EL DESARROLLO DE LA MECANICA Y DE LA FISICA MATEMATICA EN EL SIGLO XIX

DARIO MARAVALL CASESNOVES(*)

La extensión de este tema es tan grande que lo hemos dividido en dos conferencias, la primera es ésta, y la segunda será impartida en el próximo curso de Historia de las Matemáticas de la Academia(**).

Mientras que el siglo XVIII es el siglo de las Academias, el XIX es el de las Universidades, de las Revistas y de las Sociedades Científicas. En 1795 aparece una de las primeras revistas, el Journal de l'Ecole Polytechnique, después van apareciendo los Annales de Mathematiques de Gergonne que se publica en Nimes entre 1810 y 1831; en 1826 en Alemania el Journal de Crelle, es decir el Journal für reine und angewandte Mathematik; después en Francia el Journal de Liouville o Journal des Mathematiques Pures et Appliquées en 1836. En 1835 aparecen los Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Academie des Sciences de París. En 1864 Pasteur funda los Annales de l'Ecole Normal Supérieure, y en 1870 Darboux funda el Bulletin des Sciences Mathematiques. En 1878 aparecen los Mathematischen Annalen de Leipzig. En lengua inglesa están los Philosophical Transactions de Londres y el American Journal of Mathematics (1878), por no citar más que algunas de ellas. Al mismo tiempo van surgiendo las sociedades matemáticas como la London Mathematical Society (1865), la Société Mathematique de France (1872), la Edimburgh Mathematical Society (1883), el Circolo Matemático de Palermo (1884), la American Mathematical Society (1888), la Deutsche Mathematische Vereinigung (1890). Algunas de ellas publican sus revistas como los Proceedings de la de Londres, y el Boletín de la de Francia.

Por el contrario los congresos internacionales son prácticamente ya del siglo XX, aunque el primero tiene lugar en Zurich en 1897, y el segundo en Paris en 1900, es en el que Hilbert desempeñó tan importante papel y presentó su lista de los 23 problemas por resolver.

(*) Académico de número de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, catedrático de Universidad.

(**) Con objeto de no intercalar fórmulas matemáticas en el texto de la conferencia, éstas han sido incluidas en unas notas finales. Han sido extraídas de algunas de mis investigaciones

El papel más importante es desempeñado por Francia, Alemania e Inglaterra, y en menor escala por Italia. Es característico de este siglo la aparición de Rusia y de los Estados Unidos, que tan preponderante papel van a jugar en nuestro siglo.

Mientras que el siglo XVIII es el de la Mecánica que llega a una gran perfección con la creación de la Mecánica Analítica de Lagrange, y el del comienzo de las aplicaciones de la Matemática a la Física, el siglo XIX es el del desarrollo extraordinario de la Física Matemática y de los métodos matemáticos que surgen como consecuencia de los nuevos problemas físicos y de las aplicaciones prácticas a la Industria y a la Ingeniería. Hacia finales del siglo XIX el total anual de publicaciones científicas se duplica; la ciencia sigue un crecimiento exponencial y aproximadamente cada vez que se duplica la población se triplica el número de científicos.

Hay muchos científicos a caballo de los siglos XVIII y XIX, alguno de ellos como Lagrange (1736-1813), se puede decir que pertenecen enteramente al XVIII. Después de su publicación en 1788 de la Mecánica Analítica, Lagrange cae en una fase de desinterés por la Matemática que se prolonga hasta el final de la Revolución Francesa, y el final del siglo XVIII lo dedica a la publicación de algunas de su más importantes obras como son: Teoría de las Funciones Analíticas (1797), Tratado de la resolución de las ecuaciones numéricas (1798) y Lecciones sobre el cálculo de las funciones (1799).

También son más del siglo XVIII que del XIX, Monge (1746-1818) y Carnot (1753-1823). El primero publica sus "Hojas de análisis aplicado a la geometría" en 1795, obra de la que hay una segunda edición en 1801, y una prolongación de esta obra es la memoria publicada en 1802 en el Journal de l'Ecole Polytechnique en colaboración con Hachette (1769-1834) que lleva por título "Aplicación del álgebra a la geometría". En 1799 publica su Geometría Descriptiva, de la que hay una cuarta edición en 1820. aunque no son obras de Física Matemática, están íntimamente relacionadas con ella, pues la Geometría Analítica es básica en la Mecánica Racional, el planteamiento matemático de los problemas mecánicos se hace utilizando el lenguaje de la Geometría Analítica, y conduce a ecuaciones diferenciales, cuya solución y discusión es imprescindible para resolver el problema mecánico. Por otra parte la Geometría Descriptiva es básica en la construcción y en las máquinas.

La obra geométrica de Carnot es de principios del XIX y así sus libros "De la correlación de las figuras en Geometría" es de 1801, su "Geometría de la posición" de 1803, esta denominación "de la posición" será recogida muchos años más tarde por la importante escuela de geómetras proyectivos alemana (Geometrie der Lage). Su "Ensayo sobre la Teoría de las transversales" es de 1806. En la segunda de estas obras extiende la ley de los cosenos del triángulo al tetraedro, y en la tercera generaliza un teorema de Menelao de Alejandría a una curva algebraica de orden n que corta a cada uno de los lados de un triángulo en n puntos reales o imaginarios. La obra de Mecánica de Carnot es del siglo XVIII, su "Ensayo sobre las máquinas en general" es de 1783, que es ligeramente modificada en su segunda edición de 1803, en que aparece con el nuevo título de "Principios fundamentales del equilibrio y del movimiento". Carnot da las leyes fundamentales del choque; la fuerza de dos cuerpos que entran en colisión depende sólo de su movimiento relativo, y es perpendicular a su plano tangente en el punto de contacto. Conoce la conservación de energía en el choque elástico, y la pérdida de energía en el inelástico; a él se debe el teorema de las fuerzas vivas perdidas, que aún se enseña hoy en los cursos de Mecánica.

