f y g son iguales "en general" si para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto de los puntos x en los que $|f(x) - g(x)| > \varepsilon$, es un conjunto discreto. Un año más tarde, en 1883, Harnack presenta la siguiente definición para funciones no acotadas (que a mediados del siglo XIX comienzan a aparecer en la teoría de las series trigonométricas, observándose que varios de los teoremas importantes del Análisis son válidos para funciones "que no están acotadas en no demasiados puntos"):

"Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$ que no está acotada en el entorno de los puntos de un conjunto discreto (e.d., de contenido cero) E^{∞} y que es integrable Riemann en cada segmento de $[a,b]$ que no contiene puntos de E^{∞}. Si $\{I_i\}$ es un sistema finito de intervalos que recubre a E^{∞} entonces $f\chi_{(\cup I_i)^c}$ es integrable Riemann y se dice que la función f es integrable (en sentido de Harnack o H-integrable) si existe

$$\int_a^b f = \lim_{m(\cup I_i) -> 0} \int_a^b f\chi_{(\cup I_i)^c},$$

siendo $m(\cup I_i)$ la longitud total de $\cup I_i$".

En la definición anterior resulta esencial el requerimiento de que cada intervalo I_i contenga al menos un punto de E^{∞}, como hizo notar el matemático americano E.N. Moore en 1901, ya que en caso contrario toda función integrable Harnack lo sería absolutamente, lo que no ocurre con las integrales impropias de Riemann. Aunque no se encuentra ninguna mención al respecto en los trabajos de Harnack, algunos de sus contemporáneos, como Stolz y Schoenflies, consideran a la integral de Harnack en general como condicionalmente convergente. Esta integral verifica la propiedad aditiva de la integral respecto a los intervalos, la conservación de la integrabilidad en subintervalos y la continuidad de la integral indefinida, no siendo en general integrable la suma de dos funciones integrables aunque sí se verifica la linealidad si esta suma es integrable.

Si el conjunto E^{∞} es finito, la integral de Harnack es una integral impropia de Cauchy, verificándose en el caso de que el conjunto E^{∞} sea de primera especie (reducible, según Dirichlet) que toda función integrable Harnack lo es en sentido de Dirichlet coincidiendo el valor de sus integrales. Recordemos por otra parte, que ya Du Bois-Raymond al tratar la extensión de la integral de Riemann al caso de funciones no acotadas en 1875, observó que si el conjunto U_f (E^{∞} en terminología de Harnack) de los puntos en los que la función no está acotada en un entorno de ellos, es de primera especie, entonces el procedimiento usual se puede utilizar también para definir integrales impropias cuando U_f es finito.

En un artículo de 1884 Harnack intenta probar que su integral extiende a la de Hölder, lo cual aún no siendo cierto, tiene el interés de que junto con la no verificación por parte de su integral del teorema fundamental II establecido por Cauchy, llevó a Harnack a llamar la atención sobre la "continuidad absoluta" de la integral de Riemann, probando para funciones integrables (en su sentido) absolutamente continuas la versión de Dini del teorema fundamental II (establecido por Cauchy). Probablemente, la idea se la sugirió el párrafo del libro de Dini "Serie di Fourier e altre reppresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale" (1880) donde afirma que "el conjunto de primera especie U_f (E^{∞} en notación de Harnack) puede encerrarse en un número finito de intervalos suficientemente pequeños de forma que el valor absoluto de las sumas de las integrales en dichos intervalos ... es menor que un número arbitrariamente pequeño σ".

