Las construcciones de los números reales

POR MANUEL LÓPEZ PELLICER *

1. Introducción

Vamos a exponer las construcciones de los números reales hechas en el siglo XIX. Primero expondremos sus antecedentes en álgebra y en análisis, analizando la relación entre la aritmetización del análisis y el desarrollo del número real. También consideraremos otros antecedentes relacionados con algún aspecto de la física matemática.

Incluimos en los antecedentes las construcciones dadas por Ohm (1829), Bolzano (1835) y Hamilton (1833 y 1835) por tratarse de inicios de construcciones, con algunos fallos de rigor.

Las construcciones que detallaremos serán las de Dedekind, Weierstrass, Méray y Cantor, también llamada de Cantor-Heine, hechas en la segunda mitad del siglo XIX, y procuraremos ser respetuosos con las notaciones matemáticas de esa época, si bien ese respeto histórico lo subordinaremos al intento de conseguir una exposición lo más clara posible.

Finalmente expondremos algunos resultados obtenidos después de esas construcciones y alguna nota biográfica.

2. Antecedentes de las construcciones del número real

2.1 Antecedentes en álgebra

La densidad de los racionales en R pudo hacer pensar en la antigüedad que la abcisa de cualquier punto era racional, y así en el papyrus Rhind, 1650 años antes de Cristo, se escribe $\pi = 3{,}16$. Este error conlleva otro en el mismo documento: el que se proponga la construcción de un cuadrado de lado 8/9 del diámetro de un círculo como solución al problema de su cuadratura, consistente en la construcción con regla y compás de un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. La regla, el compás y el teorema de Pitágoras permitieron dibujar un punto de abcisa $\sqrt{2}$, que no es racional. Así nacieron los números irracionales.

En 1683 hay un intento de Tschirnhaus de expresar por radicales las raíces de un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros que pudo ser motivado

---

* Académico Correspondiente.

por la creencia de que las abcisas de los puntos de una recta serían racionales o irracionales expresables por radicales, pues eran muy pocos los números utilizados que no tuviesen representación racional o por radicales. Uno era π y otro el número e introducido por Navier en 1614, de los que no se sabía si eran racionales o irracionales.

Euler prueba en 1737 que e y e^2 son irracionales aproximándolos por fracciones continuas y establece la fórmula $e^{i\pi} = -1$, por la cual desde entonces el estudio de los dos números π y e está estrechamente relacionado. Y así Lambert, con las mismas técnicas de Euler, prueba en 1761 la irracionalidad de π, de e^x y de tgx para todo número racional x distinto de cero.

Los intentos de expresar las raíces de polinomios por radicales continuan con Bezout, quien en 1762 escribe una raíz α de $P(x) = 0$ en la forma $\alpha = A_1 \rho + A_2 \rho^2 + \ldots + A_{n-1} \rho^{n-1}$ donde ρ es una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1, que, por tanto, verifica la relación $1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1} = 0$. La eliminación de ρ entre las dos igualdades da un polinomio en α cuyos coeficientes son polinomios en $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ que se igualan a los coeficientes de $P(z) = 0$. Una nueva eliminación conduce a una ecuación para determinar los A_i que tiene grado 24 cuando $P(x)$ tiene grado 5.

Entre 1770 y 1772 aparecen tres trabajos independientes de Waring, Lagrange y Vandermonde que contienen un estudio sistemático de los métodos de resolución de ecuaciones de grado menor o igual a 4, y de las dificultades encontradas en la resolución de ecuaciones de grado mayor o igual a 5. Recordemos que la fórmula que da las tres raíces de la ecuación de tercer grado $x^3 + px + q = 0$, parece introducir raíces parásitas, pues viene dada por la suma de dos radicales cúbicos, dificultad que se elimina teniendo presente que el producto de los radicales debe ser $-p/3$. Lagrange observa que esos radicales se pueden escribir en la forma $(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)/3$, donde x_1, x_2 y x_3 son las tres raíces de la ecuación y ω es una raíz cúbica de la unidad. Dicho de otra forma, $(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)/3$, no toma más que dos valores entre los seis posibles al permutar x_1, x_2, y x_3. Esto lleva a introducir los famosos **resolventes de Lagrange**

$$y_k = \Sigma \{ \omega_k^h x_h , \ 1 \leq h \leq n \}$$

donde ω_k es una raíz de orden n de la unidad y los x_h son las n raíces de la ecuación $P(z) = 0$. Lagrange prueba que el conocimiento de los y_k determina completamente las raíces x_h. Este método le da las fórmulas de resolución conocidas para las ecuaciones de grados 2, 3 y 4; pero para $n = 5$ le lleva a resolver una ecuación de grado 6, lo que le induce a dudar de la posibilidad de resolver en general por radicales una ecuación de grado mayor o igual a cinco ([33]).

P. Ruffini se propuso demostrar lo que Lagrange no se había atrevido a conjeturar: **La imposibilidad de resolver por radicales una ecuación de grado quinto**. Las cuatro memorias que publicó de 1799 a 1813 contienen variantes de su demostración. En las primeras tiene la dificultad de no usar el lenguaje de la teoría de grupos, expresando sus razonamientos en términos de **números de valores tomados por una función de raíces cuando se las permuta de todas las formas posibles**, tratándose, en esencia, de un estudio del grupo simétrico de 5 elementos. Simplifica bastante su última demostración con la consideración del cuerpo $E_0 = Q(x_1, \ldots, x_n)$ y de los cuerpos E_i, donde E_{i+1} se deduce de E_i añadiéndole una de las raíces de la ecuación $z^{p_i} = b_i$ con $b_i \in E_i$ y p_i primo impar.

Los trabajos de Ruffini tuvieron dos consecuencias muy importantes: Una es que inspiraron a Cauchy en 1813 el estudio de las sustituciones con la notación abreviada $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$, efectuando sus productos y sus potencias, y preparando el camino a Galois, quien introducirá la noción de grupo y obtendrá el criterio necesario de resolubilidad por radicales ya vislumbrado por Abel. La otra es el descubrimiento de que hay números algebraicos, es decir, raíces de los polinomios con coeficientes enteros que no son expresables por radicales.

El álgebra, con sus números irracionales algebraicos, llevó a la necesidad de la construcción previa del conjunto R de los números reales, pues carece de sentido el considerar a algo no definido como raíz de una ecuación. No obstante, en esta época se utilizaba el conjunto R aunque no se le hubiese construido formalmente, y así es como después de los trabajos de Ruffini surgió la conjetura de la existencia de irracionales no algebraicos, cuya solución afirmativa tiene su origen en otro resultado de Lagrange, quien había demostrado que si α es un número cuadrático real irracional, entonces su fracción continua es periódica y existe una constante $c(\alpha) > 0$ tal que

$$| \alpha - p/q | > c(\alpha) q^{-2}$$

para todo número racional p/q. Este resultado fue generalizado en 1844 por Liouville, quien probó que si α es una raíz irracional de un polinomio irreducible de grado $n>1$ con coeficientes enteros, entonces existe una constante $c(\alpha) > 0$ tal que $| \alpha - p/q | > c(\alpha) q^{-n}$ para todo número racional p/q.

El teorema de Liouville es la generalización natural del resultado de Lagrange, radicando su mérito en que Liouville encontró que hay números irracionales para los que la constante $c(\alpha)$ no existe para ningún valor de n. Estos números irracionales no pueden ser algebraicos, y se les llama trascendentes o irracionales trascendentes. Un ejemplo clásico de número trascendente es el irracional

$$\xi = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \dots$$

ya que si $\xi_r = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \dots + 10^{-r!} = p/10^{r!} = p/q$, entonces $|\xi - \xi_r| = |\xi - p/q| < 2\,(10^{-(r+1)!}) < 2q^{-(r+1)}$. Por tanto, fijado n y dado un número $c(\xi)$ se tiene para r suficientemente grande que

$$|\xi - \xi_r| < c(\xi)\, q^{-n}$$

por lo que ξ, por el teorema de Liouville, no puede ser raíz de un polinomio irreducible de grado n con coeficientes enteros; y dado que n es cualquier elemento de N se deduce que ξ es un número trascendente. El conjunto de los números trascendentes es infinito, pues todas las subseries (infinitas) de la serie $10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \dots$ definen números trascendentes.