A finales del XVIII se produce un desaliento y una gran duda sobre el porvenir de las Matemáticas, que se considera que se están agotando. De esta idea participan Lagrange, D'Alembert, Diderot y Euler; y Delambre (1749-1822) secretario perpetuo de la Academia de Ciencias de París en su informe histórico en 1810, pone de manifiesto estas dudas y este desaliento. Contrario a estas ideas es Condorcet (1743-1794) que opina que las Matemáticas todavía están en sus comienzos y que será a través de sus aplicaciones como nacerán nuevas ramas de la matemática y de este modo el progreso será indefinido.

La obra de Legendre (1752-1833) corresponde plenamente a ambos siglos XVIII y XIX, aparte de sus investigaciones sobre Geometría y Teoría de Números, otras son de aplicación inmediata a la Física, como las relativas a las integrales elípticas y a los polinomios que llevan su nombre. Sus investigaciones sobre las integrales elípticas comenzaron en 1786, y continuaron hasta el final de su vida; están contenidas en su mayor parte en los tres tomos de su "Tratado de las funciones elípticas y de las integrales eulerianas" (1825-1832). Demostró que las integrales elípticas, que son las integrales del cociente de dividir una función racional por la raíz cuadrada de un polinomio de cuarto grado pueden reducirse a tres tipos canónicos que llevan su nombre. Las del primer tipo aparecen en el movimiento del péndulo circular y en otros muchos problemas de mecánica, y las del segundo tipo en la rectificación de la elipse. En sus "Ejercicios de Cálculo Integral" en tres tomos (1811-1819) estudió con profundidad las integrales eulerianas y obtuvo la fórmula de duplicación de la función gamma. En una memoria sobre la atracción de los esferoides, en la solución de la ecuación diferencial que lleva su nombre, encontró los polinomios de Legendre, que son las soluciones polinómicas de esta ecuación diferencial, los cuales han sido y siguen siendo de gran uso y estudio. Aparecen estos polinomios en el desarrollo del potencial newtoniano en un punto P, debido a una masa situada en otro punto M, en serie de potencias de las distancias del origen de coordenadas O a P. Los coeficientes de este desarrollo en serie son los polinomios de Legendre, siendo la variable del polinomio el coseno del ángulo MOP. Son uno de los primeros ejemplos o quizás el primero de polinomios ortogonales. Se presentan en la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas; así como las soluciones de las ecuaciones de Laplace en coordenadas cartesianas se llaman funciones armónicas, las soluciones de la ecuación de Laplace sobre la esfera se llaman armónicos esféricos, y dependen de los polinomios de Legendre.

Las integrales elípticas y las funciones elípticas son de una aplicación constante en Física y Mecánica. En 1748 Euler desarrolló la teoría de las funciones circulares como inversas de las integrales de la diferencial del arco seno o coseno, dando nacimiento a las matemáticas de la periodicidad simple. Después las funciones hiperbólicas con periodo imaginario puro, ligadas con las circulares por las fórmulas exponenciales de Euler, fueron encontradas por Ricatti (1707-1775) y su teoría fue desarrollada por Lambert (1728-1777).

Una integral elíptica particular, cuya inversión da origen a las funciones lemniscáticas, fue estudiada por Conti di Fagnano (1682-1766) quien descubrió que un cuadrante de lemniscata puede dividirse en n partes iguales por medio de una construcción geométrica euclidiana, siendo n un entero de forma especial. También descubrió Fagnano que se pueden determinar dos arcos de cualquier elipse dada, de una infinidad de maneras de modo que su diferencia sea un segmento de una línea recta dado y Landen (1719-1790) demostró que la hipérbola puede en general rectificarse por medio de dos elipses, lo que dio lugar posteriormente a la transformación de segundo orden en las funciones elípticas.

Euler contribuyó mucho a la teoría de las integrales elípticas, estableciendo en 1761 el teorema de la adición, pero cometió la equivocación de defender en una memoria de 1766 en la Academia de Ciencias de San Petersburgo el reconocimiento de las integrales elípticas (arcos elípticos) como nuevas funciones trascendentes en analogía con los arcos circulares. Es curioso que Euler que invirtió los arcos circulares para estudiar las funciones circulares no hiciese lo mismo con los arcos elípticos. Legendre siguió en esto los pasos de Euler.

Fue Abel en 1827, quien tuvo la idea genial de invertir las integrales elípticas y crear así la teoría de las funciones elípticas, es decir considerar el límite superior de la integral elíptica como función del valor de la integral, y de esta forma demostró que las funciones elípticas son doblemente periódicas, no siendo nunca un número real el cociente de dividir los dos periodos. Jacobi en "Fundamenta nova theoriae functionium ellipticarum" publicada en 1829 (el año de la muerte de Abel) hizo accesible a los estudiosos de la matemática y de la física las funciones elípticas. Demostró entre otras muchas cosas, que no existen funciones de una variable con más de dos periodos, de esta manera se establecieron las matemáticas de la doble periodicidad.

Con las funciones elípticas ha sucedido algo parecido a la Geometría no euclidea, y es que al publicarse los escritos póstumos de Gauss, así como su diario científico, se ha podido comprobar que Gauss conocía la doble periodicidad de las funciones lemniscáticas en 1797, y que en 1800 conocía las funciones doblemente periódicas generales, adelantándose así en un cuarto de siglo a Abel, y también a Jacobi en la teoría de las constantes elípticas theta (que no son doblemente periódicas), que Jacobi descubrió independientemente de Gauss y de las que hizo un gran uso, y de las que se obtienen los desarrollos en serie de Fourier de la teoría de las funciones elípticas. Gauss no pretendió la prioridad en lo tocante a las funciones elípticas, ni publicó nada sobre las mismas.