Diez años más tarde, en 1894, C. de la Vallée-Poussin (1866-1962) publica un trabajo dedicado a problemas de integración y diferenciación bajo el signo integral, en el que expone la siguiente definición de integral, en la línea de Harnack, para funciones no acotadas:

"Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$, no acotada en el entorno de los puntos de un conjunto E^{∞} discreto, y que es Riemann integrable en cada segmento (de $[a,b]$) que no contiene puntos de E^{∞}. Para cada par de números reales positivos N_1 y N_2 (con $-N_1 < N_2$) consideremos la función

$$f_{N_1}^{N_2}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad -N_1 \leq f(x) \leq N_2 \\ N_2 & si \quad f(x) \geq N_2 \\ -N_1 & si \quad F(x) \leq -N_1 . \end{cases}$$

Entonces la integral de la función f en $[a,b]$ (en sentido de la Vallée-Poussin, escribiremos $(V\text{-}P)$-integrable) se define como el límite (si existe)

$$(V-P) \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{N_1, N_2 \to 0} \int_a^b f_{N_1}^{N_2}(x)\, dx \text{ "}.$$

(A. Schoenflies puso de manifiesto en 1900 que si el límite anterior existe y es finito entonces se deduce la condición impuesta de ser E^{∞} un conjunto discreto). De la Vallée-Poussin estudió las propiedades básicas de esta integral, destacando la de la continuidad absoluta. A diferencia de la integral de Harnack (y de la de Dirichlet), toda función $(V\text{-}P)$-integrable lo es absolutamente y, por tanto, toda función condicionalmente H-integrable no lo es en sentido de de la Vallée-Poussin, coincidiendo ambos métodos en el caso de funciones absolutamente H-integrables. De la Vallée-Poussin también construye una integral condicionalmente convergente utilizando el método de Dirichlet, suponiendo que el conjunto de los puntos tales que la función no es $(V\text{-}P)$- integrable en un entorno de ellos, es de primera especie, y que es $(V\text{-}P)$-integrable en todo segmento no conteniendo ninguno de tales puntos. Esta integral extiende a la de Dirichlet-Hölder si no se impone la condición (no esencial) de ser el conjunto de los puntos de integrabilidad condicional, de primera especie.

En 1884 el profesor de Matemáticas de la Universidad de Innsbruck Otto Stolz (1842-1905), que había recensionado para el Fortschritte Mathematik los trabajos de Harnack acerca de los conjuntos discretos, da la primera definición de contenido exterior de un conjunto observando que a cada subconjunto arbitrario E de un intervalo cualquiera $[a,b]$ se le puede asignar un número $L(E)$, que llamó medida de E, de forma que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|L(P)-L(E)| < \varepsilon$, para toda partición P de $[a,b]$ cuyo diámetro sea menor que δ, siendo $L(P)$ la suma de las longitudes de los intervalos determinados por P, que contienen algún punto del conjunto E. Stolz probó que $L(E)$ es cero cuando E es un conjunto discreto (según Harnack) y extendió también su definición a subconjuntos acotados del plano.

También en 1884 e independientemente de Stolz, Cantor publica una definición de contenido (término introducido por él ("inhalt")) en el contexto de los espacios euclídeos n-dimensionales, equivalente a la de Stolz, basándose en dos suposiciones, a las que no dedicó suficiente atención. La primera consiste en suponer definida la integral múltiple

$$\int_P dx_1 \ldots dx_n$$

siempre que el conjunto P esté formado por un número finito de "regiones" simples n-dimensionales y la segunda, en suponer que para cada conjunto acotado P y cada número positivo r, el conjunto $\Pi(\overline{P},r) = \bigcup_{p\in \overline{P}} B(p,r)$ está formado por un número finito de regiones simples, siendo $B(p,r)$ la bola de centro p y radio r. Así, se deduce inmediatamente la existencia de la integral

$$\int_{\Pi(P,r)} dx_1 \ldots dx_n \, .$$

No obstante, debe tenerse en cuenta que la teoría de las integrales múltiples no se trató con la generalidad y precisión requeridas en este contexto por Cantor, hasta la aparición del trabajo de Cantor al respecto en 1892. Por otra parte, la segunda suposición hecha por Cantor puede justificarse a partir de la compacidad de $\overline{P}$, lo que aún no se conocía en ese época. Con estas suposiciones Cantor define el contenido (o volumen) $I(P)$ de P como

$$I(P) = \lim_{r \longrightarrow 0} \int_{\Pi(P,r)} dx_1 \ldots dx_n \, .$$

Nótese que ya Stolz en 1881 en un trabajo sobre la longitud de las curvas, expone su idea de definir las áreas y volúmenes en términos de integrales.