2.2 Antecedentes en análisis: La aritmetización del análisis.

Vamos a situarnos alrededor de 1800, concretamente en Gauss, cuyas ideas respecto a los límites sufrieron una fuerte transformación en pocos años. En uno de sus primeros trabajos inéditos, sobre 1797, se ocupó de calcular la suma de la serie $0! - 1! + 2! - \dots + (-1)^n\, n! + \dots$. Antes de 1800 en su trabajo inédito *Nociones fundamentales de la teoría de series*, introduce la definición general de sucesión y da las definiciones de límite superior (lím $\{\sup(a_p,\ n \geq p)\}$) y de límite inferior, diciendo que si en una sucesión acotada coinciden el límite superior y el inferior, entonces ese valor común se llamará el límite de la sucesión. Afirma, con gran naturalidad, que si λ es una cota superior de una sucesión y α no es cota superior de esa sucesión sucede que al **recorrer de forma continua todos los valores entre α y λ** se obtiene necesariamente la mínima cota inferior de la sucesión, pareciendo que Gauss no se cuestionó la construcción del conjunto R de los números reales. Este trabajo se encuentra recopilado en [25]. Poco después, el 27 de abril de 1800, aparece en su diario matemático que acababa de demostrar que la serie de término general $a_n \cos(b + nx)$ converge hacia un límite si la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y tiene por límite cero. Este resultado, como otros muchos, no lo publicará, fiel a su tradición que expresa en una carta a Laplace el 30 de enero de 1812 ([25], p. 374] en la que se lee: *"Tengo muchas cosas entre mis papeles, en las que podría perder el orden en la publicación; pero en cualquier caso, prefiero hacer madurar las cosas"*. Y el 5 de mayo de 1812, en carta dirigida a Bessel ([26] criticaba implícitamente su referido trabajo inédito de 1797 escribiendo que no tenía ningún sentido intentar calcular la suma de una serie hipergeométrica cuando $|x| > 1$, diciendo que no era razonable (**quaestionem ineptam**) intentar calcular la suma de una serie divergente. En la misma carta Gauss escribe que si una serie de Taylor de una función $f(x)$ converge en un punto x, necesariamente converge a $f(x)$, error del que Cauchy dará el contraejemplo e^{-1/x^2} en [12]. Y es precisamente al año siguiente, en 1813, cuando Gauss publica su gran memoria sobre la serie hypergeométrica, [24], en la que prueba que para $|x| < 1$ la serie

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{(1)(2)\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{(1)(2)(3)\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots$$

define una función cuyas derivadas sucesivas se obtienen por derivación término a término, haciendo un estudio muy cuidadoso de la convergencia de la serie para $x=1$.

Algunos autores señalan en esta memoria de Gauss, [24], el principio de la época del rigor en análisis con el comienzo de una crítica constructiva frente a los métodos antiguos que abusaban de **evidencias y generalizaciones no probadas.**

Así, por ejemplo, nos encontramos que Bernard Bolzano publica en 1816 el libro sobre el teorema del binomio, [4], donde critica explícitamente el uso que hacen de las series infinitas Euler y Lagrange, que habían dado demostraciones insuficientes de que $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots$, precisando que el teorema del binomio expresa que si $|x| < 1$ y n no es un entero positivo se tiene que la diferencia

$$(1+x)^n-1-nx-\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\ldots$$

puede hacerse más pequeña que un número dado, si en la serie se toma un número de términos suficientemente grande. Debemos resaltar que el excelente trabajo de Gauss sobre la serie hipergeométrica era desconocido por Bolzano, quien expresó en este libro sobre el teorema del binomio la necesidad de definir los números reales, pues examina sucesivamente los casos $n \in Z$, $n \in Q$ y $n \in R$ e indica en la nota final (pág. 143) que no ha tratado el caso en que x y n son números complejos y el problema de la elevación a una potencia irracional de un número negativo debido a que **las nociones de número irracional y de número complejo no están todavía seriamente fundadas**, anunciando que volverá sobre ellas en otra ocasión.

En 1817 Bolzano publica una gran memoria sobre el teorema de los valores intermedios, [5], que fue desconocida por sus contemporáneos hasta el redescubrimiento de Bolzano por Hankel en 1870. Contiene lo mejor de Bolzano como analista, y aunque aún no aborda la construcción de los números reales supone el primer paso decisivo hacia la aritmetización del análisis. El mismo Bolzano dice en su memoria que las demostraciones hechas hasta entonces del teorema de los valores intermedios utilizaban métodos intuitivos, y que él nada tenía que objetar ni contra el rigor ni contra la evidencia de este teorema geométrico, **pero que había una falta**

intolerable contra el método, consistente en querer deducir verdades matemáticas puras o generales de resultados que pertenecen a una parte aplicada o particular. También obtiene lo que hoy conocemos como condición necesaria y suficiente de Cauchy para convergencia de series, si bien su "**prueba**" descansa en que si se verifica la condición de Cauchy la existencia del límite no contiene ninguna contradicción, pues se le puede determinar con la precisión que se desee. **Bolzano en esta prueba estaba en un círculo vicioso del que no se salió hasta que los matemáticos tomaron conciencia de que había que definir antes que el límite los objetos a los que se aplicaba la definición de límite, que van a ser los números reales.**

Bolzano da un paso más en la aritmetización del análisis con el proyecto de elaborar un tratado que englobase el conjunto de las matemáticas y cuyo fundamento fuese el número. Este tratado, titulado *Teoría de las magnitudes* , queda inacabado e inédito. La primera parte, *Teoría de funciones,* [6], la escribe hacia 1830 y contiene el pensamiento de Bolzano respecto a los números reales, ya que en el capítulo *Funciones continuas y discontinuas* utiliza una proposición que no demuestra y que corresponde a lo que hoy llamamos teorema de Bolzano-Weierstrass (*todo conjunto infinito y acotado de números reales tiene un punto de acumulación*), siendo curioso que este resultado que no figura en ninguna otra obra de Bolzano se conociese como teorema de Bolzano-Weierstrass antes de la publicación de la obra de Bolzano en 1930. La teoría de funciones contiene muchos resultados nuevos (la construcción de una función continua en [0,1] con infinitos máximos y mínimos, la construcción de una función continua en $[a,b]$ no derivable en un subconjunto denso de $[a,b]$, contradiciendo así una afirmación de Galois hecha a sus 18 años, ...) y también algún error (cuando afirma que si x no pertenece a N^* la serie $\frac{1}{1-x}+\dots+\frac{1}{n-x}+\dots$ representa una función continua), siendo lo más sobresaliente la forma en que Bolzano trata los fundamentos del Análisis, nueva para esta época.

Dentro del mismo tratado de Teoría de las magnitudes, hacia 1835, aborda Bolzano la construcción explícita del conjunto R ([40] y [41]), considerando expresiones del tipo $S = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\dots(1-\frac{1}{2^n})\dots$, donde intervienen infinitas veces las cuatro operaciones elementales de la aritmética, y dice que una expresión finita o infinita S es *medible*, o que está determinada por aproximación si, para todo entero $q \geq 1$ se puede encontrar un $p \in Z$ tal que

$$S = \frac{p}{q} + P_1 = \frac{p+1}{q} - P_2$$

donde P_1 y P_2 son expresiones *puramente positivas*. En [40] hay un estudio crítico de la teoría del número real de Bolzano, comentando sus faltas de rigor.