Aplicaciones de las integrales elípticas a la física se encuentran ya en el siglo XVII en la elástica plana y en la isócrona paracéntrica (Jacobo Bernoulli en 1694) y Euler en el XVIII dedicó varios artículos a la elástica plana. Binet y Wantzel en 1844, y Hermite en 1877 estudiaron el problema más general de la elástica alabeada. La elástica alabeada es la figura de equilibrio de una varilla flexible, cuya sección es circular y que está sometida a la acción de fuerzas aplicadas solamente en sus extremos. Hay un curioso teorema de Kirchhoff (1824-1887) "el eje de un péndulo esférico permanece tangente a una elástica alabeada, recorriéndola el punto de contacto con velocidad constante". También hay observaciones interesantes en una nota de Bertrand en la Mecánica Analítica de Lagrange en edición publicada por Darboux.

El movimiento de un cuerpo atraído según la ley de la gravitación universal de Newton por dos centros fijos ha sido tratado por Euler (1760) y por Lagrange (1766) y por Legendre en su "Tratado de las funciones elípticas". Euler y Landen aplicaron en 1777 las integrales elípticas al péndulo circular, y Lagrange al péndulo esférico. Ya en el siglo XIX Richelot en 1832 y Hermite en 1877 aplicaron las funciones elípticas al movimiento pendular. El movimiento de un cuerpo pesado de revolución suspendido por un punto de su eje fueron investigados por Lagrange y Jacobi, quien en este problema introdujo el divisor de una integral elíptica de tercera especie. El movimiento a la Poinsot de un sólido alrededor de un punto fijo fue estudiado por Legendre en su "Tratado de las funciones elípticas" y posteriormente por Jacobi y por Hermite, este último en 1877.

El movimiento de un elipsoide fluido homogéneo fue tratado por integrales elípticas por Clairaut, Mc Laurin, D'Alembert, Legendre, Laplace, Jacobi, Dirichlet y Riemann.

En la teoría del potencial newtoniano, la determinación del potencial de un elipsoide homogéneo es llevado a integrales elípticas, por Ivory, Laplace y Legendre (1812), y también el de la masa de un planeta supuesta repartida a lo largo de su órbita, con una densidad inversamente proporcional a la velocidad (Gauss en 1818), y el de un cilindro elíptico homogéneo (Riemann en 1864).

La temperatura en un cuerpo homogéneo en equilibrio térmico, es una función armónica y Lamé (1837) ha introducido las coordenadas elípticas, definidas por el sistema triplemente ortogonal de superficies constituido por tres cuádricas con centro homofocales (un elipsoide, un hiperboloide de una hoja y un hiperboloide de dos hojas) para estudiar este problema, calculando el laplaciano en estas coordenadas elípticas. El propio Lamé, y también Liouville y Heine (1845) y Hermite han investigado la ecuación de Lamé.

Gauss en 1834 ha calculado la función de Green de una elipse con polo en el centro por medio de funciones elípticas y ha obtenido la representación conforme sobre el disco unidad, resultando reencontrado por Schwartz en 1870. Jacobi en una obra póstuma utilizando las coordenadas elípticas de Lamé ha dado la representación conforme de un elipsoide o de un hiperboloide sobre el plano por medio de integrales elípticas de tercera especie. En nuestro siglo se han continuado este tipo de investigaciones. La representación conforme tiene aplicaciones en geodesia, electricidad e hidrodinámica.

Las funciones elípticas tienen aplicación al estudio de la superficie de ondas, tan importante en óptica. Dado un elipsoide E, si se corta por planos diametrales P y se llevan sobre el diámetro perpendicular Δ a partir del centro O y en uno y otro sentido longitudes iguales a los semiejes de la sección plana de E por P, el lugar geométrico de estos extremos es la superficie de ondas. La superficie de ondas es un caso particular de la superficie de cuarto orden de Kummer, que es una superficie hiperelíptica.

Otras aplicaciones de las funciones elípticas son a la cuerda de saltar, que es una cuerda homogénea que se hace girar muy rápidamente alrededor de la recta que une sus extremos, este problema es equivalente al de hallar la figura de equilibrio de un hilo sujeto por sus extremos y tal que cada elemento diferencial del hilo es rechazado proporcionalmente a la distancia y a su longitud por la recta que une los extremos; el de una barra elástica prismática empotrada verticalmente en uno de sus extremos y soportando en el otro extremo un peso, y el de la curva elástica plana sometida a una presión normal uniforme. Una aplicación cinemática es la del cuadrilátero articulado plano, cuya deformación se puede expresar por una representación paramétrica de una cúbica plana mediante funciones elípticas. Así como la elástica alabeada tiene las mismas ecuaciones que el movimiento de un cuerpo pesado de revolución suspendido por un punto de su eje, la elástica plana sin presión tiene las mismas ecuaciones que el péndulo simple. Una aplicación geométrica de las funciones elípticas, es la de los polígonos de Poncelet inscritos a una cónica y circunscritos a otra, que tienen una analogía con el péndulo simple. Estos problemas fueron generalizados por Jacobi a varios polígonos.(*)

La obra de Laplace (1749-1827) corresponde a los siglos XVIII y XIX. Su Mecánica Celeste consta de cinco tomos que se publican desde 1798 hasta 1825, es la culminación de la teoría newtoniana de la gravitación; allí se encuentran las investigaciones de Newton, Clairaut, d'Alembert, Lagrange y él mismo, sobre la figura de la Tierra, la teoría de la Luna, el problema de los tres cuerpos y las perturbaciones de los planetas; consiguió demostrar que los movimientos de los planetas son seculares, de modo que el sistema solar se puede considerar estable. Laplace descubrió la causa de la aceleración de la Luna y las grandes desigualdades de Saturno y Jupiter, que Euler y Lagrange no acertaron a explicar. En su Mecánica figura el operador diferencial conocido como la laplaciana, que es la divergencia del gradiente de una función, que se denota por Δ y también por ∇^2; así como la ecuación de Laplace que es el resultado de igualar a cero la laplaciana, la cual es básica en la teoría de los potenciales newtoniano y electrostático. En su Mecánica se halla recogido el concepto de potencial como función, cuyo gradiente es el campo, concepto que utilizó por primera vez en un artículo publicado en 1782 sobre la teoría de las atracciones de los esferoides y de las figuras de los planetas. Con

(*) En la nota 5ª puede verse una aplicación a la mecánica relativista, de las funciones elópticas.

anterioridad a su Mecánica Celeste publicó en 1796, su "Exposición del sistema del mundo" donde expone su célebre hipótesis cosmogónica sobre el origen del sistema solar, que se formó a partir de una masa de gas incandescente, girando alrededor de un eje, de modo que al irse enfriando el gas, se contrajo, lo que provocó en virtud del principio de conservación del momento cinético (momento angular) que el movimiento de rotación se acelerase, lo que tiene como consecuencia que del borde exterior se desprendiesen anillos sucesivos que al condensarse formaron los planetas, mientras que el nucleo central formó el Sol. en su teoría Laplace se inspiró en la hipótesis cosmogónica de Kant, pero mientras éste se limitó a dar una explicación cualitativa, Laplace formuló una teoría cuantitativa.