De la definición anterior resulta trivialmente que el contenido de un conjunto acotado coincide con el de su adherencia. Por otra parte, Cantor fue el primero en interesarse por las propiedades aditivas de la función de conjunto I, poniendo de manifiesto que si P y Q son dos subconjuntos acotados disjuntos la igualdad $I(P \cup Q) = I(P) + I(Q)$ no tiene por qué verificarse si sus adherencias no son igualmente disjuntas, verificándose si P y Q "están contenidos en porciones n-dimensionales del espacio completamente separadas". En una versión posterior en francés de su artículo en el que aparece la definición del contenido, Cantor señala que el contenido de un conjunto depende de la dimensión del espacio en el que se le considere como subconjunto.

Al no conocerse aún en la época en la que aparece la noción del contenido de Cantor, el teorema sobre la compacidad de los subconjuntos cerrados y acotados de R^n, la definición de Cantor no parecía una generalización fiel de la noción de conjunto discreto dada por Harnck, lo que motivó que este último propusiera en 1885 una nueva versión del contenido imponiendo el recubrimiento por un número finito de intervalos. Parece ser que Harnack desconocía la definición similar dada por Stolz. Entre otras cuestiones, algunas ya comentadas, Harnack observó que la unión contable de conjuntos discretos no es necesariamente discreta pero que no obstante, "en cierto sentido cada conjunto "contable" de puntos tiene la propiedad de que todos sus puntos pueden encerrarse en intervalos cuya suma de longitudes es arbitrariamente pequeña". Parece ser que Harnack fue el primer matemático en llamar la atención sobre esta propiedad de los conjuntos contables, que iba a sugerir más adelante a Borel la utilidad de una teoría de la medida. Por otra parte, Harnack observó también que si E es el recinto de ordenadas de una función positiva f definida en un intervalo $[a,b]$, entonces el contenido de E no se puede expresar mediante la integral $\int_a^b f$ a menos que la frontera de E sea un conjunto discreto (es decir, que E sea medible Jordan).

En una carta fechada en 1885, de K. Weierstrass (1815-1897) a Paul du Bois-Raymond, quien le había escrito acerca de su descubrimiento de que la condición de Dirichlet no era suficiente para la integrabilidad Riemann, Weierstrass afirma que "cuando Dirichlet formuló su condición, sin duda, pensaba en una concepción diferente de la integral definida de la que posteriormente diera Riemann". Después de una primera definición de integral y ante un contraejemplo, basado en una idea de Volterra que le envía por carta Du Bois-Raymond, Weierstrass le afirma en una nueva carta que "la definición de Riemann debe modificarse más drásticamente de lo que yo he hecho ...".

En el verano de 1886, Weierstras incluye en sus conferencias sobre la teoría de funciones la siguiente extensión de la integral mediante la teoría del contenido de cantor, para funciones definidas y acotadas en un subconjunto denso de un intervalo:

"En cada punto en el que la función está definida tracemos su ordenada. Imaginemos cada una de las ordenadas existentes rodeada por un pequeño rectángulo cuya base sea igual a δ . Entonces estos rectángulos se solapan. Si definimos ahora el conjunto de puntos que están dentro de algunos de estos rectángulos, se ve fácilmente que estos forman un continuo. Este continuo tiene un contenido S_δ que es función de δ ... . Puede probarse que S_δ decrece con δ y, por consiguiente, existe el límite cuando δ tiende a cero. Definamos ahora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0} S_\delta .$$