Aún nos encontramos con otra obra de Bolzano, titulada *Paradojas del Infinito*, [7], escrita en 1847 y publicada en 1851, donde expone la existencia de los conjuntos infinitos, presuponiendo en alguna forma que N es infinito (considera una proposición verdadera que la llama proposición A , con la que forma la proposición "A es una proposición verdadera", a la que la llamará proposición B, de la que formará la proposición "B es una proposición verdadera", que la llamará proposición C, y así sucesivamente. También con una homotecia pone en biyección subconjuntos infinitos diferentes de R, de lo que nace la necesidad de redefinir el concepto de igualdad entre conjuntos infinitos, lo que será hecho por unos cuarenta años más tarde por Cantor, quien sentía una gran admiración por este libro de Bolzano.

Otro autor que también critica los métodos antiguos, particularmente la generalidad que se atribuía a ciertas expresiones algebraicas, es Cauchy, quien en su monumental *Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytechnique* de 1821 abre el camino al análisis moderno y escribe: *"Respecto a los métodos he procurado darles todo el rigor que se exige en geometría, sin recurrir a razones sacadas de la generalidad del álgebra"*, criticando a ciertos métodos de Lagrange, pues precisa que los razonamientos extraídos de generalizar ciertas expresiones algebraicas *"tienden a atribuir a las fórmulas algebraicas un campo de validez infinito, en tanto que, en la realidad, la mayoría de estas fórmulas son válidas bajo ciertas condiciones, y para ciertos valores de las variables que ellas contienen"*.

En el capítulo IV, titulado *"Des séries convergentes et divergentes. Régles sur la convergence des séries. Sommation de quelques séries convergentes"*, introduce el concepto de convergencia y expone de forma tan natural lo que llamamos hoy **condición necesaria y suficiente de convergencia de Cauchy**, que no debe extrañar que le pareciese evidente. Esto es una prueba de que en alguna forma presuponían la existencia del conjunto R, faltando su creación explícita, pues lo único que hace Cauchy en su libro es introducir los números racionales a partir de la medida de magnitudes, y luego dice que un número irracional *es un límite de fracciones que proporcionan valores cada vez más próximos al irracional.* Observamos que esta definición contiene el mismo círculo vicioso en el que estaba Bolzano, pues es necesario definir antes que el límite los objetos a los que se aplica el límite.

Si bien apenas nada más hay respecto a la construcción del número real en la referida obra de Cauchy *Cours d'Analyse* (1821) y en su *Résumé des leçons données a l'Ecole polytechnique sur le calcul infinitesima*l (1823), está claro que Cauchy, igual que Bolzano, sentía la necesidad de sentar las bases del número real. En efecto, en 1829, en el prólogo del segundo tomo de la segunda edición del tratado de Martin Ohm, ([36] y [37]), se lee que el **eminente** Cauchy también había llamado la atención sobre el estado insuficiente y poco científico del análisis, pero que no había elaborado una teoría general de los números abstractos, sin la que el análisis no puede existir. Ohm menciona los bellos teoremas de convergencia de series de Gauss y de Cauchy, de los que se servirá en las diferentes partes de su obra. La intención de Ohm, declarada al principio del primer tomo de su tratado, es idéntica a la de Bolzano en su inacabada *Teoría de las magnitudes*: Intentar dar un cuerpo de unidad a las Matemáticas, de forma similar a como hizo Euclides con sus Elementos respecto a la Geometría. Su idea es que el **número abstracto** es la noción más importante en Matemáticas, constituyendo su fundamento. Ohm supone al principio de su tratado el conjunto N de los números enteros positivos, define la suma y la multiplicación, prueba que tienen las propiedades conmutativa y asociativa, y que la multiplicación es distributiva respecto a la suma. Luego introduce $1/b$, y define el cociente $a/b = a\ (1/b\ )$ cuando a no es múltiplo de b. Respecto a los irracionales limita su estudio al caso $a^{1/b}$. Cronológicamente la obra de Ohm es el primer proyecto de construir todas las matemáticas a partir del número entero, si bien con cierta falta de rigor.

2.3. Otros antecedentes de las construcciones del número real: Las series de Fourier y algún aspecto de la física matemática.

No es posible hacerse una idea exacta de la época que estamos considerando ahora, la primera mitad del siglo XIX, sin mencionar a Fourier, Dirichlet, Riemann y a algunos físicos matemáticos.

El 21 de diciembre de 1807, Joseph Fourier leyó en la Academia de Ciencias su memoria *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, que volvió a someter a la Academia el 28 de septiembre de 1811, señalando Lagrange *la novedad del tema y su importancia, si bien estaba falto de rigor.* En 1822 publica Fourier su *Théorie analytique de la chaleur*, [23], que en opinión de Barboux *es una bella obra, que se puede colocar al lado de los escritos científicos más perfectos de todos los tiempos*. En su Discurso preliminar señala Fourier que las cuestiones de física que trata se reducen *"a una investigación de análisis matemático ... basada en teoremas nuevos."* y que *" ... el estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos"*. El rigor sigue siendo uno de los puntos que deja abiertas las puertas a posteriores investigaciones, pues Fourier obtiene los coeficientes de sus desarrollos integrando series término a término, sin más restricción sobre la convergencia. Será Dirichlet, quien llega a París en mayo de 1822, a la edad de 17 años, quien dará la primera demostración rigurosa de la convergencia de una serie de Fourier, [19], donde establece que si f es continua y monótona a trozos en $[-\pi,\pi]$, entonces su serie de Fourier converge a $[f(x^+)+f(x^-)]/2$.

El resultado de Dirichlet estaba en contradicción con la afirmación de Cauchy hecha en su Curso de Análisis de 1821 donde había enunciado que si una serie de funciones continuas era convergente en un entorno del punto a, la suma era una función continua en a. Ya Abel, en su trabajo de 1826 sobre la serie del binomio de Newton [1], había puesto de manifiesto la incorrección del resultado de Cauchy, quien en su demostración utilizaba una hipótesis no enunciada: La convergencia uniforme de la serie de funciones en el entorno referido del punto a. El primero en utilizar la noción de convergencia uniforme fue Christof Gudermann, maestro de Weierstrass, en un artículo aparecido en el Journal de Crelle. No es pues extraño que el primero en definir explícitamente la continuidad uniforme fue Weierstrass en un artículo escrito en 1841 y publicado en 1894 ([46]). En el mismo sentido, en 1847, Ph.L. Seidel en [42] y G.G. Stokes en [44], introducen nociones que corresponden a la convergencia uniforme de una serie. Es Seidel quien observó que el teorema de Cauchy se contradice con el Dirichlet sobre el desarrollo en serie de Fourier de funciones continuas y monótonas a trozos, demostrando que si una serie de funciones continuas es discontinua en el punto x_0 , entonces en cualquier entorno de x_0 existen valores de x para los que la serie converge tan lentamente como se desee. Stokes da un contraejemplo al teorema de Cauchy, enunciando luego que si una serie de funciones continuas no converge con *lentitud infinita,* entonces su suma es una función continua. Stokes comete la incorrección de dar el recíproco de este resultado, que es incorrecto. Cauchy publica una memoria en 1853 en la que da una noción clara de la convergencia uniforme, [13], indicando que su teorema sobre la continuidad de una serie de funciones continuas es inexacto, pero que *es fácil ver cómo debe modificarse el enunciado del teorema.* En la prueba introduce el **criterio de Cauchy** para la convergencia uniforme de series.

Es pues evidente que el estado del análisis en 1850 exigía una construcción rigurosa del número real. Ya hemos citado las construcciones de Ohm (1829) y de Bolzano (1835) de base puramente aritmética y no totalmente rigurosas. Ahora vamos a comentar la construcción de los números reales que el físico matemático Hamilton hizo entre 1833 y 1835. Influido por el pensamiento de Newton, fundamenta en el **concepto del tiempo** su teoría de los números reales, pues pensaba que era necesario recurrir al universo físico para justificar ante sus contemporáneos las nociones abstractas.