Laplace en 1816 corrigió el error de Newton en sus Principia sobre el cálculo de la velocidad del sonido en el aire. Newton supuso que las compresiones y expansiones del aire eran isotérmicas, lo que daba un valor demasiado pequeño para la velocidad del sonido. Laplace supuso que estas compresiones y expansiones al ser tan rápidas eran adiabáticas, lo que lleva consigo un mayor valor del coeficiente de elasticidad del aire y por tanto de la velocidad del sonido, que resultaba más adecuado al valor experimental.

La ecuación de Laplace expresada en distintos sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonales en dos y tres dimensiones, al ser integrada por el método de separación de variables da origen a las más importantes funciones especiales de la Física.

La integral de Laplace, que es seguramente el primer ejemplo de transformación integral, es desarrollada en 1812 en su "Teoría analítica de las probabilidades", aunque había sido utilizada con anterioridad por Euler en la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias. A partir de 1892 Heaviside utilizó su Cálculo Simbólico para la resolución de ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales que se presentan en Electrotecnia; durante algunos años el cálculo de Heaviside se utilizó sin haber sido justificado matemáticamente, hasta que en 1910 Bromwich y después Carson, Van der Pol y Doetsch utilizando la transformación de Laplace de variable compleja justificaron el cálculo de Heaviside. Desde entonces hasta nuestros días la transformación de Laplace ha adquirido un gran interés tanto en la Matemática pura como en la aplicada. De 1920 a 1930 tienen lugar las investigaciones de Denjoy, Carleman y Ostrowski sobre las clases casi-analíticas de funciones y en ellas la transformación de Laplace juega un papel importante.

La transformación de Laplace es anterior a la de Fourier (integral de Fourier) que aparece por primera vez en 1822 en su "Teoría analítica del calor".

En el primer cuarto de siglo del XIX, se establecen en Francia las bases de cuatro importantes ramas de la Física Matemática, que son: el Electromagnetismo (Ampère), la Optica (Fresnel), la Termodinámica (Carnot) y la Teoría de la propagación del Calor (Fourier).

A fines del XVIII se da un gran avance en el conocimiento de la electricidad: Coulomb (1736-1806) inventó una balanza de torsión con la que descubrió en 1785 la ley que lleva su nombre que expresa que la fuerza de atracción o de repulsión entre cargas eléctricas de distinto o del mismo signo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Esta ley es también válida para los polos magnéticos, muestra que el potencial coulombiano es análogo al newtoniano, y es la base de la electrostática y de la magnetoestática. Con anterioridad a Coulomb, Michell (1724-1793) había inventado también una balanza de torsión con la que Cavendish (1731-1810) calculó la constante de la gravitación universal en 1798, y descubrió también antes que Coulomb la ley de este nombre, pero no la publicó. Sus experiencias sobre electricidad fueron publicadas más de cincuenta años después de su muerte por Maxwell.

Volta (1745-1827) inventó el primer "acumulador" de cargas eléctricas en 1775, y en 1800 inventó la primera pila, con lo que proporcionó el primer generador de corriente eléctrica, que permitió un progreso considerable a la física y química experimentales. Davy (1778-1829) utilizó ampliamente las pilas voltaicas en sus experiencias químicas, que le permitieron hacer progresar ampliamente esta ciencia. Mientras que los trabajos de Coulomb y Cavendish se refieren a la electrostática, los de Volta se refieren a la electrodinámica (corrientes eléctricas). El hecho de que la ley de Coulomb se refiere tanto a cargas eléctricas como a polos magnéticos, hizo sospechar que existía un paralelismo entre electricidad y magnetismo, lo que condujo a la realización de muchos experimentos infructuosos, hasta que en 1819 el físico danés Oerstedt (1777-1851) demostró experimentalmente que una aguja imantada en la proximidad de un hilo recorrido por una corriente eléctrica se desvía hasta ponerse en ángulo recto con el hilo y que al invertir el sentido de la corriente, la aguja da media vuelta y vuelve a ponerse en ángulo recto con el hilo pero apuntando en sentido contrario. Este experimento es la primera prueba de la relación entre la electricidad y el magnetismo, de ella arranca el electromagnetismo.

El lunes 11 de septiembre de 1820 (los lunes eran los días de sesión) Arago informó a la Academia de Ciencias de París de las experiencias de Oerstedt, y en las sesiones siguientes 18 y 25 de septiembre, Ampère presentó a la Academia dos memorias en las que establecía las bases físicas y matemáticas de las acciones magnéticas ejercidas por las corrientes eléctricas, era lo que se decía entonces transformar la electricidad en magnetismo. Demostró experimentalmente que dos hilos paralelos recorridos por corrientes eléctricas del mismo sentido se atraen, y se repelen si las corrientes son de sentido opuesto, y también que si un hilo conductor puede girar alrededor de la perpendicular común a él y a otro hilo conductor fijo, gira hasta colocarse paralelo al hilo fijo, de modo que la corriente les recorra en el mismo sentido.

