# *Los orígenes del Análisis Funcional*

POR FERNANDO BOMBAL *

## 1.- Introducción y algunos antecedentes.

El Análisis Funcional ha sido definido por J. Dieudonné [*D*1] como *"... el estudio de los espacios vectoriales topológicos y de las aplicaciones definidas entre subconjuntos de los mismos, sujetas a distintas condiciones algebraicas y topológicas."* Esta definición, aunque formalmente correcta, tiene la desventaja de estar hecha desde el punto de vista actual, cuando la teoría está perfectamente desarrollada y metodológicamente organizada, pero dice muy poco sobre sus contenidos concretos y la clase de problemas que la originaron.

Dentro de su ambigüedad, la definición de Dieudonné pone de manifiesto alguna de las características más importantes del Análisis Funcional: la tendencia hacia la algebrización del Análisis, el énfasis en los resultados de carácter estructural y la fuerte influencia de la topología. De hecho, como el propio Dieudonné señala, es prácticamente imposible disociar los comienzos de la Topología General y del Análisis Funcional.

En cualquier caso, como toda otra teoría matemática, el Análisis Funcional surge de la necesidad de encontrar nuevas técnicas para abordar una serie de problemas que los métodos tradicionales no podían resolver. De ellos principalmente tratarán estas notas, en las que intentaré mostrar algunas de las raíces en las que se sustenta esta parte de las Matemáticas.

Al final se incluye una Bibliografía sucinta. El lector interesado puede encontrar en [*BK*], [*M*] y, sobre todo, en [*D*1] una relación muy completa de referencias bibliográficas.

Ya desde el comienzo del Cálculo Diferencial fue poniéndose de manifiesto la conveniencia de considerar conjuntos cuyos elementos, a diferencia de lo que sucede en el Análisis clásico, no son puntos del espacio euclídeo ordinario, sino funciones. Y éste es el origen mismo del nombre de Análisis Funcional: el estudio de los "Espacios Funcionales", es decir, conjuntos formados por funciones, dotados de determinadas estructuras que permiten realizar en ellos gran parte de las operaciones habituales del Análisis (límite de sucesiones, continuidad de funciones sobre ellos, etc.). Si se tiene en cuenta que la noción de función arbitraria, tal como hoy la entendemos, no aparece claramente hasta mediados del pasado siglo,

* Académico Correspondiente.

podremos darnos cuenta fácilmente de lo novedosas que son las ideas que llegan a configurar las nociones del Análisis Funcional.

Sin embargo, no hay duda de que se pueden encontrar antecedentes claros del modo de hacer el Análisis Funcional desde el mismo comienzo del Cálculo Diferencial, pues el estudio de las Ecuaciones Diferenciales lleva inmediatamente a la necesidad de considerar el conjunto de las soluciones y, eventualmente, al estudio de sus propiedades. En este sentido puede entenderse, por ejemplo, el famoso *"principio de superposición"*, enunciado por Daniel Bernouilli en torno a 1750, que afirma que la forma más general que puede tomar una cuerda homogénea de longitud $\pi$, mantenida en tensión y sometida a vibración en un plano, puede obtenerse como "superposición" de las posiciones más sencillas que puede adoptar. Teniendo en cuenta que, para pequeñas vibraciones, la posición $u(x,t)$ que ocupa el punto de abscisa $x$ de la cuerda en el instante $t$ viene dada, aproximadamente, por la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ con } u(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \phi(x), \qquad (1)$$

donde $\varphi$ y $\phi$ son la posición y velocidad iniciales de la cuerda, el principio de superposición establece que la solución general de (1) se puede escribir en la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen } nx \cos n(t - b_n),$$

para elecciones adecuadas de $a_n$ y $b_n$. En terminología actual, esto significa que el conjunto de soluciones de (1) es un espacio vectorial, cerrado para alguna topología, generado por una familia numerable de funciones.

## 2.- El paso de lo finito a lo infinito: Sistemas de infinitas ecuaciones lineales.

Como ya hemos dicho, uno de los rasgos distintivos del Análisis Funcional es la algebrización del Análisis. Los métodos algebraicos se han desarrollado casi siempre antes que los analíticos y, al considerar esencialmente conjuntos finitos, suelen ser más fáciles de usar. Por ello, una idea reiteradamente utilizada por los analistas ha sido la de considerar las ecuaciones funcionales como casos límites de ecuaciones algebraicas, cuya solución es más sencilla. Así, por ejemplo, la deducción que hace D. Bernouilli en 1750 de la solución general de la cuerda vibrante, se basa en sustituir la cuerda por $n$ masas puntuales, calcular la posición general del sistema a lo largo del tiempo, y hacer tender formalmente $n$ a infinito.

El descubrimiento por D'Alembert de la ecuación diferencial que rige el movimiento y el desarrollo de las técnicas analíticas, relegó el método de Bernouilli a un segundo plano. Sin embargo, la idea persistió y tuvo una influencia decisiva en los trabajos sobre Física de Lagrange y, sobre todo, de Fourier, para la obtención de las ecuaciones diferenciales que controlan los fenómenos de transmisión del calor. Al mismo tiempo, esta idea del paso de lo finito a lo infinito, fue sistemáticamente utilizada por Fourier para la obtención concreta de soluciones. Pero mejor será ilustrar el método con un ejemplo, de los muchos que aparecen en *La thèorie analytique de la chaleur* (1822): Consideremos el problema de encontrar una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (*)$$

en el dominio $x > 0$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, que sea igual a 1 para $x = 0$ y se anule para $y = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, y para $x$ tendiendo a $\infty$. Se trata de un modelo matemático de la temperatura estacionaria en el interior de una placa infinita de forma rectangular, cuyos bordes se mantienen a la temperatura prefijada.