Esta definición se justifica puesto que coincide con la usual para funciones continuas (e.d., con la integral de Cauchy) y también porque las propiedades esenciales de la integral se siguen verificando". Lo que no sabemos exactamente es a que propiedades se refiere en su definición ya que, por ejemplo, su integral no verifica la adividad respecto a la suma de funciones. Si f es una función no negativa y acotada definida en un subconjunto denso F de un intervalo $[a,b]$, entonces la integral $\int_a^b f$, según Weierstrass, coincide con el contenido de Cantor del conjunto de los puntos (x,y) tales que $x \in F$ y $0 \leq y \leq f(x)$.

Como ya hemos comentado, Fourier retoma la idea de la integral como área de los recintos de ordenadas de las funciones correspondientes, para justificar la existencia de las integrales que aparecen en el cálculo de sus coeficientes, debido a que su existencia estaba plenamente asumida en su época. Una actitud claramente diferente frente a la relación existente entre estos conceptos la encontramos ya en Giussepe Peano (1858-1932), quien fue bastante crítico con los tratamientos de la integral en los que su definición y existencia estuviesen basadas en el concepto de área, y no por el carácter geométrico de dicha orientación sino por no haberse dado nunca una definición precisa y suficientemente general de la noción de área.

Para definir el área de una región del plano "de forma simple", Peano considera el ínfimo de las áreas de los polígonos que contienen a la región y el supremo de las áreas de los polígonos contenidos en ella, señalando que el área es el valor común de esas cantidades, en caso de que coincidan, afirmando que en caso contrario no debe hablarse de área de dicha región.

En 1887, en el capítulo sobre las magnitudes geométricas de su libro "Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale", Peano desarrolla con detalle las ideas anteriores, presentando (quizás debido a las influencias de las investigaciones llevadas a cabo por Cantor sobre los conjuntos) el concepto de área para conjuntos arbitrarios de R, R^2 y R^3. Siguiendo el método anterior, define el área interior $C_i(A)$, el área exterior $C_e(A) = C_i(A) + C_e(FrA)$ y que por tanto, el conjunto A tiene área si y sólo si el área exterior de su frontera es cero. Peano señala que la función de conjunto $C(A)$ es una "función distributiva", en su terminología, o lo que es lo mismo, una función de conjuntos finitamente aditiva, en terminología actual, y que se cumplen las igualdades

$$\underline{\int}_a^b f = C_i(E) \quad \text{y} \quad \overline{\int}_a^b f = C_e(E),$$

para toda función no negativa f definida en un intervalo $[a,b]$, siendo E el recinto de ordenadas de dicha función. Por tanto, f es integrable si y sólo si el conjunto E tiene área (e.d., $c_i(E) = C_e(E)$). Nótese como mientras que el concepto de contenido de Cantor (Harnack y Stolz) viene motivado por la condición (R_2) de Riemann, el de área (de Peano) está íntimamente relacionado con la condición (R_1), no en vano, ya en 1883 Peano había señalado que las demostraciones en la teoría de la integración pueden simplificarse definiendo las integrales superior e inferior como los límites superior e inferior respectivamente, de las sumas de Riemann de la función en cuestión.

Aunque el concepto de medibilidad es básico en el tratamiento de la medida de conjuntos desarrollada por Peano, fue Camille Jordan (1838-1922) quien introdujo explícitamente el concepto de conjunto medible, cinco años más tarde, motivado por la teoría de las integrales múltiples donde la propiedad de la medibilidad de los conjuntos aparece de manera natural al extender la teoría a conjuntos arbitrarios, ya que por ejemplo, para definir la integral

$$\int_E f(x,y)\, dE ,$$

siendo E un subconjunto acotado del plano, se suponía el plano dividido en rectángulos R_{ij} de lados Δx_i y Δy_j, mediante líneas paralelas a los ejes de coordenadas, lo que induce una partición de E en conjuntos E_{ij} a partir de los cuales se define la integral $\int_E f\, dE$, por analogía con el caso unidimensional, como el límite de las sumas de Cauchy