En 1823 Ampère expuso una teoría, que fue acogida con escepticismo por sus contemporáneos, según la cual las propiedades de un imán son debidas a corrientes eléctricas que circulan en su interior. Esto es el anuncio de las futuras teorías electrónicas, que se desarrollarían más de medio siglo después. De esta forma se rompe la simetría entre electricidad y magnetismo, mientras que las cargas eléctricas existen, las "cargas" magnéticas libres (los monopolos) no existen, no hay magnetismo verdadero, o lo que es lo mismo el campo magnético es solenoidal (de divergencia nula), es por tanto debido al movimiento de las cargas eléctricas.

Ampère inventó en 1822 el solenoide, que es un hilo en forma de hélice recorrido por una corriente eléctrica, que se comporta como un imán, es el fundamento del electroimán que fue descubierto por Sturgeon en 1823, enrrollando un solenoide alrededor de un nucleo de hierro, de modo que al pasar la corriente por el hilo, el conjunto hilo-nucleo actúa como un imán, y al cesar la corriente deja de actuar como un imán.

Arago, Biot, Savart y Laplace colaboraron con Ampère en establecer las bases matemáticas del electromagnetismo. La ley de Ampère permite calcular el campo magnético engendrado por una corriente eléctrica en función de la geometría del sistema. En su forma diferencial la ley de Ampère es a veces conocida como ley de Laplace. La integración de esta forma diferencial es conocida también como ley de Biot-Savart y como consecuencia de la misma, la intensidad del campo magnético engendrado por una corriente rectilínea de longitud infinita (muy larga) es inversamente proporcional a la distancia y directamente proporcional a la intensidad de la corriente, siendo las lineas de campo circunferencias perpendiculares al hilo con sus centros sobre el mismo.

Ampère también enunció el teorema de la circulación del campo magnético alrededor de una curva cerrada, que es igual a la intensidad de las corrientes que rodea (salvo un coeficiente de proporcionalidad que depende del sistema de unidades que se escoja), y mostró de esta forma que las corrientes cerradas son equivalentes a hojas magnéticas. En toda la electrodinámica es fundamental el concepto de momento magnético (o dipolo) que es el producto de la masa magnética de un polo por la distancia que separa los dos polos norte y sur. El momento magnético origina el concepto matemático de potencial de doble estrato, que tiene un gran interés tanto desde el punto de vista de la matemática pura como de la física matemática.

Arago realizó experiencias en las que hacía circular una corriente eléctrica por un conductor de cobre, y demostró que atraía las limaduras de hierro sin imantar, que podía imantar el hierro desimantado. Al mismo tiempo al demostrar que el hilo de cobre por el que pasaba la corriente eléctrica se imantaba, se deducía que no era necesaria la presencia del hierro para que se desarrollaran fuerzas magnéticas.

También Ampère cultivó la matemática pura, y a él y a Monge se debe la ecuación que lleva sus nombres, ecuación en derivadas parciales de segundo orden, no lineal, con dos variables independientes, la cual ha sido objeto de importantes estudios; un caso muy particular de la misma es la ecuación a la que satisfacen las superficies desarrollables.

Después de Oerstedt y Ampère los físicos se interesaron por el fenómeno inverso, es decir por el de transformar el magnetismo en electricidad. A estas investigaciones están ligados fundamentalmente tres nombres: Faraday (1791-1867), Henry (1797-1878) y Lenz (1804-1865). Henry y Gibbs son los dos grandes físicos norteamericanos del siglo XIX, excepción hecha de los grandes inventores como Edison. En el XVIII solamente hay uno que es Franklin, porque el conde Rumford (1753-1814) de nombre Benjamin Thompson, aunque norteamericano, luchó en la guerra de la independencia al lado de los ingleses, por lo que al final de la misma se exilió a Europa y aquí transcurrió toda su vida científica.

Los nombres de Faraday y Henry están ligados a dos importantes instituciones científicas que son la Royal Institution y la Smithsonian Institution. La primera fue fundada en Londres en marzo de 1799 por el conde Rumford para difundir el conocimiento científico, facilitar la aplicación de la ciencia a la industria y procurar el bienestar de las gentes. En realidad se trató de un importante instituto de investigación; allí trabajaron Davy, Faraday, Tyndall y Lord Rayleigh que se fueron sucediendo en la misma. El papel de este centro de investigación fue de gran importancia en la historia científica de Inglaterra en el siglo XIX.

La Smithsonian Institution fue fundada en 1837 por un legado de un inglés Jaime Smithson fallecido en 1829, al gobierno de los Estados Unidos. Su misión también era el aumento y la difusión del conocimiento. Fue dirigida por Henry hasta su muerte en 1878. También fue un instituto de investigación muy importante, y quizás el primero en el que se estableció una colaboración entre la ciencia y el poder militar, desempeñando un papel esencial en la organización científica de la guerra de secesión a favor del Norte.

Einstein ha comparado en igualdad de importancia científica a la pareja Galileo-Newton con la Faraday-Maxwell en un esbozo a modo de las vidas paralelas de Plutarco. Faraday ha sido uno de los más importantes físicos experimentales y teóricos que han existido, pero no fue un físico matemático. Es un ejemplo vivo de que no es lo mismo la Física Matemática que la Física Teórica, en contra de lo que opinaba Poincaré.

Maxwell en el prefacio de su tratado sobre Electromagnetismo escribía que para él, el modo de concebir los fenómenos de Faraday era matemático, a pesar de que no usaba símbolos matemáticos. Faraday partiendo del todo llegaba a las partes por análisis, enunciaba en forma global las leyes de la Física, y como todavía no conocía los métodos matemáticos para transformar fórmulas globales en locales (Green , Stokes, etc.) la matemática que necesitaba era distinta de la que entonces se enseñaba. Después de Faraday, Maxwell dotado de los medios de transformar entre sí teoremas globales y locales, matematizó la física de Faraday. Por tanto pudiéramos decir que Faraday no era un matemático convencional y por tanto era un físico teórico y no un físico matemático, expuso sus teorías de modo que pudieran ser matematizadas por las generaciones posteriores, y por tanto sin ser matemático, puede ser considerado como uno de los más grandes matemáticos "honoris causa" de la historia de la ciencia.