Para resolver este problema, Fourier utiliza su método favorito de *separación de variables* (ya empleado por D'Alembert y Bernouilli con anterioridad): tratemos de encontrar soluciones de la forma $u(x,y) = v(x)w(y)$. Sustituyendo en la ecuación (*), resulta que ha de cumplirse

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Como el primer miembro depende sólo de $x$ y el segundo de $y$, sólo pueden ser iguales si ambos son una constante $\lambda$. Obtenemos así dos ecuaciones diferenciales ordinarias, fáciles de resolver. Pero Fourier es más directo y, simplemente, dice "... vemos que podemos tomar $v(x) = e^{mx}$ y $w(y) = \cos ny$." Sustituyendo en (*), se obtiene $m^2 = n^2 (= \lambda)$. De la condición de anulación en $\infty$, resulta $m < 0$, y de la de anulación en $y = \pm\frac{\pi}{2}$ que $n = (2k-1)(k \in N)$ y $m = -n$. Así pues, las funciones

$$u_k(x,y) = e^{-(2k-1)x}\cos(2k-1)y \quad (k \in \mathbf{N}),$$

satisfacen todas las condiciones, salvo la primera. Retomando el *"principio de superposición"*, Fourier trata entonces de buscar una solución como *"superposición"* de las anteriores, es decir, de la forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,y),$$

para unos coeficientes $(a_n)$ adecuados. Para determinar estos coeficientes, Fourier utiliza la condición primera, obteniendo

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)y, \quad \text{para} \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

A continuación, emplea formalmente el método habitual de eliminación de parámetros, derivando la serie término a término y haciendo $y = 0$, lo que le conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^2 a_n. \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^4 a_n. \\ &\dots \end{aligned} \tag{2}$$

esto es, un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas. Para resolverlo Fourier propone truncar el sistema, considerando sólo las $n$ primeras ecuaciones con $n$ incógnitas, que resuelve, obteniendo las soluciones $a_1^{(n)}$ $a_2^{(n)}$ , ... , $a_n^{(n)}$ . Finalmente, haciendo tender $n$ a infinito, obtiene el "verdadero valor" $a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$, para cada $k$ resultando

$$a_k = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

Obviamente, se pueden poner serias objeciones al proceder de Fourier: Deriva término a término una serie, cuando sabemos que, en general, este proceso no es correcto. De hecho, cuando se sustituyen los valores calculados para $a_k$ en el sistema (2), las series resultantes son divergentes (a partir de la segunda). El mismo Fourier no parece estar muy convencido de la corrección del método empleado, pues añade: *"Como estos resultados parecen desviarse de las consecuencias ordinarias del cálculo, es necesario examinarlos con cuidado e interpretarlos en su verdadero sentido"*. Y prueba directamente que la suma de la serie obtenida para $x = 0$ es constante e igual a 1 *en el intervalo señalado* (primera vez que aparece explícitamente el concepto de *campo de convergencia* de una serie). Finalmente, afirma que la serie obtenida para u es solución del problema de contorno propuesto.

Incidentalmente, hay que decir que la postura de Fourier sobre la noción de convergencia de una serie funcional, es muy novedosa para la época, ya que a lo largo del siglo XVIII, los matemáticos habían utilizado las series sin ninguna restricción, operando con ellas como si fueran polinomios. Sin embargo, Fourier no disponía de *criterios* para asegurar la convergencia, por lo que, con gran habilidad, haciendo uso de su conocimiento de resultados previos en sumación de series numéricas, tuvo en cada caso que *calcular* la suma de los $m$ primeros términos de cada serie directamente. El avance sustancial en este campo iba a venir de manos de Cauchy, quien iba a desarrollar una serie de criterios generales de convergencia, basados en el llamado "criterio de Cauchy" (enunciado poco antes, en 1817, por B. Bolzano en un importante, pero muy poco conocido trabajo, publicado en las Actas de la Real Sociedad Científica de Bohemia.

Aparte de las objeciones formales, el método de trucamiento de Fourier fue muy importante en relación con el problema de resolver sistemas de infinitas ecuaciones lineales y resultó muy fecundo para la teoría, como reconoció un siglo más tarde F. Riesz, quien le dio el nombre de *principio de las reducidas*. Este principio puede entenderse como un paso "de lo finito a lo infinito" y resultará también, convenientemente modificado, muy útil en la teoría de las ecuaciones integrales, como veremos más adelante.

Hay que hacer notar que el método de truncamiento usado por Fourier para resolver el sistema (2), no siempre conduce a una solución, como muestra el ejemplo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots &= 1 \\ x_2 + x_3 + \ldots &= 1 \\ x_3 + \ldots &= 1 \\ \ldots \end{aligned}$$

cuyas soluciones truncadas son (0,0, ..., 1), que convergen a la "solución" $x_i = 0$, para todo $i \in N$, resultado obviamente falso.

Después de Fourier, los sistemas de infinitas ecuaciones lineales no fueron estudiados en los siguientes 50 años, pero a partir de 1870 volvieron a aparecer en relación con distintos problemas algebraicos y analíticos, estos últimos motivados fundamentalmente por la búsqueda de soluciones del tipo $u=\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ de determinadas ecuaciones diferenciales. Durante el último tercio del siglo XIX se hicieron diversos intentos para resolver los sistemas lineales de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas (Poincaré, 1895; Van Koch, 1896, etc.), pero con un éxito discreto. Hubo que esperar a la publicación de la Memoria definitiva de F. Riesz *Les systèmes d'equations à une infinité d'inconnues* (París, 1913), para conseguir una teoría satisfactoria. El punto fundamental es la clarificación de la noción de solución. Volveremos más adelante sobre este tema.

## 3.- El Problema de Sturm-Liouville. El comienzo de la Teoría Espectral.

Los trabajos de Fourier influyeron decisivamente en el tratamiento posterior de las ecuaciones diferenciales. El método de separación de variables, aplicado a otras ecuaciones diferenciales (en general no homogéneas), conduce al estudio de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$y'' - q(x)y + \lambda y = 0, \tag{3}$$

donde $\lambda$ es un parámetro complejo, $q(x)$ es real, y la función incógnita es de clase 2 en un intervalo $[a,b]$ y satisface unas condiciones de contorno

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \qquad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

Ch. Sturm (1836) y J. Liouville (1837) desarrollaron una teoría general para abordar este tipo de problemas (llamados desde entonces *problemas de Sturm-Liouville*). Los resultados obtenidos tuvieron una gran influencia en el desarrollo posterior. La contribución principal de Sturm fue la demostración de que el problema planteado sólo tiene solución para una sucesión estrictamente creciente, $(\lambda_n)$, de valores *reales* del parámetro $\lambda$ (los *autovalores* del problema), con lo que se sientan las bases de la moderna teoría espectral. Las propiedades de ortogonalidad de las correspondientes autofunciones $(u_n)$, llevaron a Liouville a tratar de generalizar el desarrollo en serie de Fourier, y expresar cualquier función continua $u$ como una serie $\sum a_n u_n$, donde

$$a_n = \frac{\int u u_n}{\int u_n^2}$$

(nótese la analogía con los coeficientes de Fourier). Liouville logra demostrar la convergencia de la serie, siempre que la serie de Fourier de $u$ sea convergente. Finalmente, la demostración de que la función $U = \sum a_n u_n$ coincide con $u$ se reduce a probar que las relaciones $\int_a^b (U-u)u_n = 0$ para todo $n$, implican $U = u$ (primera aparición de la propiedad de *completitud* de un sistema ortonormal), lo que sólo logra demostrar Liouville bajo hipótesis restrictivas. A lo largo de este estudio, aparece por primera vez una ecuación integral *de segunda especie* (terminología de Hilbert), es decir, en la que la función incógnita aparece tanto dentro como fuera del signo integral. Asímismo, se obtienen también por primera vez propiedades de las soluciones sin integración explícita de las mismas.