$$(6) \qquad \sum_{i,j} f(x_i, y_j)\, a(E_{ij})$$

cuando las dimensiones de los rectángulos R_{ij} tienden a cero, siendo $(x_i\ y_j)$ un punto arbitrario perteneciente a E_{ij} y $a(E_{ij})$ el área de dicho conjunto. Esta definición da por supuesta a priori la existencia y conocimiento de las áreas de los conjuntos E_{ij}, por lo que en otros tratados de la época más rigurosos, se considera el límite de las sumas

$$(7) \qquad \sum_{i,j}{}' f(x_i, y_j)\, a(R_{ij}) ,$$

donde Σ' denota la suma sobre todos los R_{ij} totalmente contenidos en E o sobre aquellos rectángulos R_{ij} que tienen intersección no vacía con E, suponiendo que el área de quellos rectángulos R_{ij} que tienen intersección no vacía con la frontera de E, tiende a cero al hacerlo las dimensiones de R_{ij}, o lo que es lo mismo, supuesto que el conjunto E es medible. Por otra parte y al margen del rigor, dado que $a(R_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j$, la definición de la integral mediante las sumas de (7) es más conveniente a la hora de demostrar teoremas de tipo Fubini (sobre integración reiterada) ya que la suma de (7) puede reordenarse por ejemplo de la forma siguiente:

$$\sum_i \left(\sum_j f(x_i , y_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i .$$

El empleo de las sumas de (6) o (7) se justifica suponiendo que el área de los E_{ij} no rectangulares tiende a cero al hacerlo las dimensiones de los R_{ij} , apareciendo en este argumento de nuevo la idea de medibilidad.

Entre los matemáticos de la época que emplearon la propiedad de medibilidad en este contexto, algunos como Thomae, que parece que fue el primero en extender la integral de Riemann a funciones de dos variables en 1876, la consideran como evidente, debido probablemente al hecho de que el conjunto E fuese tradicionalmente considerado como una región acotada por curvas regulares, mientras que otros reconocieron la necesidad de imponer condiciones adicionales. Así Harnack en su discusión sobre las integrales dobles añade "... se supone que los puntos de la frontera de la región plana son de una naturaleza tal que pueden ser encerrados en un dominio plano de magnitud arbitrariamente pequeña, ocurriendo lo mismo con las curvas mediante las cuales se realiza la partición ...", percibiendo claramente que en la definición de la integral $\int_E f(x,y)\, dE$ no sólo debe ser medible E , sino que también deben serlo los subconjuntos en los que le divide la partición considerada. Cesare Arzelà (1847-1912) añade la hipótesis de que E esté acotado por curvas cerradas simples continuas y rectificables (1891) y Emile Picard (1856-1941) supone que las líneas paralelas a los ejes de coordenadas cortan a la frontera del conjunto E a lo sumo en un número fijo de puntos (1891). Con anterioridad, el matemático italiano Rodolfo Bettazi había postulado ya la propiedad de la medibilidad en un trabajo de 1885, que parece no tuvo demasiada difusión.

Ya Cauchy había señalado en 1827 que las integrales reiteradas

$$(8) \qquad \int_0^1 dy \left[\int_0^1 f(x,y)\, dx\right]$$

y

$$(9) \qquad \int_0^1 dx \left[\int_0^1 f(x,y)\, dy\right]$$

no eran necesariamente iguales en el caso de funciones no acotadas. Posteriormente Thomae vuelve a suscitar el interés por esta cuestión al poner en 1878 un ejemplo de una función acotada para la que no existe la integral (8) y sí la (9) no existiendo en su ejemplo la integral doble (de f como función de dos variables) al igual que sucediera en el ejemplo propuesto anteriormente por Cauchy. En 1883 Du Bois-Raymond demostró que la existencia de la integral doble de la función $f(x, y)$ no implica necesariamente la integrabilidad de las funciones $x \to f(x, y)$ e