Después de la presentación de los números racionales, Hamilton sugiere la idea de la partición de los racionales en dos clases y asegura que existe un conjunto infinito de números racionales entre dos de ellos. Observa que si partimos el conjunto de números racionales en dos clases A y B de forma que todo elemento de A sea menor que todo elemento de B, puede ocurrir que no exista ningún número racional entre A y B. A partir de una intuición de la continuidad del tiempo, Hamilton sugirió que esos conjuntos A y B podían servir para determinar un número irracional. Enuncia que si $\frac{m}{n} < a$ cuando $\frac{m^2}{n^2} < b$ y si $a < \frac{p}{q}$ cuando $b < \frac{p_2}{q_2}$, entonces $a = \sqrt{b}$. Así $\sqrt{b}$ está determinado por la partición hecha en los racionales según su cuadrado sea menor o mayor que b.

En sus dos memorias, leídas ante la Academia Real de Irlanda en 1833 y 1835 y publicadas con el título del *"Algebra as the science of pure times ..."*, se lee ([16], p. 362):

"La idea de la continuidad de la progresión de un momento a otro en el tiempo engloba la idea de una progresión continua de manera semejante en las cantidades [...]. Prosiguiendo esta sucesión de ideas, nos vemos obligados a concebir [...] la existencia de un número determinado o de una razón a que es la raíz cuadrada exacta de todo número positivo propuesto o razón b ".

Riemann, que fue alumno de Gauss, presentó su tesis de habilitación en 1854 en la Universidad de Göttingen, continuando la memoria [19] de su maestro Dirichlet. Después de un elegante estudio de esta memoria Riemann concluye que se puede representar por una serie trigonométrica toda función periódica de período 2π que:

1° "Sea generalmente susceptible de integración.
2° No tenga más que un número finito de máximos y mínimos".

Para precisar la primera condición Riemann desarrolla su teoría de la integral y obtiene su condición de integrabilidad: "Para que una función acotada sea integrable en $[a,b]$ es necesario y suficiente que se pueda dividir $[a,b]$ en subintervalos parciales tales que la suma de las longitudes de los intervalos en los que la oscilación es mayor que ε , cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, sea tan pequeña como se desee". Riemann ha dado un paso decisivo hacia la moderna teoría de la medida, lo que está exigiendo una construcción rigurosa de los números reales.

3. Las construcciones del número real en la segunda mitad del XIX.

3.1. RICHARD DEDEKIND

También en 1854 y en Göttingen leyó su tesis de habilitación Dedekind, tal vez el último discípulo conocido de Gauss, quien muere en 1855 sucediéndole Dirichlet, hecho que va a ser fundamental en la formación de Dedekind, quien señala de Dirichlet que *"era un gran placer seguir sus conferencias profundas y penetrantes, y que había seguido todas sus lecciones sobre teoría de números, sobre el potencial, sobre la integral definida, sobre las ecuaciones en derivadas parciales ... y que Dirichlet había hecho de él, tanto por sus enseñanzas como por su trato personal, cada vez más confidente, un hombre nuevo"* ([22], 1,4,1).

La coincidencia en año y en Universidad de la lectura de las tesis de habilitación de Dedekind y Riemann va a ser origen de una profunda amistad entre ambos y un hecho decisivo en la formación de Dedekind, pues se conserva una carta de 16 de septiembre de 1856 de Dedekind a Riemann agradeciéndole las numerosas lecciones recibidas de Riemann el último año ([22], 1,4,2). Fue Dedekind quien publicó la Tesis de habilitación de su amigo Riemann tras su muerte en 1866 ([39]).

El avanzado estado del análisis matemático sobre 1850 era incompatible con una teoría no bien fundamentada del número real. Dedekind fue nombrado en 1858 profesor de matemáticas en la Escuela Politécnica de Zurich, donde preparando la primera parte de cálculo diferencial e integral para el semestre de invierno del curso 1858-1859 sintió la necesidad de elaborar una teoría de los números reales, siendo tan fuerte su sentimiento de insatisfacción que decidió firmemente reflexionar hasta encontrar los fundamentos puramente aritméticos y rigurosos del análisis infinitesimal, que según constaba en su diario, destruido antes de su muerte, los encontró el 24 de noviembre de 1858, si bien como expondremos a continuación no los publicó hasta 1872.

Del período de revisiones de su teoría del número real, entre 1858 y 1872, resaltaremos que en 1862 volvió a Brunswick, su ciudad natal, para enseñar en la Escuela Politécnica. En el semestre de invierno del curso 1862-63 dio un curso sobre cálculo diferencial e integral cuyo capítulo primero se titula **"El dominio de los números reales; su continuidad"**. En el capítulo cuarto introduce la noción de límite, después de haber definido los números reales, y prueba el teorema de que toda sucesión creciente acotada superiormente tiene límite. Dedekind publica su teoría de los números reales en la obra **"Continuidad y números irracionales"** ([17], 1872), después de varias revisiones de su teoría.

En el prólogo del libro Dedekind precisa que las consideraciones que va a exponer datan del otoño de 1858, que es cuando sintió **la falta de una base realmente científica de la aritmética**, particularmente en la noción de límite y, en concreto, en la demostración del teorema de que una sucesión creciente acotada tiene límite, donde se recurre a la **evidencia geométrica**. Dice que descubrió que el hecho de que las sucesiones monótonas crecientes acotadas tengan límite, o algún otro resultado equivalente, podría ser considerado de alguna forma como fundamento del análisis infinitesimal. Sigue diciendo en el prólogo que entonces lo único que le quedaba para fundamentar rigurosamente el análisis era elaborar una teoría del número real partiendo de los números racionales y utilizando sólo la aritmética, de tal forma que le permitiese probar que una sucesión creciente acotada tiene límite, e indica que lo consiguió el 24 de noviembre de 1858.

En el capítulo 1, *Propiedades de los números racionales*, Dedekind parte del cuerpo ordenado Q de los números racionales, resaltando dos propiedades:

1.- Que si $a \neq b$ existen una infinidad de números racionales entre a y b, colocando así la propiedad topológica de la densidad de los números racionales en la base del Análisis.

2.- Que cada $a \in Q$ induce una partición (A_1, A_2) de Q , llamada **cortadura**, de forma que cada elemento a_1 de A_1 verifica $a_1 \leq a$ y cada elemento a_2 perteneciente a A_2 cumple que $a \leq a_2$. El número a puede estar en A_1 o en A_2 indistintamente, debiendo considerar como no *esencialmente diferentes*, en palabras de Dedekind, las dos cortaduras que entonces resultan.

En el concepto de cortadura va a basar Dedekind su definición de número, que, por tanto, reposa sobre la idea de conjunto infinito.

El capítulo 4 se titula *Creación de los números irracionales*, pues Dedekind desea hacer notar que se trata de una **creación**. Generaliza la noción de **cortadura** como una partición (A_1, A_2) de Q tal que $a_1 \leq a_2$ para cada $a_i \in A_i$ con $i = 1,2$. Hay unas cortaduras en que A_i tiene máximo o A_2 tiene mínimo, que son generadas por ese número racional máximo de A_1 o mínimo de A_2. Dedekind da inmediatamente una infinidad de cortaduras que no son generadas de esta forma al no tener A_1 máximo ni A_2 mínimo, y dice que cada una de estas cortaduras (A_1, A_2) define un nuevo número a, irracional, completamente definido por esta cortadura (A_1, A_2). A toda cortadura corresponde pues un número, racional o irracional, siendo, en frase de Dedekind, *dos números diferentes o no iguales si, y sólo si, corresponden a dos cortaduras esencialmente desiguales.*

Siguiendo con frases de Dedekind, *en el hecho de que todas las cortaduras no sean engendradas por números racionales reside la* **incompletitud o discontinuidad** del cuerpo de los números racionales. Dedekind prueba que la relación de orden de Q se extiende a R, que es **continuo**, es decir, **conexo** con la terminología moderna.