Después de Ampère se sabe que una corriente eléctrica engendra un campo magnético y que un campo magnético ejerce sobre una corriente eléctrica una fuerza mecánica, que la electricidad estática no tiene efectos magnéticos, se podía decir que las corrientes eléctricas estaban rodeadas de un campo magnético, mientras que las cargas eléctricas estáticas solamente estaban rodeadas de un campo eléctrico. Era lógico suponer que también tendría lugar el efecto inverso, es decir que los campos magnéticos pudieran engendrar corrientes eléctricas, las llamadas corrientes inducidas, pero los físicos estaban inmersos en una gran obscuridad, porque desconocían lo que eran las corrientes eléctricas, para ellos la corriente eléctrica era un fluido de naturaleza desconocida, que fluía del polo positivo al negativo, no sabían que eran cargas eléctricas en movimiento, cosa que no se sabría hasta sesenta años después, al aparecer la teoría de los electrones. Es curioso que Franklin había emitido la hipótesis de la naturaleza corpuscular de la electricidad, pero no había prosperado; el propio Franklin había sugerido el sentido equivocado de la corriente eléctrica del polo positivo al negativo, por creer que en el polo positivo había un exceso de fluido eléctrico, este sentido equivocado de la corriente lo seguimos manteniendo hoy, pero no tiene efectos negativos, porque siempre se le atribuye a todas las corrientes este sentido. En realidad el sentido de la corriente es del polo negativo al positivo, porque los electrones se mueven atraídos por el polo positivo.

Si los físicos hubieran sabido que las corrientes son cargas eléctricas en movimiento y que el magnetismo es producido por este movimiento, se hubieran dado cuenta enseguida que para producir corrientes eléctricas era necesario que el campo magnético fuese variable. Que una carga eléctrica en movimiento produce los mismos efectos que una corriente eléctrica fue cuestionado por Maxwell. Helmholtz (1821-1894) sugirió a Rowland (1848-1901) un experimento que éste realizó en 1876; consistía en pegar unas hojas de estaño a un disco de cristal, comunicar una carga eléctrica al estaño, y hacer girar el disco a gran velocidad, entonces el disco desviaba un imán igual que una corriente eléctrica, por lo que la pregunta de Maxwell fue contestada afirmativamente. Veinte años después de este experimento de Rowland se supo ya que las corrientes eléctricas eran cargas eléctricas en movimiento.

Faraday comenzó siendo un auxiliar de Davy que le colocó en la Royal Institution en 1813, centro donde fue ascendiendo por sus grandes méritos; en 1825 fue director de laboratorio y en 1833 profesor de Química. Realizó importantes aportaciones en química sobre licuación de gases y obtención de bajas temperaturas, descubriendo el benceno en 1825, cuerpo que Hofmann encontró en el alquitrán de hulla en 1845. Continuó la obra de Davy en electroquímica, estableciendo las leyes de la electrolisis que llevan su nombre (1833) y calculó la cantidad de electricidad necesaria para liberar el equivalente-gramo de un elemento, es decir un número de gramos igual al equivalente químico; esta cantidad de electricidad son 96.485 culombios. Aun cuando las leyes de Faraday de la electrolisis son una prueba de la naturaleza corpuscular de la electricidad y de la teoría atómica, Faraday pasó por alto estos hechos por ser adversario del atomismo.

Cuando Faraday conoció el experimento de Oerstedt, se puso a trabajar sobre este tema, y en 1821 ideó un dispositivo que funcionaba como un motor eléctrico en el que se transforma la energía eléctrica en energía mecánica. Su descubrimiento de las corrientes inducidas es de agosto de 1831, enrollaba dos bobinas alrededor de un nucleo de hierro, y hacía pasar una corriente por una de ellas, conectándola a una batería y pudiendo abrir y cerrar el circuito mediante una llave; cuando cerraba el circuito pasaba corriente por la bobina que engendraba un campo magnético en el nucleo de hierro, el cual generaba a su vez una corriente eléctrica en la segunda bobina, lo que comprobaba conectando esta segunda bobina a un galvanómetro que señalaba el paso de la corriente; se trataba del primer transformador. Ahora bien no se producía en la segunda bobina una corriente continua, sino que el galvanómetro solamente marcaba el paso de la corriente cuando se cerraba el circuito y cuando se abría, siendo ambas corrientes de sentidos opuestos, es decir que solamente había corriente inducida cuando se creaba o desaparecía el campo magnético, que eran las únicas variaciones del mismo. También realizó Faraday las siguientes experiencias: introducir un imán en una bobina conectada a un galvanómetro, y sacarlo, mientras introducía y sacaba el imán, el galvanómetro indicaba el paso de corrientes eléctricas de sentidos opuestos; también sucedía lo mismo si el imán lo dejaba quieto y era la bobina la que movía, pero no pasaba corriente si el imán y la bobina permanecían quietos. Estas experiencias son el descubrimiento de las corrientes inducidas.

Perfeccionó las anteriores experiencias con otras que constituyen el invento del primer generador de corriente eléctrica. Se inspiró en experiencias que anteriormente había realizado Arago, para lo cual hacía girar una rueda de cobre, de modo que el borde pasase entre los dos polos de un imán, y se producía una corriente eléctrica en el disco de cobre, que duraba mientras el disco girase. hasta estas experiencias los únicos generadores de corrientes eléctricas eran las baterías químicas, que eran caras y producían poca electricidad, pero ahora se disponía de un nuevo método mucho más barato y capaz de producir gran cantidad de electricidad, pero debieron de pasar más de cincuenta años, para que llegara la era de las dinamos y de los motores eléctricos, y por tanto para que tuvieran repercusión en la industria los descubrimientos de Faraday.

Faraday realizó experiencias en 1845 sobre la influencia del campo eléctrico sobre la polarización de la luz (efectos electroópticos) sin resultado, descubrimiento que realizó Kerr unos treinta años después. Pero en los efectos magnetoópticos sí tuvo éxito Faraday, al demostrar que un campo magnético influye sobre la polarización de la luz (efecto Faraday).