$y \to f(x, y)$, para todos los valores de y y x respectivamente, probando el siguiente teorema de tipo Fubini:

"Si la función $f(x, y)$ es integrable en $R = [0,1] \times [0,1]$ entonces las funciones $y \to \int_0^{-1} f(x,y)\, dxy$ $\;x \to \int_0^{-1} f(x,y)\, dy$ son integrables en $[0,1]$ y

$$\int_R f\, dR = \int_0^1 dy\, [\int_0^{-1} f(x,y)\, dx] = \int_0^1 dx\, [\int_0^{-1} f(x,y)\, dy] \text{ ",}$$

y señalando que a su juicio el teorema no era cierto para conjuntos E arbitrarios. Harnack (1886) y Arzclà (1891) probaron sendos teoremas de tipo Fubini imponiendo condiciones adicionales al conjunto E, como ya se ha mencionado anteriormente.

En 1892 Jordan pone de manifiesto que mientras que en el desarrollo de la integral de Riemann ha quedado totalmente claro el papel que juega la función en la integral, no ha ocurrido lo mismo en lo referente al dominio de integración. Siguiendo la idea de Peano, Jordan define los contenidos interior y exterior de un subconjunto acotado E (arbitrario) de R^n, denominando conjuntos medibles a aquellos subconjuntos (acotados de R^n) cuyos contenidos exterior e interior coinciden, y demostrando que si E es una unión disjunta de un número finito de subconjuntos $E_1 \ldots, E_n$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} c_i(E_k) \leq c_i(E) \leq c_e(E) \leq \sum_{k=1}^{n} c_e(E_k),$$

y que si E_k es medible para $k = 1 \ldots, n$, entonces también lo es E y se cumple que

$$c(E) = \sum_{k=1}^{n} c(E_k).$$

Dados un conjunto medible E y una función acotada f definida en E, Jordan considera las sumas superiores e inferiores

$$U = \sum_{k=1}^{n} M_k\, c(E_k) \qquad \text{y} \qquad L = \sum_{k=1}^{n} m_k\, c(E_k)$$

correspondientes a cada partición $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ de E en conjuntos medibles y prueba que U y L convergen cuando las dimensiones de los E_k tienden a cero, denominando a estos límites "integral por exceso" e "integral por defecto" y diciendo que la integral $\int_E f\, dE$ existe si y sólo si dichos límites coinciden, en cuyo caso este valor común se toma como valor de la integral.

Si el conjunto E es no medible, Jordan define la integral (de una función acotada f en E) $\int_E f dE$ considerando una sucesión monótona creciente de conjuntos medibles E_k tales que $\lim_k c(E_k) = c_i(E)$ y definiendo

$$\int_E f\, dE = \lim_k \int_{E_k} f\, dE_k$$

ya que este límite existe por ser la función f acotada. Similares definiciones se pueden dar para las integrales superior e inferior cuando f no es integrable en cada E_k . De esta forma Jordan establece el siguiente teorema (general) tipo Fubini:

"Sean E un subconjunto acotado y medible del plano, f una función acotada e integrable definida en E , $F = \{y : (x, y) \in E$ para algún $x\}$ y $G_y = \{x : (x,y) \in E\}$.

Entonces se tiene que

$$\int_E f(x,y)\, dE = \int_F dy\, [\underline{\int}_{G_y} f(x,y)\, dx\,] = \int_F dy\, [\overline{\int}_{G_y} f(x,y)\, dx\,].$$

Las ideas de Jordan recogidas en su Cours d'Analyse (1893) tuvieron una gran difusión entre los matemáticos de la época, ejerciendo una notable influencia en los mismos, particularmente en sus discípulos Borel, Baire, Lebesgue y Fréchet. Aunque los trabajos de Jordan situan definitivamente a la teoría de la integral de Riemann en el contexto de la teoría de la medida, las nuevas ideas sobre la misma iban a tener un origen bien diferente.