3.2. KARL WEIERSTRASS

El primer contacto de Weierstrass con matemáticos de su época fue con Direchlet, entre agosto y octubre de 1844, durante una estancia de Weierstrass en Berlin, hecho que, como en Dedekind, también parece que fue decisivo en la formación de Weierstrass. En 1856 Weierstrass es nombrado profesor en la Universidad de Berlín y, entonces comienza una revisión sistemática de los fundamentos del Análisis Matemático, intentando hacerlo reposar sobre el concepto de número. Inmediatamente se dio cuenta que era necesario definir el número irracional independientemente del concepto de límite. No publicó sus investigaciones sobre la aritmetización, por lo que para extraer sus ideas esenciales hay que basarse en las notas de sus alumnos V. Dantscher, A. Hurwitz, E. Kossak, G. Mittag-Leffler y A. Pringsheim.

La elaboración de la teoría de los números reales de Weierstrass se situa hacia 1863, según expone P. Dugac ([21], p. 47), y fue publicada por primera vez por E. Kossak ([32]) en 1872 basándose en las notas tomadas en un curso dado por Weirstrass entre 1865 y 1866 sobre la **Theoría general de las funciones analíticas**. Hay otros escritos sobre la teoría de números reales que Weierstrass explicó durante más de 20 años, como la redacción inédita de Adolf Hurwitz sobre el curso de Weierstrass del semestre de verano de 1878 titulado **Introducción a la teoría de las funciones analíticas.**

La teoría del número real de Weierstrass se inspira en la relación de inclusión y en los agregados numerables de partes exactas de la unidad, que recuerdan a las series de términos positivos. Admite la existencia del conjunto de números enteros no negativos, y define que dos números enteros no negativos son iguales si están compuestos del mismo número de unidades, postulando que esta relación de igualdad tiene la propiedad transitiva.

Para definir los números racionales positivos Weierstrass introduce las partes exactas de la unidad ($[1/n]$, que verifican que $n\ [1/n] = 1$) de forma similar a como lo había hecho Martín Ohm, e introduce los **agregados finitos** que son colecciones finitas de partes exactas de la unidad en la que las partes exactas pueden repetirse. Un ejemplo de agregado finito es {1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/2, 1/2, 1/2}. Dice que dos agregados finitos son iguales si tienen la misma suma. En otras redacciones de su teoría, y tal vez para evitar la suma, se considera que dos agregados finitos son iguales si se pueden deducir uno del otro por un número finito de las siguientes transformaciones elementales:

1. Sustituir la unidad por n números racionales de la forma $1/n$, y recíprocamente, sustituir n números racionales de la forma $1/n$ por la unidad.
2. Sustituir una parte exacta $1/p$ por n partes exactas $1/pn$, y recíprocamente.

siendo reiterativos ambos criterios de igualdad. El cociente del conjunto de agregados finitos respecto a esta relación de equivalencia es el conjunto de los números racionales no negativos.

Luego considera los **agregados finitos o infinitos numerables de partes exactas de la unidad**, que son colecciones numerables de partes exactas de la unidad con la única restricción de que sea finito el número de veces que aparece cada parte exacta en un agregado. Dice que un agregado finito a está contenido en el agregado b si dado un número racional r estrictamente menor que la suma de los elementos de a se tiene que b contiene un agregado finito de suma mayor o igual a r. Así se tiene que el agregado {1} está contenido en el agregado $\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots \}$, gracias a la condición de estrictamente menor. Por definición dos agregados son iguales si cada parte finita de uno de ellos está contenida en el otro y recíprocamente. Dice que un agregado a es menor que otro agregado b si b contiene un agregado finito c tal que un racional r estrictamente menor que la suma de los elementos de c es mayor que la suma de cualquier agregado finito contenido en a. Un agregado verifica el criterio de finitud si es menor que un agregado finito.

El cociente del conjunto de agregados que verifican el criterio de finitud respecto a la relación de equivalencia que define la igualdad es el conjunto de los números reales no negativos, en el que de forma natural define las operaciones elementales y el orden usual, introduciéndolas previamente en el conjunto de agregados que verifican el criterio de finitud y pasando al cociente. La extensión de la sustracción le da al conjunto R de los números reales.

En resumen, para Weierstrass cada número real no negativo, salvo el signo, corresponde a una clase de equivalencia definida por la igualdad de agregados en el conjunto de agregados numerables que verifican el criterio de finitud. Una clase que contiene agregados finitos corresponde a un número racional; el resto de clases definen nuevos números llamados irracionales. El conjunto de agregados numerables que verifican el criterio de finitud se corresponde con el conjunto de las series convergentes de términos positivos.

3.3. CHARLES MERAY

Méray publicó en 1869 una teoría rigurosa de los números irracionales ([35]) indicando que eran dos los principios fundamentales de todas las partes de la matemática donde intervenía la noción de límite. El primero era que una sucesión creciente (decreciente) acotada superiormente (inferiormente) tiene límite. El segundo que una sucesión de Cauchy tiene límite. También señala Méray que estos dos principios se han visto como axiomas, lo que no había evitado introducir en los razonamientos la noción obscura de número inconmensurable. Por ello decide Méray seguir una via más segura, definiendo primero los números irracionales.

Para ello introduce el concepto de **variable progresiva**, que es una sucesión $V = \{v_n\}$, de términos racionales con límite v también racional. La variable progresiva V es pues una sucesión racional de Cauchy con límite racional. Pero sucede que hay sucesiones racionales de Cauchy sin límite racional, y Méray dice que tales sucesiones convergen hacia un **límite ficticio**. La introducción de los límites ficticios le permite a Méray completar Q hallando el cociente del conjunto de las sucesiones racionales de Cauchy respecto a la relación de equivalencia definida por la condición de que la diferencia de dos sucesiones racionales de Cauchy sea una sucesión nula. Efectivamente, afirma que un **signo cualquiera** puede designar el *límite ficticio* de una sucesión de Cauchy V, y que el mismo signo debe representar a *cualquier sucesión equivalente.* En la página 288 de [35] Méray escribe: *Si a es un número racional positivo tal que no existen p y q* $\in Z^*$, *con* $a = (p/q)^2$, *entonces* $\sqrt{a}$ *designará en el lenguaje esta raíz ficticia y en los cálculos cualquier variable progresiva cuyo cuadrado tienda hacia a.*

Méray expuso su teoría de construcción del número real en su artículo [35], y hay un estudio crítico de la misma en el artículo de P. Dugac titulado *Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite, Revue d'Hist. des Sci., t23, pp 333-350, 1970).*

3.4. GEORG CANTOR

Una teoría similar a la de Méray fue elaborada por Georg Cantor, quien hizo sus estudios en Berlín entre 1863 y 1866 en el momento en que Weierstrass exponía su teoría de los números reales. Uno de los problemas más importantes de la época en el tema de las series trigonométricas (no necesariamente de Fourier) consistía en establecer la unidad del desarrollo trigonométrico. Desde 1870 a 1872 Cantor redactó cinco memorias sobre las series trigonométricas en las que prestó especial atención al teorema de unicidad descubriendo en noviembre de 1871 que el teorema es cierto aunque la convergencia de la serie trigonométrica deje de verificarse en cierto conjunto infinito de valores de x del intervalo $[0,2\pi]$. Es entonces cuando Cantor intenta describir la naturaleza de tal agregado y elabora su teoría de los números reales, que fue publicada primero por E. Heine en 1872 con algunas simplificaciones, [28], y un poco después por Cantor ese mismo año, [9]. Vamos a exponer la construcción de los números reales de Cantor, a veces también llamada de Cantor-Heine.

Construye los números reales sobre la base de los racionales considerando las sucesiones $\{a_n\}$ que verifican $\lim_{n\to\infty} (a_n - a_{n+r}) = 0$ para un número r cualquiera, que las llama sucesiones fundamentales y que no son más que las sucesiones de Cauchy. Por definición cada sucesión fundamental es un número real, por lo que a cada sucesión fundamental $\{a_n\}$ le asocia el símbolo A ; en particular, si $a_n = a$ para cada n el símbolo asociado es a, lo que permite hacer la inmersión natural de los racionales en los reales. Una sucesión $\{a_n\}$ que verifique que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ se llama una sucesión elemental o nula, lo que significa que dado un número racional positivo arbitrario ε existe un n_ε tal que para $n > n_\varepsilon$ se tiene que $|a_n| < \varepsilon$. Dos sucesiones fundamentales son iguales o representan el mismo número real si su diferencia es una sucesión elemental. Este criterio de igualdad es una relación binaria de equivalencia.