En 1844 comenzó la exposición de su teoría de las líneas de fuerza, que le permitieron dar una teoría descriptiva, sin fórmulas matemáticas, muy completa de los fenómenos electrostáticos y electromagnéticos, independizándolos de los gravitatorios, ya que estos últimos dependen solamente de fuerzas que actúan a lo largo de las líneas rectas que unen las masas, mientras que las líneas de fuerza de Faraday, pueden ser encorvadas y pueden rodear obstáculos. La acción a distancia a lo largo de líneas rectas de las fuerzas gravitatorias solamente pueden ser aplicadas a casos sencillos de fenómenos eléctricos, mientras que las fuerzas atractivas que se ejercen entre masas gravitatorias son independientes del medio en que se hallan; no sucede así con las fuerzas que actúan entre cargas eléctricas, el medio las afecta, los dieléctricos absorben electricidad y necesitan tiempo para ello. El descubrimiento de la capacidad específica de inducción de los dieléctricos, también llamada constante dieléctrica, que había sido hecha con anterioridad por Cavendish aunque no lo había publicado, es muy importante, la inducción electrostática no tiene equivalente en la teoría de la gravitación.

Lord Kelvin (1824-1907) de nombre William Thomson, demostró que la teoría de las líneas de fuerza de Faraday pueden ser matematizadas, y Maxwell llevó a cabo esta matematización. En 1846 en sus "Pensamientos sobre vibraciones de los rayos", Faraday exponía la posibilidad de que las vibraciones mediante las cuales se pretende explicar la teoría de la luz, se produzcan en las líneas de fuerza que vinculan entre sí las partículos (masas materiales) y se podría así prescindir del éter. Faraday duda del éter y apunta hacia una teoría electromagnética de la luz, indica que las partículas son concentraciones de campos de fuerza, y considera que la luz puede ser una vibración de las líneas de fuerza, y cree que las vibraciones transversales a lo largo de las líneas de fuerza pueden explicar la polarización de la luz. Maxwell en 1864 en su "Teoría dinámica del campo electromagnético" reconoce que la propagación de perturbaciones electromagnéticas transversales, con exclusión de las longitudinales, ha sido formulada por Faraday en la obra antes citada, y que la teoría que él comienza a desarrollar en este trabajo, es en esencia igual a la propuesta por Faraday.

Las líneas de fuerza en un campo de fuerzas son tangentes en cada punto a la fuerza; se supone que de cada carga q salen $4\pi q$ líneas de fuerza, y de este modo la densidad de líneas de fuerza en un punto es igual a la intensidad del campo. Ello sirve tanto para el campo eléctrico como para el magnético y Faraday las hacía visibles por la distribución de las limaduras de hierro en un campo magnético, pero en su imaginación las consideraba reales, de modo que cuando se cerraba un circuito las líneas de fuerza salían al espacio, y cuando se abría se replegaban. La corriente eléctrica inducida solamente tiene lugar cuando las líneas de fuerza pasan a través de la superficie rodeada por el circuito. En sus experiencias antes descritas, la corriente inducida se engendraba cuando las líneas de fuerza que rodean al imán en movimiento relativo respecto a la bobina pasan a través de ésta.

Las líneas de fuerza se extienden a cualquier campo vectorial, así las líneas de corriente y torbellino en hidrodinámica, de flujo térmico en teoría del calor, de inducción en magnetismo, etc.

Faraday, aunque miembro de la Royal Society no aceptó la presidencia de la misma cuando le fue ofrecida, ni tampoco aceptó una cátedra en la Universidad de Londres, entonces recién fundada.

Henry perfeccionó mucho los electroimanes, aumentando el número de hilos del enrollamiento de la bobina, tanto en potencia como en finura y delicadeza, mientras que el electroimán de Sturgeon levantaba 9 libras, Henry construyó en 1831 un electroimán que levantaba 750 libras, y otro en el Yale College que levantaba una tonelada; pero también en 1835 construyó relés con electroimanes muy pequeños. Su descubrimiento teórico más importante fue el de las corrientes inducidas y el de la autoinducción o inducción de una bobina sobre sí misma. En agosto de 1831 descubrió la inducción, pero no lo publicó hasta julio de 1832, después de que lo hubiera hecho Faraday; el método seguido por ambos sabios fue distinto, pero el resultado era siempre el mismo, la corriente se produce en una bobina que rodea un nucleo de hierro dulce, siempre que se genera magnetismo en el hierro, y se produce una corriente opuesta cuando la acción magnética desaparece, y también hay una corriente instantánea en uno u otro sentido siempre que se produce un cambio en la intensidad del campo magnético del hierro. Faraday y Henry habían transformado el magnetismo en electricidad, lo contrario que había hecho Ampère.

Henry se adelantó a Faraday en el descubrimiento de la autoinducción, pues en la antecitada publicación señala que se obtienen chispas de la bobina que rodea al nucleo de hierro dulce, manteniendo muy próximos sus extremos cuando se excita el electroimán. Faraday redescubrió la autoinducción en 1834, dos años más tarde que Henry.

Después de este descubrimiento Henry siguió realizando nuevas experiencias sobre inducción y mediante transformadores, consiguió obtener corrientes de alta tensión y poca intensidad, a partir de corrientes de baja tensión y gran intensidad, y también el fenómeno contrario. Henry fue nombrado profesor de Matemáticas en 1826 en la Academia de Albany, capital del Estado de Nueva York, que era un centro de enseñanza. En 1832 fue nombrado profesor en Princeton.