Gran parte de los esfuerzos de los analistas del XIX, se dirigieron a tratar de extender la teoría de Sturm-Liouville para distintos tipos de ecuaciones en derivadas parciales con 3 o más incógnitas.

### 4.- El Cálculo de Variaciones y el Problema de Dirichlet.

Probablemente los antecedentes más claros del Análisis Funcional se pueden encontrar en el Cálculo de Variaciones. Con este nombre se conoce una serie de problemas en los que se trata de maximizar o minimizar no ya una función real definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, sino una expresión del tipo

$$J(\varphi) = \int_a^b F(\varphi(x), \varphi'(x), \dots)\, dx,$$

siendo $F$ una función regular, y las "variables" $\varphi$ un adecuado conjunto de curvas regulares parametrizadas en $[a,b]$. Es en este contexto donde aparece primero la idea de *campo funcional*, como conjunto de funciones admisibles, y la de *distancia entre funciones* . Consideremos, por ejemplo, el problema de encontrar una función que minimice el funcional

$$J(\varphi) = \int_a^b F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\, dx \tag{4}$$

cuando $\varphi$ recorre el conjunto de "funciones admisibles" formado por las funciones de clase 2 sobre $[a,b]$ que toman valores fijos en los extremos $\varphi(a) = c$ y $\varphi(b) = d$. Si $\varphi_0$ minimiza a (4), ha de ser $J(\varphi) \geq J(\varphi_0)$ para toda $\varphi$ admisible. Parece natural considerar funciones "próximas" a $\varphi_0$ las de la forma

$$\varphi_\epsilon(x) = \varphi_o(x) + \epsilon\eta(x), \tag{5}$$

con $\eta$ de clase 2 y tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Es obvio entonces que la expresión $H(\varepsilon) = J(\varphi_\varepsilon)$ debe tener un mínimo en $\varepsilon = 0$, luego $\partial H/\partial\varepsilon\,|_{\varepsilon=0} = 0$, para todo $\eta$ (en lenguaje actual, la derivada de Gateaux de $J$ es 0 en $\varphi_0$ ). Tras una integración por partes, se obtiene la famosa *Ecuación de Euler*:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'}\right) = \frac{\partial F}{\partial \varphi}. \tag{6}$$

Habitualmente, por la naturaleza del problema concreto estudiado, se podía establecer a priori la existencia de una solución admisible, que, por tanto, había que buscar entre las soluciones de la ecuación diferencial (6).

En el caso general, para estudiar problemas de extremos de funcionales de la forma (4), se solía razonar por analogía al caso de funciones reales. Así, por ejemplo, se solía admitir como evidente que si $F$ estaba acotada, *$J$ alcanzaba su máximo o mínimo en alguna función admisible.* Sin embargo, el programa de rigorización del Análisis iniciado por Weierstrass, puso pronto de manifiesto la debilidad de estos argumentos. Así, por ejemplo, tratemos de minimizar la expresión

$$J(\varphi) = \int_{-1}^{1} [x^2 \varphi'(x)]^2 \, dx \tag{7}$$

entre las funciones $\varphi$ de clase 1 en [-1,1], tales que $\varphi(-1) = a \neq b = \varphi(1)$ (Weierstrass, 1870). Para cada $\varepsilon < 0$, la función

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\frac{\arctan(x/\epsilon)}{\arctan(1/\epsilon)}$$

es admisible y cumple que $\lim_{\varepsilon \to 0} J(\varphi_\varepsilon) = 0$, luego $\inf J(\varphi) = 0$. Pero si $\varphi \in C^1([-1,1])$ es tal que $J(\varphi) = 0$, de la continuidad de $\varphi'$ resulta que ha de ser $\varphi' = 0$ en [-1,1], y por tanto $\varphi$ es constante. Así pues, ¡no hay ninguna función admisible en donde $J$ alcance su mínimo!.

Además de sus aplicaciones geométricas y físicas, el Cálculo de Variaciones está íntimamente ligado a uno de los problemas más importantes del Análisis del siglo XIX: el llamado *Problema de Dirichlet.* Este problema (para la ecuación de Laplace) consiste en encontrar una función $u$, armónica en un dominio $\Omega$ (del plano, por ejemplo; e.d., verificando $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en $\Omega$ ), que toma valores prefijados en la frontera $\Gamma$ de $\Omega$ . Este problema y su análogo en 3 o más variables, está relacionado con multitud de problemas físicos (cálculo de potenciales, etc.) y matemáticos, y a lo largo del siglo XIX se hicieron muchos inter tos para solucionarlo. Citemos, por ejemplo, la conocida fórmula de Poisson, que resuelve el problema cuando $\Omega$ es el disco unidad y los valores frontera son suficientemente regulares. Pero el método que nos interesa destacar ahora es el llamado *Principio de Dirichlet,* según el cual la solución del problema es la función $u$ tal que su restricción a $\Gamma$ es el valor prefijado, digamos $f$, y hace mínima la llamada *integral de Dirichlet*:

$$D(v) = \int\int_{\Omega} \left[ (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 \right] \, dx \, dy \tag{8}$$

en el conjunto $\mathcal{F} = \{ v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) : v \mid_\Gamma = f$ y $D(v) < \infty \}$. En efecto, *si existe* $u \in \mathcal{F}$ que hace mínima a $D$ sobre $\mathcal{F}$, y *además* $u$ *es de clase 2 en* $\Omega$, la ecuación de Euler implica entonces que $\Delta u = 0$ en $\Omega$.

Este principio fue ya utilizado por Gauss en relación con problemas de determinación de funciones analíticas en 1839, y posteriormente por Lord Kelvin en 1847, en conexión con la teoría del potencial. El nombre de *principio de Dirichlet* fue dado por Riemann, quien lo usó en sus importantes trabajos sobre funciones holomorfas y abelianas. La trascendencia de estos resultados, contribuyó decisivamente a la popularización entre la comunidad matemática del principio en cuestión. Puesto que en este caso la función subintegrando en (8) es siempre $\geq 0$, para Riemann era evidente que $D$ alcanzaba su mínimo en $\mathcal{F}$. Sin embargo, pronto se pusieron en evidencia los defectos del argumento utilizado. Así, por ejemplo, F. Prym dio en 1871 un ejemplo de una función continua sobre la circunferencia unidad que no se puede prolongar a una función $v$, continua sobre el disco unidad, de modo que la integral (8) sea finita. ¡Esto prueba que el conjunto $\mathcal{F}$ puede ser vacío, aunque, como en este caso, el problema de Dirichlet tenga solución!. Sin embargo Poincaré probó que, para poder resolver el problema de Dirichlet, se podía suponer siempre que la función f prefijada era de clase 2 y estaba definida en un entorno de $\Omega$..