Dice que una sucesión fundamental $\{a_n\}$ es positiva si existe un número racional positivo q y un n_0 tal que si $n > n_0$ se tiene que $a_n > q$, y dice que una sucesión fundamental $\{a_n\}$ es negativa si existe un número racional negativo s y un n_0 tal que si $n > n_0$ se tiene que $a_n < s$.

De forma natural define las operaciones y el orden, probando que si $\{a_n\}$ y $\{v_n\}$ son dos sucesiones fundamentales que representan a A y a V entonces $\{a_n + v_n\}$, $\{a_n v_n\}$ y $\{a_n / v_n\}$ (con $v_n \neq 0$) son sucesiones fundamentales que definen $A+V$, AV y A / V (si $V \neq 0$) . Dice que $A>V$ si $\{a_n - v_n\}$ es positiva. Las operaciones y el orden son compatibles con la relación binaria de equivalencia considerada.

Gracias al orden puede definir de forma natural el límite de una sucesión convergente de números reales $\{A_n\}$; en particular, si cada A_n es el número racional a_n y $A = \{a_n\}$, se tiene entonces que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Establece, finalmente, que una sucesión de números reales $\{A_n\}$ que verifique $\lim_{n\to\infty} (A_{n+r} - A_n) = 0$ para cada r tiene límite, que es el teorema de completitud del conjunto de los números reales.

La primera exposición de 1872 de Cantor tiene necesidad de alguna matización cuando considera límites no racionales de sucesiones de Cauchy. Esta necesidad fue sentida por el mismo Cantor, como se prueba por la nota que añadió en la traducción francesa de 1883, que personalmente revisó. En ese mismo año dio una exposición muy precisa de su teoría del número real, recogida en la recopilación de su obra publicada en 1930 ([10]).

4. Algunos resultados obtenidos en la segunda mitad del siglo XIX después de las construcciones de los números reales.

4.1. En análisis.

Decir que las construcciones del número real son la base del espectacular desarrollo del análisis en la segunda mitad del siglo XIX puede ser muy discutible. Si parece más objetivo afirmar que esas construcciones se han hecho por necesidades del análisis, o con más precisión, por la crisis de un análisis que trabajaba sobre un conjunto intuitivo de números reales. Parece, pues, que algunos errores **fecundos** del análisis matemático han obligado a construir los números reales y han contribuido a desarrollar el análisis matemático. Muy someramente vamos a comentar dos de esos errores fecundos contenidos en una obra que marca el comienzo de la moderna teoría de la integración. La obra es el *Résumé des leçons données a l'Ecole polytechnique sur le calcul infinitesimal*, (1823) del gran sistematizador y creador Cauchy, al utilizar que una función continua en $[a,b]$ es uniformemente continua sin explicitar su prueba, y al integrar una serie término a término sin indicar la hipótesis de la convergencia uniforme que utiliza en su prueba, error repetido en 1847 por Stokes y por Riemann en un curso inédito sobre teoría de funciones complejas, recogido por H. Hankel.

El primero que enuncia y demuestra correctamente los teoremas sobre continuidad, derivabilidad e integrabilidad de una suma de una serie de funciones será Weierstrass en su curso inédito de 1861, recogido por P. Dugac en 1873, [21], si bien el primero en escribir el teorema de integrabilidad término a término de una serie de funciones uniformemente convergente, que Weierstrass enseñaba en sus cursos desde 1861, fue su amigo Eduard Heine en 1869, [27], quien inspirándose en la tesis de habilitación de Riemann, [39], utilizó la noción de convergencia uniforme para demostrar la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + a_1 cosx + b_1 senx + \ldots + a_n \cos nx + b_n\, sen\, nx + \ldots$$

probando que si la serie trigonométrica considerada converge uniformemente a cero en el intervalo $[-\pi, \pi]$, salvo en un número finito de puntos, entonces $a_n = b_n = 0$ cualquiera que sea n ([27]). El estudio de estos puntos excepcionales en [9] va a dar lugar a la teoría cantoriana de conjuntos, pues hacia 1870 Heine tenía como asistentes a dos discípulos de Weierstrass, H.A. Schwarz y G. Cantor.

Ya hemos indicado que Cauchy utilizaba el hecho de que una función continua en $[a,b]$ era uniformemente continua. También es Heine quien introduce la noción de continuidad uniforme y demuestra este teorema en su memoria *Die Elemente der Functionenlehre*, de 1872 ([28]).

Intencionadamente no nos vamos a extender más en este apartado, pues tal vez ya hayamos incidido con temas de otras conferencias de este curso.

4.2. En teoría de números.

Ya dijimos que Joseph Liouville (1809-1882), uno de los mejores discípulos de Cauchy, probó en 1844 que cierta clase de números, que en *cierto sentido* se aproximan muy bien por los racionales, no pueden ser algebraicos, lo que planteaba si existirían muchos números trascendentes. Tampoco se sabía si los números π y e serían algebraicos o trascendentes, y si todos los números trascendentes se podían *aproximar bien* por números algebraicos en el sentido de Liouville.

La primera cuestión fue resuelta en 1874 por Cantor, probando que **casi todos** los números son trascendentes. La segunda cuestión está unida al nombre de Charles Hermite (1822-1901), que consagró su vida a las matemáticas puras en la Escuela Politécnica, en la Facultad de Ciencias de París y en el Colegio de Francia. En una memoria publicada en los *Comptes rendus* de la Academia en 1873 Hermite demostró que e era un número trascendente, probando que la igualdad $c_0 + c_1e + c_2e^2 + \ldots + c_n e^n = 0$ no es posible con coeficientes enteros. La demostración de Hermite es muy sofisticada y requiere un conocimiento profundo de las matemáticas. En la última parte de su memoria Hermite aplica su método para obtener aproximaciones de e (58291/21444) y de e^2(158452/21444).

La trascendencia de π fue demostrada por Ferdinand Lindemann (1852-1939) en una memoria publicada en Mathematische Annalen en 1882 con el título (*Über die Zahl* , Sobre el número). Siguiendo un método semejante al de Hermite, Lindemann casi probó que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números algebraicos distintos, reales o complejos, y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son números algebraicos no nulos, se tiene que $\beta_1 e^{\alpha_1} + \ldots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$. De este resultado se deduce la trascendencia de π , pues $e^{i\pi} + 1 = 0$, y fue completamente demostrado por Weierstrass, y, posteriormente, Hilbert y Hurwitz simplificaron la demostración. El resultado de Lindemann probó de manera definitiva que no se podría construir con regla y compás un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, pues de que una construcción de ese tipo fuese posible se deduciría que π sería un número algebraico.

Ya en el comienzo de nuestro siglo, en el congreso internacional de Matemáticas de 1900, Hilbert propuso la siguiente cuestión, que es la séptima de su 23 problemas: Si α es un número algebraico distinto de cero y uno, y β es un número algebraico irracional, ¿es trascendente el número α^β?. Terminaremos saliéndonos de la segunda mitad del siglo XIX para indicar cómo se resolvió esta cuestión. La primera aportación significativa a este problema la hizo Gelfond en 1929 probando que α^β era trascendente cuando β es un número cuadrático imaginario. En particular, $e^\pi = (-1)^{-i}$ es trascendente. Al año siguiente Kuzmin extendió los resultados de Gelfond al caso en que β es un irracional cuadrático real. Cuatro años después, en 1934, Gelfond y Schneider resolvieron independientemente el problema de la trascendencia de α^β como consecuencia del siguiente resultado: *Dados los números algebraicos* α_1, α_2, β_1, β_2 *tales que* $\ln\alpha_1$ y $\ln\alpha_2$ *sean linealmente independientes sobre el cuerpo Q de los números racionales, se tiene que* $\beta_1\ln\alpha_1 + \beta_2\ln\alpha_2 \neq 0$. Este teorema resuelve el problema de Hilbert, pues si $\alpha^\beta = \gamma$ fuese algebraico entonces $\beta\ln\alpha - \ln\gamma = 0$, por lo que $\ln\alpha$ y $\ln\gamma$ serían independientes sobre el cuerpo Q de los números racionales, y, entonces, el teorema de Gelfond y Schneider implica que $\beta\ln\alpha - \ln\gamma \neq 0$, lo que contradice la igualdad anterior $\beta\ln\alpha - \ln\gamma = 0$.