El iniciador de la nueva teoría de la medida fue Emile Borel (1871-1956), impulsado por las investigaciones realizadas en su tesis doctoral (1894) sobre ciertas cuestiones relacionadas con las funciones analíticas y más en particular con el estudio de ciertas series de funciones racionales de la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{(z-a_n)^{m_n}},$$

lo que sitúa el origen de las nuevas ideas sobre la teoría de la medida en la teoría de las funciones complejas.

Las demostraciones de algunos de estos resultados sugirieron a Borel la importancia de dar una definición de medida que utilizase un número infinito de intervalos para cubrir el conjunto a medir. De esta forma, el punto de partida de Borel consiste en tomar como medida de un subconjunto abierto y acotado G de la recta real, la suma de la serie de las longitudes de los intervalos componentes, en lugar de utilizar cubrimientos finitos de G como era habitual, basándose en un resultado conocido desde

Cantor según el cual todo abierto G de R es unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos.

En 1895 Borel publica un libro en colaboración con su amigo y compañero de la Ecole Normale Supérieure Jules Drach, basado en las conferencias dadas por Jules Tunnery en la Escuela Normal Superior sobre teoría de números y álgebra superior, en el que Drach al tratar el álgebra superior, emplea un método sin precedentes, al menos fuera de Francia, consistente en tratar un tema matemático paartiendo de axiomas o postulados establecidos a priori, que iba a influir decisivamente en la manera de introducir Borel su teoría de la medida.

En su libro "Leçons sur la théorie des fonctions" (1898), afirma que "hemos reconocido que una definición de medida sólo puede ser útil si ésta verifica ciertas propiedades fundamentales, nosotros hemos impuesto estas propiedades a priori y las hemos empleado para definir la clase de los conjuntos que hemos considerado como medibles. Esta forma de proceder presenta grandes analogías con el método introducido por el Sr. Drach en Algebra y en la teoría de las ecuaciones diferenciales ... . En cualquier caso, procede de la misma idea fundamental: definir las nuevas propiedades, es decir, establecer qué propiedades son estrictamente indispensables para el razonamiento que se va a seguir ...".

En este libro Borel establece las siguientes propiedades básicas que debe cumplir una medida:

i) Una medida es siempre no negativa.

ii) La medida de la unión numerable (o finita) disjunta de conjuntos debe ser igual a la "suma" de las medidas de dichos conjuntos.

iii) La medida de la diferencia entre dos conjuntos (un conjunto y un subconjunto suyo) es igual a la diferencia de sus medidas.

iv) Todo conjunto de medida no nula no puede ser (ni finito ni) numerable.

Añadiendo que "a los conjuntos para los cuales se pueda definir una medida que verifique las propiedades anteriores, les denominaremos conjuntos medibles".

Borel se planteó la cuestión de construir una clase de conjuntos para los que se pudiera definir una medida que verificara los postulados anteriores, partiendo como anteriormente se ha señalado, de la definición de la medida de los subconjuntos abiertos y acotados de R a partir de la suma de la serie de las longitudes de los intervalos componentes, extendiendo la definición de la medida a la clase de los conjuntos que se pueden obtener a partir de los conjuntos abiertos por iteración indefinida de las operaciones "unión contable" y "diferencia de conjuntos". No obstante, Borel no llegó a dar una descripción rigurosa de esta clase de conjuntos, que posteriormente Henry Lebesgue (1875-1941) establecería definitivamente en 1902, denominándolos "conjuntos B-medibles" y que actualmente conocemos como conjuntos borelianos.