Así pues, bajo condiciones "razonables", la mayor dificultad en la demostración del principio de Dirichlet, estriba en probar que el mínimo de (8) *se alcanza en alguna función admisible.* (Por otro lado, la necesidad de imponer alguna restricción a la frontera del dominio, fue puesta en evidencia por los ejemplos de problemas de Dirichlet insolubles dados por Zaremba (1911) y Lebesgue (1912). Este último ejemplo es especialmente contundente, pues el dominio en cuestión (el interior de la esfera de radio 1 en $\boldsymbol{R}^3$, que queda fuera de la "espina de Lebesgue",

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = \exp(-\frac{1}{z}), \quad z > 0),$$

es homeomorfo a una bola.

Los esfuerzos de Weierstrass y su escuela (Du Bois-Reymond, Zaremba, etc.) consiguieron fundamentar rigurosamente la mayor parte de los resultados y argumentos clásicos del Cálculo de Variaciones, salvo el principio general de existencia de extremo. Desde nuestra perspectiva, este fallo es perfectamente comprensible: los teoremas generales que implican la existencia de extremos de una función real (continua), están basados en la noción de *compacidad*. De hecho, la primera demostración rigurosa del principio de Dirichlet, dàda por Hilber alrededor de 1900, se basa en la posibilidad de extraer una subsucesión uniformemente convergente de una sucesión $(u_n) \subseteq \mathcal{F}$ tal que $(D(u_n)) \rightarrow \inf \{D(v) : v \in \mathcal{F}\}$. Para ello, Hilbert tuvo que redescubrir una versión del que puede considerarse uno de los primeros teoremas del Análisis Funcional: el teorema de Ascoli-Arzelá.

Uno de los primeros problemas planteados con la rigorización del Análisis, fue estudiar condiciones bajo las cuales el límite (puntual) de una sucesión de funciones, conserva las buenas propiedades que pudieran tener las funciones de la sucesión (continuidad, derivabilidad, etc.) Los primeros intentos en esta dirección, consistieron en imponer condiciones más restrictivas sobre la forma de converger de la sucesión. Así surgió la noción de *convergencia uniforme* (Weierstrass, 1841; Stokes, 1847; Von Seidel, 1848; Cauchy, 1853). La postura de los italianos Dini, Ascoli y Arzelá, fue radicalmente diferente. En lugar de modificar la noción de convergencia empleada, dieron una condición general sobre el conjunto formado por la sucesión de funciones (la *equicontinuidad*: Ascoli, 1883), de tal modo que el límite puntual es necesariamente continuo. Los trabajos posteriores permitieron demostrar que toda sucesión equicontinua de funciones acotadas sobre un cerrado y acotado de $\boldsymbol{R}^n$, posee una subsucesión uniformemente convergente extendiendo así el clásico teorema de Bolzano para conjuntos acotados de $\boldsymbol{R}$ a conjuntos de funciones. Una versión de este teorema de compacidad en espacios funcionales es la que redescubrió Hilbert para su demostración del Principio de Dirichlet.

## 5.- Las ecuaciones integrales y su influencia en el desarrollo del Análisis Funcional.

El ejemplo más representativo y, probablemente, más influyente en el establecimiento del Análisis Funcional, es el de las Ecuaciones Integrales. A lo largo del siglo XIX se habían planteado algunas ecuaciones integrales especiales, habitualmente en relación con cuestiones de la Física. Así, por ejemplo, Abel había resuelto en 1823 la ecuación

$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy,$$

relacionada con la tautócrona. Este es un ejemplo de *ecuación integral de primera especie* en notación de Hilbert, ya que la función incógnita $\phi\ (x)$ aparece sólo bajo el signo integral. Otra importante clase de ecuaciones integrales aparece en relación con el llamado *método de Beer-Neumann* para la solución del problema de Dirichlet. En efecto, en 1865 A. Beer interpreta el problema de Dirichlet como la obtención del potencial correspondiente a una capa de "dipolos" normal en cada punto a la superficie $\Gamma$ del dominio $\Omega$ (véase la Sección 4), reduciendo el problema al cálculo de una función de densidad $\sigma$ sobre $\Gamma$ adecuada. Si $\Gamma$ es suficientemente regular, $\sigma$ debe verificar una ecuación del tipo

$$\sigma(x) + \int_a^b k(x,y)\sigma(y)\, dy = f(x), \tag{9}$$

siendo $k$ un núcleo continuo y simétrico, y $f$ la función dada sobre $\Gamma$. Esta es una *ecuación integral de segunda especie*, pues la incógnita aparece tanto dentro como fuera de la integral.

Si consideramos la integral como un operador sobre un cierto espacio funcional, la ecuación (9) toma la forma

$$(I + K)\sigma = f,$$

cuya solución formal es

$$\sigma = (I + K)^{-1} f = f - Kf + K^2 f - K^3 f + \dots$$

Aplicando esta idea, Beer utiliza el "método de las aproximaciones sucesivas", definiendo inductivamente $\sigma_0 = f$, y $\sigma_n = (-K)\,\sigma_{n-1} = (-K)^n f$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ converge en algún buen sentido a una función $\sigma$, ésta es la solución. Pero Beer no pudo probar la convergencia. C. Neumann utilizó la misma idea en 1877, obteniendo algunos éxitos parciales para dominios *convexos y acotados*.

Fue en 1888 cuando P. du Bois-Reymond sugirió el nombre de *ecuaciones integrales* para designar este tipo de problemas, y propuso desarrollar una teoría general de tales ecuaciones como método alternativo para resolver problemas de ecuaciones diferenciales.

Los primeros resultados generales en esta dirección, fueron obtenidos por J.M. Le Roux (1894) y V. Volterra (1896). Ambos establecieron teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones del tipo

$$f(x) + \int_a^x k(x,t) f(t)\, dt = g(x),$$

mediante hipótesis adecuadas sobre el núcleo $k$. Los resultados son muy similares, pero el trabajo de Volterra tuvo una mayor influencia posterior, al destacar las propiedades algebraicas del operador, lo que le permite obtener la solución en términos de una nueva ecuación integral de segunda especie, cuyo núcleo (*núcleo resolvente*) viene dado por la suma de la serie de núcleos iterados. Al final de una de las notas de Volterra, se hace notar la semejanza de la ecuación integral considerada con un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes triangular (sustituyendo la integral por su sumas de Riemann). Esta aparentemente inocua observación, iba a influir decisivamente en el trabajo fundamental de Fredholm.