Notas biográficas

Incluimos unas referencias biográficas de los cuatro constructores de la teoría de los números reales en la segunda mitad del siglo XIX, Dedekind, Weierstrass, Meray y Cantor, y también de Hamilton, por ser un claro precursor de la teoría de Dedekind. Se han tomado de [16].

Hamilton

William Rowan Hamilton (1805-1865) nació el 3 de agosto de 1805 en Dublín, Irlanda. Era el menor de una familia de tres hijos y una hija. Su brillante inteligencia provenía seguramente de su madre, y bajo la dirección de un tío apasionado por el aprendizaje de las lenguas consagró su infancia al aprendizaje de idiomas. A los cinco años Hamilton podía leer latín, griego y hebreo; tres años más tarde añadía a su bagaje el italiano y el francés; a los diez aprendió árabe y sánscrito y a los catorce el persa. Su encuentro con el calculador americano Zerah Colburn le hizo abandonar el estudio de las lenguas para dedicarse a las matemáticas. En 1823 se encuentra en el Trinity College de Dublín y en 1824 presenta una memoria en la Academia Real de Irlanda, que corregida y aumentada será presentada de nuevo en 1827 a la Academia con el título *A theory of systems of rays*, que erigía la óptima geométrica en un verdadero cuerpo de doctrina. Este año sucede a John Brinkley en la cátedra de astronomía del Trinity College. Es conocido por su teoría de los cuaterniones, por sus estudios en dinámica, y, tal vez, se le pueda atribuir el primer tratamiento sistemático de los números irracionales.

Dedekind

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) nació el 6 de octubre de 1831 en Brunswick, Alemania. Muy pronto se orientó hacia las ciencias físicas. Probablemente fue el último alumno conocido de Gauss. Obtuvo su doctorado en 1852 y la habilitación en 1854. Fue profesor en el Politécnico de Zurich y luego en la Escuela Técnica Superior de Brunswick. Fue amigo personal de Cantor, profesando una gran simpatía hacia sus ideas, muy discutidas en aquella época. Toda su carrera científica se desarrolló prácticamente en la sombra, y no le fue ofrecido ningún puesto importante de profesor. Murió el 12 de febrero de 1916, casi dos años antes que Cantor, sin conocer nunca la gloria.

Además de su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, donde da construcción de R por las cortaduras, el nombre de Dedekind se ha hecho célebre por sus numerosas contribuciones originales en matemáticas, como su teoría de los números algebraicos, que es una generalización de los enteros complejos de Gauss y de los números algebraicos de Kummer, su enfoque aritmético en el tratamiento de las curvas algebraicas, cuya idea central proviene de sus trabajos sobre los números algebraicos, y su introducción de clases de números algebraicos, llamados *ideales* en honor a Kummer.

Méray

Charles Méray (1835-1911), nació en Chalon-sur-Saône en 1835 y fue un gran defensor de la aritmetización de las matemáticas. En 1866 fue encargado de curso en la Facultad de Ciencias de Lyon y en 1867 fue nombrado profesor en la misma institución. Se dedicó a desarrollar una teoría aritmética de los números. En 1869 publicó la memoria titulada *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limite à des variables données*, [35], donde Méray señala que el definir el número irracional como el límite de una sucesión de números racionales, sin tener en cuenta la existencia del límite, presupone una definición de números reales. Méray en este trabajo obtiene R a partir de Q.

Weierstrass

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897) nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Wesfalia, en una familia católica liberal. Karl era el mayor de otro hermano y dos hermanas, ninguno de los cuales se casaría, tal vez a causa de la actitud dominadora de su padre. Tras billantes estudios secundarios entró en la universidad de Bonn como estudiante de Derecho, no terminando sus estudios universitarios. Se dedicó a las matemáticas a partir de 1838, no terminando sus estudios de doctorado. Weierstrass se dedicó de 1841 a 1854 a la enseñanza en un colegio privado. Después fue maestro en Munster, en Deutsch-Drone y en Braunsberg, y en 1856 fue nombrado profesor en el Instituto Profesional de Berlín, gracias a algunos resultados que publicó. El único contacto que tuvo con matemáticos de esta época fue con Christophe Guderman (1798-1851), interesado por la representación de funciones mediante series de potencias. Encargado de curso en 1856 en la Universidad de Berlín, fue nombrado profesor titular de esta Universidad a partir de 1863, donde permaneció hasta su muerte el 19 de febrero de 1897 a los ochenta y dos años.

Metódico y cuidadoso, trabajó en la fundamentación del análisis. Publicó poco y se dio a conocer por sus enseñanzas en la Universidad. Su influencia se hizo sentir a través de las publicaciones matemáticas de sus numerosos discípulos. En el Congreso Internacional de París de 1900, Hermite dijo: **"Weierstrass es el maestro de todos nosotros".**

Los trabajos de Weierstrass sobre aritmetización del análisis completaron los de Bolzano y Cauchy, en quienes aparece las expresiones *"una variable se aproxima a un límite"*, y *"llega a ser y sigue siendo tan pequeña como cualquier cantidad dada"*, que sugieren implícitamente el tiempo y el movimiento. Weierstrass resalta el concepto aritmético e interpreta una variable *"como una letra que representa cualquier valor de un conjunto dado"*, dando las definiciones actuales de continuidad. Desde 1861 se planteó la construcción de una función continua que no fuese derivable en ningún punto, dada por $f(x) = \sum_{0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, donde x es una variable real, a un entero impar mayor que 1, b una constante positiva menor que 1, y $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Las funciones de Bolzano y Riemann encontradas anteriormente no habían llamado la atención a los matemáticos. Weierstrass comunicó su función a Du Bois-Reymond en 1874. Estos estudios precipitaron la crisis de los fundamentos del análisis, contribuyendo a edificarlo como lo conocemos hoy día. El curso de Weierstrass de 1861 tuvo una parte importante dedicada a las series infinitas, introduciendo la noción de convergencia uniforme. Además de las series de potencias, Weierstrass destacó por sus estudios sobre funciones elípticas, cálculo de variaciones, integrales abelianas, geometría algebraica, fundamentos de la aritmética y su teoría de los números reales.

Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, en una familia de tres hijos. Su padre era un próspero comerciante de origen judío que se había convertido al protestantismo. Primero se educó con un tutor y, luego, en la escuela elemental de su ciudad natal mostró ya un interés marcado por el estudio de las matemáticas. Después de hacer estudios secundarios en colegios privados de Francfort, en 1859 entra en la Escuela Politécnica de Darmstadt, por deseo de su padre que intentaba que su hijo fuese ingeniero militar. Abandona los estudios de ingeniería militar en 1862 para emprender estudios superiores en Zurich, que también los deja en 1862 tras la muerte de su padre. En otoño de 1863 entra en la Universidad de Berlín, donde estudia matemáticas, física y filosofía, y conoce a Kronecker, Kummer y Weierstrass. El primero estimula a Cantor para que se interese por la teoría de números, pero será Weierstrass quien ejercerá la mayor influencia en la carrera científica de Cantor.