Por otra parte, cabe señalar que en su libro "Leçons sur la théorie des fonctions" Borel no relaciona en ningún momento su teoría de la medida con la teoría de la integración, señalando que "sería fructífero comparar la definición que hemos dado con las definiciones más generales dadas por el Sr. Jordan en su "Cours d'analyse". ... Además, el problema que nosotros investigamos aquí es totalmente diferente del resuelto por el Sr. Jordan ..." Como vemos, Borel consideraba más general la definición de Jordan que la suya, probablemente por el hecho de existir "numerosos" conjuntos medibles Jordan que no lo son según Borel (debido a que en estos últimos se tiene en cuenta la estructura de los conjuntos a medir, cualidad que como el mismo Borel señala, él encuentra "filosóficamente atractiva" (1898)) aunque también existan "algunos" conjuntos no medibles Jordan que si lo son según Borel.

En todo caso, Borel no planteó en ningún momento su teoría como extensión o generalización de la teoría del contenido, siendo comprensible a la luz de lo anterior, que su teoría no pareciese apropiada para generalizar el concepto de integral, llegando a señalar Borel refiriéndose a esta cuestión, que "la aplicación a las series que él tenía en mente distaba mucho de los problemas de la teoría de la integral".

A finales del siglo XIX el matemático alemán Arthur Schoenflies (1853-1928) fue comisionado por la Deutsche Mathematiker-Vereinigung para preparar un informe sobre curvas y conjuntos de puntos, que apareció como informe preliminar en Septiembre de 1898 y que posteriormente fue publicado en dos tomos en 1900, el primero de los cuales constituye el primer tratado sobre toería de conjuntos, estando dedicado cerca de la mitad del mismo a las aplicaciones de la teoría de funciones, incluyendo la teoría de la integración. Aunque representa el trabajo de un solo hombre, refleja sin duda las actitudes existentes en la colectividad matemática acerca de las distintas cuestiones que trata, entre las que se encuentran la teoría de la medida de Borel y los problemas surgidos con motivo de la integral de Riemann.

Al tratar el tema de la medida de conjuntos, Schoenflies se encuentra básicamente con tres teorías, la teoría del contenido exterior de Stolz, Cantor y Harnack, la teoría del contenido de Peano y Jordan, y la teoría de la medida de Borel. Schoenflies refleja en su informe que la definición de medida tiene un cierto carácter subjetivo debiendo juzgarse en base a la utilidad que presenta a las cuestiones que motivaron su definición. En este sentido Schoenflies cuestiona la tentativa de Borel ya que no la consideraba útil para los propios estudios de Borel. Por otra parte, Schoenflies no consideraba que la aditividad numerable fuese una condición sine qua non para una medida, objetando además a la teoría de la medida de Borel su definición de forma axiomática y el hecho de que la propiedad de que el contenido exterior de un conjunto coincida con el de su adherencia, no se mantuviese siendo posible asignar medida cero a conjuntos densos.

Las ideas de Borel inauguran una nueva era en el Análisis Matemático, siendo junto con los trabajos de René Baire (1874-1932), el punto de partida de una serie de investigaciones sobre la clasificación de los conjuntos y de las funciones desde un punto de vista puramente topológico, además de servir de base para la generalización de la integral llevada a cabo por Lebesgue a comienzos de este siglo.

Referencias

BOMBAL, F.: *La teoría de la medida*: 1875-1925. Seminario de Historia de la Matemática I, Univ. Complutense, Madrid, 1991, pp. 107-143.

DALEN, D. van y A.F. MONNA: *Sets and integration: an outline of development*. Wolters-Noordhoff Pub., Groningen, 1972.

HAWKINS, T.: *Lebesgue's theory of integration: its origins and development*. Chelsea, New York, 1979.

PESIN, I.N.: *Classical and modern integration theories*. Academic Press, New York, 1970.

RODRÍGUEZ-SALINAS, B.: *Sobre la teoría de la medida y sus fundamentos*. Acad. Ci. Zaragoza, 1965.