I. Fredholm, estudiante de Mittag-Leffler y más tarde su colega en Estocolmo, realizó una visita a París en 1899, entrando en contacto con Poincaré y otros famosos matemáticos de la época. En 1900 publicó una nota, titulada *Sur une nouvelle méthode pour la resolution du problême* *de Dirichlet*, completada dos años más tarde por un artículo en *Acta Mathematica,* que iban a provocar un gran impacto en la Comunidad Matemática. Como indica el título de la nota de 1900, la intención original de Fredholm es dar un nuevo método de resolución del problema de Dirichlet. Para ello, considera el método de Beer-Neumann y trata de resolver la ecuación integral (9). Siguiendo a Poincaré, introduce un parámetro complejo $\lambda$ y escribe la ecuación de la forma

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt = g(x), \tag{10}$$

para estudiar las propiedades de la solución en función de $\lambda$. A partir de aquí, menciona brevemente la analogía de (10) con un sistema lineal, y empieza a escribir sus fórmulas de "determinantes". Fue posteriormente, en una conferencia dada en 1909, cuando Fredholm reconoció la gran influencia que tuvo la nota de Volterra en su trabajo. Podemos intentar reconstruir el argumento seguido por Fedholm.

En primer lugar, reemplacemos la ecuación (10) por las sumas de Riemann asociadas a una partición del intervalo $[a,b]$ en n partes iguales $a < y_1 < \ldots < y_n = b$:

$$f(y_j) + \lambda \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} k(y_i, y_j) f(y_i) = g(y_j), \; 1 \le j \le n. \tag{11}$$

A continuación, escribamos el determinante del sistema como suma de menores principales, utilizando una fórmula debida a Von Koch:

$$1 + \lambda \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} k(y_i, y_i) + \lambda^2 \frac{(b-a)^2}{2!n^2} \sum_{k_1,k_2} \begin{vmatrix} k(y_{k_1}, y_{k_1}) & k(y_{k_1}, y_{k_2}) \\ k(y_{k_2}, y_{k_1}) & k(y_{k_2}, y_{k_2}) \end{vmatrix} + \cdots$$

Si ahora hacemos tender $n$ a infinito, formalmente las sumas se convierten en integrales, y obtenemos lo que Fredholm llama el "determinante" del núcleo:

$$\Delta(\lambda) = 1 + \lambda \int_a^b k(s,s) ds + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b k \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 + \cdots,$$

donde

$$k \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} = \det(k_{ij}), \text{ siendo } k_{ij} = k(s_i, t_j).$$

Fredholm escribe a continuación el "primer menor" $D(x,y,\lambda)$, usando el mismo método de paso al límite formal en el sistema lineal, y prueba que ambas series así definidas convergen uniformemente en cada compacto de **C**. En particular, $\Delta$ es una función entera. Por tanto, sus ceros son aislados y a lo más existen en cantidad numerable. En completa analogía con la teoría de sistemas de ecuaciones lineales, prueba a continuación:

(I) Si $\Delta(\lambda_0) \neq 0$, la ecuación (10) tiene una solución única

$$f = (I - \lambda_o R_{\lambda_o})g,$$

donde $R_{\lambda_0}$ es el operador integral con núcleo

$$r(x,y,\lambda_o) = \frac{D(x,y,\lambda_o)}{\Delta(\lambda_o)}.$$

Además, si la ecuación homogénea asociada a (10) sólo tiene la solución trivial para $\lambda = \lambda_0$, entonces necesariamente $\Delta(\lambda_0) \neq 0$, y por tanto existe en este caso solución única de (10) para cada $g$ continua.

Como consecuencia del principio del máximo de funciones armónicas, resulta que el problema de Dirichlet tiene como única solución $u = 0$ cuando el valor en $\Gamma$ es 0. De ello deduce Fredholm inmediatamente que *el problema de Dirichlet tiene solución única para todo dominio $\Omega$ acotado del plano, con frontera suficientemente regular.*

En el artículo de Acta Mathematica de 1903, Fredholm completó los resultados obtenidos, probando:

(II) La ecuación (10) tiene solución única, para cada función continua $g$, si y sólo si la ecuación homogénea posee solamente la solución trivial. Esto sucede si y sólo si $\Delta(\lambda) \neq 0$.

Además, si $\lambda$ es un cero de orden $m$ de $\Delta$, la ecuación homogénea asociada a (10) tiene exactamente $m$ soluciones linealmente independientes. En este caso, (10) tiene solución si y sólo si $g$ satisface la "condición de ortogonalidad".

$$\int_a^b g(x)h(x)\,dx = 0$$

para toda solución $h$ de la "ecuación transpuesta" homogénea

$$h(x) + \lambda \int_a^b k(y,x)h(y)\,dy = 0,$$

lo que supone una analogía total con la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales. La elegancia y potencia de los resultados de Fredholm causaron un profundo impacto, poniendo la teoría de ecuaciones integrales en el centro de interés de los matemáticos contemporáneos. Estos resultados supusieron el punto de partida de la moderna teoría espectral e influyeron decisivamente en el desarrollo posterior del Análisis Funcional.

## 6.- La contribución de Hilbert. El establecimiento del Análisis Funcional.

Los sensacionales resultados de Fredholm se extendieron rápidamente. En el invierno de 1900-1901 E. Holgrem expone estos resultados en Göttingen, en el Seminario de Hilbert, quien se interesó vivamente por el tema y entre 1904 y 1910 publicó seis artículos sobre el Ecuaciones Integrales en el *Göttingen Nachrichten*, que fueron posteriormente reunidos en forma de libro, en 1912. El libro contiene también numerosas aplicaciones matemáticas y físicas. En él aparecen nociones y directrices novedosas que posteriormente, en manos de matemáticos como E. Schmidt y F. Riesz, van a convertirse en los fundamentos del Análisis Funcional.

El primer artículo de Hilbert se refiere a la Ecuación Integral (10) con núcleo continuo y *simétrico,* es decir, $k(x,y) = k(y,x)$. Reemplazando la integral por las sumas de Riemann, Hilbert obtiene de (10) el sistema (11), que resuelve en forma de cociente de determinantes. Haciendo después tender $n$ a infinito, se obtiene de esta manera la fórmula probada por Fredholm. Pero Hilbert llega más lejos. En efecto, el análisis del sistema (11) le lleva a introducir las formas cuadráticas.