En 1867 recibe el doctorado tras haber presentado una disertación sobre las *Disquisitiones aritheticae* de Gauss y la *Teoría de números* de

Legendre. A continuación comienza su carrera de profesor en la Universidad de Halle publicando sus primeros trabajos dedicados a la teoría de números. En 1872 conoce en Suiza a Dedekind, encuentro que será el comienzo de una larga amistad entre los dos matemáticos. En 1874 publica un artículo en el Journal de Crelle sobre teoría de conjuntos, cuyo contenido fue considerado paradójico en esa época. A medida que su teoría progresaba se hacía más fuerte la oposición a la misma, particularmente por parte de Kronecker. Cantor tenía también defensores, entre los que se contaban Weierstrass y Dedekind. Entre 1879 y 1884 publicó su teoría de conjuntos, encontrándose con numerosas dificultades, particularmente con el movimiento de contestación dirigido por Kronecker, no contra su persona, sino contra las ideas cantorianas, lo que le sumió en una profunda depresión nerviosa en el año 1884. La muerte de Kronecker en 1891 y la amistad de hombres influyentes como Mittag-Leffler y Weierstrass hicieron más tolerable la vida de Cantor, cuyos trabajos comenzaron a ser justamente reconocidos después de 1891. Después de asistir a las primeras manifestaciones de la considerable influencia que su teoría ejercía en el mundo de las matemáticas y constatar el justo reconocimiento general que tanto había deseado, murió el 6 de enero de 1918 en una clínica psiquiátrica de Halle.

Agradecimiento

Expreso mi agradecimiento al profesor Dr. D. Manuel Valdivia por su ayuda en la localización de la bibliografía.

Bibliografía

[1] ABEL, N.H.: Recherches sur la série $1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots$, Journ. für die reine und angew. Math. t1, 311-339, (1826).

[2] BAKER, A.: Trascendental number theory. Cambridge University Press, (1965).

[3] BELL, E.T.: *Historia de las matemáticas*. Fondo de cultura económica, México (1949). Título original: The Development of Mathematics. McGraw Hill, New York.

[4] BOLZANO, B.: *Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen*. Enders, Prag, (1816).

[5] BOLZANO, B.: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zey Werthen, die ein entgegenegesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Abh. K. Böhm. Gesell, Wiss., 3, t5, 1-60 (1817).

[6] BOLZANO, B.: *Functionenlehre*, Schriften, t. I, K. Böhm, Gesell. Wiss., Praga (1930).

[7] BOLZANO, B.: *Paradoxien des Unendlichen*, Reclam, Leipzig, (1851).

[8] BOYER, C.B.: *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, (1987).

[9] CANTOR, G.: *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*. Math. Ann. 5, 123-132 (1872).

[10] CANTOR, G.: *Gesammelte Abhandlungen*. Springer, Berlin, (1930).

[11] CAUCHY, A.L.: *Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytechnique*, Debure, París, (1821).

[12] CAUCHY, A.L.: *Résumé des leçons données a l'Ecole polytechnique sur* le *calcul infinitesimal*, Debure, París, (1823).

[13] CAUCHY, A.L.: *Note sur les séries convergentes dont les divers term sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données*. C.R. Acad. Sci. 36, 454-459, (1853).

[14] COLLETTE, J.P.: *Histoire des mathématiques* 1, Vuibert/Erpi, (1973).

[15] COLLETTE, J.P.: *Histoire des mathématiques* 2. Erpi (Editions du renouveau pédagogique inc.) Canada, (1979).

[16] COLLETTE, J.P.: *Historia de las matemáticas II*. Siglo XXI de España editores S.A., Madrid (1985).

[17] DEDEKIND, R. *Stetigkeit und irrationale zahlen*. 7ª edición, Vieweg, Braunschweig (1969). Primera edición 1872. Traducción inglesa por W.W. Beman, Dover, New York, (1963).

[18] DEDEKIND, R.: *Was sind und was sollen die Zahlen*. Primera edición 1888. Traducción inglesa por W.W. Beman, Dover, New York, (1863).

[19] DIRICHLET, P.G. Lejeune.: *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à la représentation d'une fonction arbitraire entre des limites données*, Journ. für die reine und angew. Math., t. 4, 157-169, (1829).

[20] DIEUDONNÉ, J.: *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900, I et II*. Hermann, París (1978).

[21] DUGAC, P.: *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, Arch. for Hist. of Exact Sci., t10, 41-176, (1973).

[22] DUGAC, P.: *Richard Dedekind et les fondements de l'analyse*, Vrin, París, (1976).

[23] FOURIER, J.: *Théorie analytique de la chaleur*, Didot, París, (1822).

[24] GAUSS, K.F.: *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{(1)(2)\,\gamma\,(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta\,(\beta+1)(\beta+2)}{(1)(2)(3)\,\gamma\,(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$$

Comm. soc. reg. sci. Gott. rec. t.2, (1813).

[25] GAUSS, K.F.: *Werke, tX, primera parte*. K. Gesell. Wiss. Göttingen, (19*17)*

[26] GAUSS, K.F. und BESSEL, F.W.: *Briefwechsel*, Engelmann, Leipzig, (1880).

[27] HEINE, E.: *Über trigonomestrische Reihen*. Journ. für die reine und angew. Math., t71, 353-365, (1869).

[28] HEINE, E.: *Die Elemente der Functionenlehre.* Journ. für die reine und angew. Math., t74, 172-188, (1872).

[29] HILBERT problems, The.: *Proc. Symp. in Pure Math.*, vol. XX, Amer. Math. Soc., t. Providence, (1971).

[30] KLINE, M.: *Mathematics. A cultural approach.* Addison-Wesley, 1962.

[31] KLINE, M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, II. Alianza Universidad, (1992).

[32 KOSSAK, E.: *Die Elemente der Arithmetik.* Programm Friedr.- Werder Gymn., Berlin, (1872).

[33] LAGRANGE, J.L.: *Oeuvres.* Gauthier-Villars, París. (1867-1892).

[34] LORIA, G.: *Stoira delle matematiche dall'alba della cività al tramonto del secolo XIX.* Instituto Editoriale Cisalpino-Goliardica, Módena (1982).

[35] MÉRAY, CH.: *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données.* Revue des Soc. Savantes, Sci. math. phys. nat., 2, t.4, 280-289 (1869).

[36] OHM, M.: *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik,* erster Theil, Arithmetik und Algebra enthaltend, segunda edición, Riemann, Berlin, (1828).

[37] OHM, M.: *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, zweiter Theil, Algebra und Analysis des Endlichen enthaltend,* segunda edición, Riemann, Berlín, (1829).

[38] RÍBNIKOV, K.: *Historia de las matemáticas.* Mir, Moscú, (1991).

[39] RIEMANN, B.: *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* Abh. K. Gesell. Wiss. Gött., Math. Classe, t. 13, 87-132, (1866-1867).

[40] Van ROOTSELAAR, B.: *Bolzano's theory of real numbers*, Arch. for Hist. of Exact. Sci., t.2, 168-180, (1962-1966).

[41] RYCHLIK, K.: *Theorie der reellen Zahlen in Bolzanos handsschriftlichen Nachlasse*. Verlag der Tschechoslov. Akad. Wiss., Praga, (1962).

[42] SEIDEL, Ph. L.: *Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen*, München Akad. Wiss. Abh., 51, 379-394, (1847).

[43] SMITH, D.E.: *History of mathematics, volumes I and II.* Dover, (1958).

[44] STOKES, G.G.: *On the critical values of the sums of periodic series.* Trans. Camb. Philos. Soc., t8, 533-583, (1847).

[45] WEIERSTRASS, K.: *Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen.* Jour. für die reine und angew. Math., t. 79, 29-31 (1875).

[46] WEIERSTRASS, K.: *Zur Theorie der Potenzreihen*, Math. Werke, t. I, 67-74, Mayer und Müller, Berlín, (1894).

[47] WEIERSTRASS, K.: *Math. Werke*, t. 3, Mayer und Müller, Berlín, (1903).