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K(x_i, x_j) x_i x_j,$$

y su posterior reducción a sus ejes principales. A continuación, utilizando la misma idea del paso de lo finito a lo infinito, demuestra que el paso al límite cuando $n \to \infty$, funciona, y le permite obtener al menos un autovalor (en términos modernos, el inverso de un autovalor) de la E.I. (10), probar la ortogonalidad de las autofunciones $\psi_n$ y $\psi_m$ , correspondientes a autovalores distintos y la generalización del teorema de reducción a los ejes principales de una cuadrática

$$\int_a^b \int_a^b k(x,y) f(x) h(y)\, dx\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (f, \psi_n)(h, \psi_n), \tag{12}$$

donde

$$(f, \psi_n) = \int_a^b f(s) \psi_n(s)\, ds$$

son los "coeficientes de Fourier" de la función $f$ respecto al sistema ortogonal normalizado $(\psi_n)$ , $(\psi_n\ \psi_m) = \delta_{nm}$ y el segundo miembro de (12) converge uniformemente cuando $f$ y $g$ varían, satisfaciendo la condición $\int_a^b f^2 \leq 1$, $\int_a^b g^2 \leq 1$,(primera aparición de la "bola unidad en el espacio de Hilbert").

También trató Hilbert de extender estos resultados para núcleos menos regulares, pero la solución completa no se lograría hasta el descubrimiento del llamado "Teorema de Fischer-Riesz" en 1907.

Hilbert demostró también que toda función de la forma

$$g(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy \quad (f \text{ continua}),$$

tenía un desarrollo en serie de autofunciones

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(g,\psi_n)\psi_n(x),$$

absoluta y uniformemente convergente, lo que permitió abordar la resolución de (10), vía la representación (12). La validez de este desarrollo para *toda función continua* fue probada por uno de los mejores discípulos de Hilbert, E. Schmidt, en su Tesis (1905).

Los trabajos segundo y tercero de Hilbert sobre Ecuaciones Integrales se dedican a aplicar los resultados a distintos problemas de contorno en ecuaciones diferenciales y a la teoría de Sturm-Liouville.

El artículo cuarto es uno de los más apreciados de Hilbert. En él aparece claramente el espíritu actual del Análisis Funcional y la Teoría Espectral. En efecto, en este artículo Hilbert da un salto cualitativo: abandona deliberadamente el marco de las ecuaciones integrales y trata de crear una teoría general de formas bilineales y cuadráticas de infinitas variables que es aplicable en particular al estudio de E.I. En efecto, Hilbert introduce la noción de "sistema ortogonal completo de funciones" como una sucesión $(\psi_n)$ de funciones continuas en $[a,b]$ tal que $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$ y que cumple la "relación de completitud" siguiente:

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\psi_n)(g,\psi_n),$$

para todo par de funciones continuas $f$ y $g$. Si $(\psi_n)$ es uno de tales sistemas (p.e., el sistema trigonométrico), y $f$ es una solución de (10) con $\lambda = 1$, entonces si consideramos los "coeficientes de Fourier"

$$k_{pq} = \int_a^b \int_a^b k(x,y)\psi_p(x)\psi_q(y)\,dx\,dy, \quad b_p = (g,\psi_p), \quad x_p = (f,\psi_p),$$

los $(x_p)$ satisfacen el sistema infinito

$$x_p + \sum_{n=1}^{\infty} k_{pn} x_n = b_p \ (p = 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

De la desigualdad de Bessel resulta que $\sum \sum k_{pq}^2 < \infty$, $\sum b_p^2 < \infty$ y $\sum x_p^2 < \infty$. Recíprocamente, si $(x_p)$ satisface $\sum x_p^2 < \infty$ y es solución de (14), la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \int_a^b k(x, y) \psi_n(y)\, dy$$

converge absoluta y uniformemente, y define por tanto una función continua $u(x)$. Es inmediato que la función $f = g - u$ satisface $(f, \psi_p) = x_p$ y, de la completitud del sistema $(\psi_n)$, resulta que $f$ es solución de (10).

A partir de aquí, Hilbert abandona deliberadamente el punto de vista de las Ecuaciones Integrales para concentrarse en el estudio de la forma cuadrática general

$$Q(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q \qquad (k_{pq} = k_{qp}),$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. La forma cuadrática es "completamente continua" si

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(x) = Q(x),$$

uniformemente para todos los $x = (x_n)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1$, donde

$$Q_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q.$$

(Nótese que esta condición permite asegurar el éxito del método de truncamiento de Fourier, siempre que las soluciones parciales obtenidas tengan normas en $l_2$ uniformemente acotadas, en lenguaje actual).

Es obvio que el espacio real $l_2$ de las sucesiones $(x_n)$ de números reales de cuadrado sumable, está implícito en todos estos desarrollos. Más aún, por analogía con la norma euclídea en $\boldsymbol{R}^n$, Hilbert introduce en $l_2$ la distancia

$$d(x,y) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \right)^{1/2},$$

y extiende, para funciones ecalares sobre $l_2$, las nociones de continuidad, límites, etc. Rápidamente aparece el hecho crucial de que no se cumple el análogo del teorema de Bolzano-Weierstrass en la "bola unidad" de $l_2$, lo que lleva a Hilbert a considerar el equivalente a la noción actual de "topología débil" en $l_2$, y prueba su famoso *principio de elección*, que permite extraer de cada sucesión acotada en $l_2$ una subsucesión convergente "débilmente". Hilbert generaliza en este contexto las transformaciones ortogonales y prueba que toda forma cuadrática completamente continua puede reducirse a sus ejes por una transformación ortogonal:

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^2.$$

Además, en el caso completamente continuo, Hilbert probó que el sistema infinito (14) se comporta exactamente igual que los sistemas lineales con un número finito de incógnitas; O bien el sistema homogéneo tiene como única solución la trivial, en cuyo caso (14) tiene solución única para cada $b = (b_p) \in l_2$, o bien el sistema homogéneo tiene un número finito de soluciones linealmente independientes, en cuyo caso el sistema transpuesto tiene el mismo número de soluciones linealmente independientes y (14) tiene solución si y sólo si $b = (b_p)$ es ortogonal a todas las soluciones del sistema transpuesto.

Hilbert también consideró el caso de formas cuadráticas no necesariamente completamente continuas, sino simplemente continuas (o equivalentemente, acotadas sobre la bola unidad) e incluso formas no acotadas, estableciendo así el germen de la moderna teoría espectral. De hecho, en el trabajo de Hilbert aparecen ya (en términos de la forma cuadrática asociada) algunas de las clases más importantes de operadores ( de Hilbert-Schmidt, nucleares, etc.), aunque la formulación moderna en lenguaje de operadores lineales, en lugar de formas cuadráticas, se debe a F. Riesz (véase la próxima sección).

Es evidente, con una perspectiva actual, que estos resultados están prefigurando la teoría de los espacios de Hilbert en su versión canónica de espacio $l_2$. Por otro lado, en 1906 aparece también la famosa Tesis Doctoral de M. Fréchet "Sur quelques points du calcul fonctionnel", que tuvo una tremenda influencia, tanto para el desarrollo del Análisis Funcional como para el de la Topología. En su Tesis, Fréchet introduce la noción abstracta de *distancia* en un conjunto, lo que permite extender las nociones habituales de entornos, límites, continuidad, etc. en conjuntos abstractos. También introdujo Fréchet las nociones de *compacidad*, *completitud* y *separabilidad* , y las estudió en distintos espacios funcionales ($C$ ([$a,b$]), $H$ ($D$ ), $B$ ([$a,b$]), etc.), mostrando la importancia de las mismas.

Estas ideas topológicas se difundieron rápidamente. No es extraño, pues, que se intentaran aplicar en el contexto de los importantes trabajos desarrollados por Hilbert. Este programa fue llevado a cabo por el mismo Fréchet y uno de los mejores discípulos de Hilbert: E. Schmidt quien, en un artículo publicado en 1908, definió el "espacio de dimensión infinita" $l_2$, con las nociones actuales de producto escalar, norma, ortogonalidad, etc. Introdujo también el lenguaje geométrico moderno, probando el teorema de la proyección ortogonal y el proceso de ortogonalización que lleva su nombre. Este lenguaje geométrico le permitió abordar el sistema de ecuaciones lineales más general posible en $l_2$:

$$(a_p, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} x_n = c_p \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

siendo $a_p = (a_{pn}) \in l_2$. La manera de resolver este problema recuerda el método empleado por Fourier para resolver problemas concretos análogos (véase Sección 3): Primero Schmidt "trunca" el sistema y, utilizando la proyección ortogonal, obtiene una solución $x_m$ de norma mínima del sistema truncado

$$(a_p, x) = c_p \quad (p = 1, 2, \ldots, m).$$

Si esas soluciones tienen normas uniformemente acotadas, el "principio de elección" demostrado por Hilbert (es decir, la compacidad débil de la bola unidad de $l_2$), le permite extraer una subsucesión que converge a una solución del problema. Esta resulta ser condición necesaria y suficiente, y puede reformularse (lo que hace Schmidt) en términos de los datos del problema, lo que permite su solución completa y elegante. Como veremos más adelante, este argumento se va a repetir en diferentes contextos. La búsqueda de resultados análogos al "principio de elección" de Hilbert en otros espacios normados va a ir conformando la idea general de la topología débil y las técnicas de dualidad.

Otros dos jóvenes matemáticos, E. Fischer y F. Riesz, también compartieron esta visión geométrica y topológica del espacio de Hilbert, lo que les llevó a descubrir (independientemente) el llamado "teorema de Fischer-Riesz", que a su vez establece una inesperada relación de estos temas con otro gran descubrimiento de la época: la *teoría de integración de Lebesgue*. El teorema en cuestión establece que, fijado un sistema ortonormal completo de funciones $(\psi_n)$ , la aplicación $f \rightarrow ((f, \psi_n))_{n=1}^{\infty}$ es un *isomorfismo hilbertiano* entre el espacio $L_2$ ([$a,b$]) de las (clases de) funciones de cuadrado integrable Lebesgue sobre [$a,b$] (que se define en estos trabajos), y el espacio de Hilbert $l_2$. Como importante subproducto, resulta que los resultados de Hilbert se pueden aplicar a cualquier ecuación integral con núcleo $k \in L_2([a,b]^2)$, objetivo perseguido infructuosamente por distintos matemáticos de la época (Hadamard y Hilbert entre ellos). Las consecuencias de este resultado estructural, hicieron ver la importancia del nuevo Análisis, y abrieron el camino hacia la introducción de los espacios $L_p$ y $l_p$ por Riesz y, en definitiva, la aparición de la noción general de espacio normado.

## 7.- Los años decisivos. La aportación de F. Riesz.

Probablemente, uno de los mayores responsables del desarrollo del Análisis Funcional, tanto por la variedad de aplicaciones como por la profundidad y originalidad de sus contribuciones, es el matemático húngaro Frédéric Riesz (1880-1956). Ya hemos comentado el famoso teorema de Riesz- Fischer, descubierto independientemente por Fischer y Riesz (a la sazón Profesor de Enseñanza Media en una pequeña ciudad de Hungría) en 1907, y que supuso la primera contribución de Riesz en este campo. En el mismo año, Fréchet y Riesz, independientemente, obtienen la representación de cualquier forma lineal continua $T$ sobre el espacio $L_2$ en la forma

$$T(f) = (f,g) = \int f(x)g(x)\,dx$$

para alguna $g$ del mismo espacio.

Dos años más tarde, en 1909, Riesz resuelve completamente un problema abordado por Hadamard y Fréchet en 1903 y 1904, probando que cualquier funcional lineal continuo $T$ sobre el espacio $C([a,b])$ de las funciones reales continuas sobre $[a,b]$, puede escribirse en forma de integral de Stieltjes:

$$T(f) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x),$$

donde $\alpha$ es una función de variación acotada. Como el mismo Riesz indica, la correspondencia $T \leftrightarrow \alpha$ puede hacerse biyectiva, (imponiendo, por ejemplo, que $\alpha$ sea continua a la derecha y $\alpha(a) = 0$). Este es el famoso "teorema de representación de Riesz", que tendría gran influencia en el desarrollo posterior de la teoría de la integración abstracta. Punto de partida de sucesivas generalizaciones por Radon y muchos otros, este teorema se tomó como definición básica en la "Teoría de medidas de Radon" desarrollada por el grupo Bourbaki a mediados de los 40. Por otro lado, el teorema significó un paso importante en la clarificación de las ideas de dualidad, ya que es el primer ejemplo en el que el dual topológico no puede identificarse con el espacio base (como sucedía con $l_2$ y $L_2$ ).

En 1910, Riesz introduce los espacios $L_p$ ,$1< p< \infty$ , como generalización natural de $L_2$. Se plantea Riesz la resolución de un sistema de infinitas ecuaciones del tipo

$$\int_a^b f_i(x)g(x)\,dx = c_i \quad (i \in I), \tag{15}$$

donde las $f_i$ y los escalares $c_i$ son los datos, y se trata de encontrar una solución $g$. Después de referirse a trabajos precedentes de Hilbert, Schmidt y Fisher, quienes consideraron el caso $f \in L_2$ ([$a$,$b$]) ,Riesz estudia el problema para una clase más general de funciones (no usó la palabra "espacio"), a saber, la clase ("Klasse") de funciones $f$ tales que $|f|^p$ es integrable en sentido de Lebesgue, que denotó por $[L^p]$ ($p > 1$) . Riesz hace notar la linealidad de esta clase. Para que el problema tenga siempre sentido, Riesz muestra que la solución $g$ debe buscarse en la clase $[L^q]$, siendo $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Para $p = 2$, Riesz hace notar que sus resultados pueden deducirse de los de Schmidt (véase final de la Sección 6) via el teorema de Fischer-Riesz. Introduce la norma usual en estos espacios y, utilizando la idea de Schmidt, logra probar la existencia de soluciones de norma mínima de un número finito de ecuaciones. Para seguir el paralelismo con el método de Schmidt, necesita probar un "principio de elección" en $L_p$ ([$a$,$b$]), lo que le lleva a introducir la noción de convergencia débil en la forma

$$(f_n) \xrightarrow{w} f \iff \int_a^x f_n(t)\,dt \to \int_a^x f(t)\,dt, \ \forall x \in [a,b].$$

(Posteriormente, Riesz prueba que esto es equivalente a que $\int f_n g$ converja a $\int fg$, para cada $g$ de $L_q$ ([$a$,$b$])). De esta manera, aunque sin usar la palabra dual, Riesz establece la dualidad $L_p^* = L_q$ ($p$ y $q$ conjugados) y prueba que toda sucesión en $L_p$ acotada en norma, posee una subsucesión débilmente convergente a alguna función de $L_p$ . La condición necesaria y suficiente para que (15) tenga solución, se traduce entonces, como en el caso de Schmidt, en una condición de acotación uniforme de las normas de las soluciones de los sistemas "truncados", que, a su vez, puede expresarse en términos de los datos únicamente.

Esta idea se va a repetir varias veces en la obra de Riesz. Por ejemplo, es central en el libro *Les Systèmes d'Equations Linéaires à une Infinité d'Inconnues* , publicado por Riesz en París en 1913, y que supone una contribución fundamental al estudio de los sistemas de infinitas ecuaciones lineales, con infinitas incógnitas, de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{in}x_n = c_i \ (i = 1,2,\ldots), \tag{16}$$

donde $a_i = (a_{in}) \in l_p$ (precisamente se definen aquí estos espacios, por analogía a los $L_p$ ) y la solución $x = (x_n)$ se busca en $l_p$ , con $q$ conjugado de $p$. La resolución del problema pasa también por un proceso de truncamiento, más un criterio de compacidad para alguna topología adecuada (en este caso, la topología débil).

Vemos pues que en la obra de Riesz se van conformando nociones básicas del Análisis Funcional, como son la noción de norma, espacio dual, convergencia débil, etc. Pero no acaba aquí el trabajo seminal de Riesz, ya que en un artículo fundamental sobre ecuaciones funcionales lineales, publicado en 1918 en *Acta Mathematica*, Riesz crea su famosa *teoría de operadores compactos*, versión lineal de gran parte de las nociones introducidas por Hilbert en su 4º artículo sobre Ecuaciones Integrales, pero sin disponer de la herramienta de la ortogonalidad y la geometría del espacio de Hilbert. Aunque el desarrollo de la teoría lo hace Riesz en un espacio de Banach concreto, el espacio $C([a,b])$, él mismo señala que ésto no es esencial, y los resultados son válidos en otros espacios funcionales. De hecho, toda la teoría se desarrolla en términos de la noción de norma, cuyos axiomas se introducen también en este trabajo, para el caso concreto de $C([a,b])$.

A la vista de la dualidad entre $L_p$ (resp., $l_p$ ) y $L_q$ (resp., $l_q$ ), los problemas (15) y (16) pueden interpretarse también así: *Encontrar una forma lineal continua $T$ que tome los valores prefijados $c_i$ en los elementos dados $f_i$* (o $a_i$ ). Como ya dijimos, éste no fue el punto de vista adoptado por Riesz, pero sí el que, en conexión con el problema (16), tomó el matemático austríaco E. Helly en 1912, quien obtuvo una nueva demostración de los resultados de Riesz. Helly participó en la Primera Guerra Mundial y fue hecho prisionero, por lo que no volvió a la actividad investigadora hasta 1921. En su importante trabajo, dió un salto cualitativo significativo, considerando en lugar de espacios concretos, "espacios normados de sucesiones", es decir subespacios vectoriales de $C^N$ dotados de una cierta noción de norma. En este marco abstracto, investigó las nociones geométricas ligadas a la convexidad, y su relación con la "norma". Llevado por esta idea geométrica, introdujo un cierto "dual" (el equivalente a lo que hoy se conoce como $\alpha$-dual), y planteó por primera vez el problema de la extensión de una forma lineal continua definida sobre un subespacio, a todo el espacio, conservando su norma. La solución general de este problema, en el marco de un espacio normado completo abstracto, fue dada por Hahn en 1927.

Las contribuciones fundamentales a que nos hemos venido refiriendo, preparan el camino para el desarrollo de una teoría general de espacios normados, funcionales y operadores lineales entre ellos. Esto aconteció en la Tesis de S. Banach, defendida en 1920 y publicada dos años después en *Fundamenta Mathematicae*. En la Introducción, Banach declara su intención de demostrar una serie de resultados válidos en distintos "campos funcionales", para lo cual establece un conjunto de teoremas en un marco muy general que, por especialización, dan lugar a los distintos resultados buscados. El marco general en cuestión es precisamente lo que hoy conocemos como espacio normado completo. Banach da la definición axiomática de espacio vectorial real, normado y completo y la Tesis contiene, entre otros, el *principio de acotación uniforme* y la forma general del *principio de contracción* en espacios métricos completos.

En 1922 se publica el libro *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, por P. Levy, alumno de Hadamard, en donde por primera vez aparece el nombre de *Análisis Funcional*. Con su bautismo oficial, podemos considerar, pues, que termina el proceso fundacional.

## Bibliografía sucinta

[B] S. BANACH. *Théorie des Opérations Linéaires.* Chelsea, N.Y., 1932.

[BK] G. BIRKHOFF y E. KREYSZIG. *The Establishment of Functional Analysis.* Historia Math., **11** (1984), 258-321.

[Bo] N. BOURBAKI. *Elementos de Historia de la Matemática.* Alianza Ed., Madrid, 1972.

[D1] J. DIEUDONNÉ. *History of Functional Analysis.* North Holland, Amsterdam, 1981.

[D2] J. DIEUDONNÉ (ed.). *Abrég é d'Histoire des Mathématiques 1700-1900.* París, Hermann, 1978.

[DS] N. DUNFORD y J.T. SCHWARTZ. *Linear Operators, Vol. I.* Interscience, New York, 1957.

[M] A.F. MONNA. *Functional Analysis in Historical Perspective.* Oosthoek, Utrecht, 1973.

[RN] F. RIESZ y B. SZG. NAGY. *Leçons d'Analyse Fonctionnelle.* Gauthier Villars, París, 1965.

[T] G. TEMPLE. *100 Years of Mathematics.* Duckworth, Londres, 1981.