El tercer nombre que hay que agregar a los descubridores de las corrientes inducidas es el de Lenz, físico báltico nacido en Estonia en Dorpat (ahora Tartu), a él se debe la ley que lleva su nombre, que afirma que una corriente inducida por fuerzas electromagnéticas, siempre produce efectos que se oponen a aquellas fuerzas. La ley de Lenz tiene un gran parecido con el principio del desplazamiento del equilibrio químico de Le Châtelier (1850-1936), que afirma que un cambio en uno de los factores que determinan un equilibrio, reajustan el sistema en el sentido de una reducción del efecto de cambio. El resultado importantísimo de la ley de Lenz y del principio de Le Châtelier, es que los factores del equilibrio no pueden aumentar tanto como se quiera, porque por el mero hecho de su aumento, el reajuste del sistema hace que este aumento no sea indefinido, es un a modo de generalización de la imposibilidad del movimiento continuo y de la generación espontánea de energía, y son de gran aplicación tanto teórica como práctica en la racionalización de la industria para conseguir una reducción en los costes de producción.

En un artículo de Roger del 12 de diciembre de 1831, en el que informa sobre el descubrimiento de las corrientes de Faraday, en Anales de Filosofía, hace afirmaciones que parecen intuir la ley de Lenz, dice que el efecto electromagnético de la corriente producida como consecuencia del movimiento relativo del conductor respecto a los polos del imán, tiende a disminuir constantemente dicho movimiento, hasta llevar al conductor y al imán al reposo relativo, de modo que si se hace girar a uno de ellos, el otro tiende a girar en el mismo sentido y con la misma velocidad.

Un invento muy relacionado con las corrientes inducidas es el del telégrafo eléctrico. Henry descubrió el telégrafo, pero no lo patentó, por ser un hombre de una generosidad extraordinaria; pero ayudó mucho a Morse (1791-1872), que es a quien se atribuye el invento del telégrafo, desde luego a él se debe el código que lleva su nombre y que se usa por los telegrafistas. En 1844 estableció el primer telégrafo práctico entre Baltimore y Washington (más de 40 millas). Henry también ayudó a Wheatstone (1802-1875), quien también inventó un telégrafo, un poco anterior al de Morse, por lo que fue nombrado caballero en 1868. Hay precedentes en la invención del telégrafo eléctrico, y así Gauss construyó uno en 1833. Ya en su memoria antecitada del 25 de septiembre de 1820, Ampère sugiere que las acciones magnéticas de las corrientes pueden ser la base de un telégrafo eléctrico. Conviene señalar que Salvá en 1798, estableció un telégrafo electrostático, en el que la electricidad era producida por frotamiento (electricidad de alta tensión y baja intensidad) entre Aranjuez y Madrid, (más de 26 millas). Ahora bien, el telégrafo práctico y comercial es el de Morse.

La transmisión de señales eléctricas a través de un hilo ha dado origen a una importante ecuación en derivadas parciales, que se diferencia de la ecuación de las ondas en un término lineal en la derivada parcial de primer orden respecto al tiempo de la función incógnita. A esta ecuación Poincaré le dio el nombre de ecuación de los telegrafistas, y ha sido objeto de importantes estudios matemáticos.

El principio del siglo XIX señala el triunfo de la teoría ondulatoria de la luz sobre la teoría corpuscular. Newton había formulado una teoría corpuscular de la luz que como no explicaba sus experiencias sobre los anillos coloreados (fenómenos de interferencias) la completó dotándola de unos elementos de periodicidad que eran los "fits" (accesos). Huygens (1629-1695) formuló una teoría ondulatoria de la luz en oposición a la de Newton, en la que la luz se propagaba por ondas longitudinales. Ambas teorías explicaban los llamados fenómenos neutros, es decir los de reflexión y refracción, con mayor comodidad en el sentido de Poincaré, la teoría corpuscular que la ondulatoria, pero ambas fracasaban en explicar el fenómeno de la doble refracción, descubierto por el físico danés Bartholin (1625-1698) en 1679 en el espato de Islandia; observó que a su través se veían los objetos dobles, debido a que la luz se refractaba en dos ángulos distintos, de modo que el rayo incidente emergía como dos rayos. Observó también que al girar el cristal un rayo permanecía fijo, al que llamó ordinario, mientras que el otro giraba, lo llamó extraordinario. Durante todo el siglo XVIII la mayoría de los físicos adoptaron la teoría corpuscular, pero hubo notables excepciones, como la de Euler. El principal argumento de que la luz no era un fenómeno ondulatorio, a diferencia del sonido, era que mientras éste "rodeaba" los obstáculos (difracción), la luz no lo hace y marca zonas netas de sombra. Grimaldi (1618-1663) jesuita y profesor de la Universidad de Bolonia, realizó un experimento que mostró el carácter ondulatorio de la luz, descubrimiento que se publicó dos años después de su muerte. Hizo pasar un rayo de luz por dos rendijas estrechas y consecutivas, de modo que al incidir sobre una pantalla, la anchura de la imagen era tres veces más grande que la primera rendija. Este experimento mostraba que la luz se desviaba de su camino y rodeaba ligeramente los obstáculos. A este fenómeno lo denominó difracción. El descubrimiento de Grimaldi no fue tenido en cuenta.

Young (1773-1829) en experiencias publicadas de 1801 a 1807, demostró la naturaleza ondulatoria de la luz de manera totalmente satisfactoria, haciendo pasar la luz por rendijas muy estrechas y observando que aparecían varias bandas de luz sobre una pantalla, donde solamente debería de haber una raya neta entre luz y sombra. Además Young, que también realizó experiencias de interferencias con el sonido, las extendió a la luz, probando que en ocasiones luz más luz producen obscuridad (según la expresión de Arago). Hacía pasar luz por dos orificios pequeños y obtenía sobre una pantalla zonas alternativas de luz y sombra; por tanto fenómenos de interferencias, análogos a las pulsaciones del sonido, según lo cual en la superposición de dos sonidos distintos, se producen periodos de sonido intensificado, separados por periodos de silencio. Young calculó la longitud de onda de la luz visible, obteniendo valores inferiores a una micra.

Una vez comprobado el carácter ondulatorio de la luz, quedaba el interrogante de si estas ondas eran longitudinales como las ondas sonoras, o transversales como las producidas en la superficie de un estanque de agua, cuando se tira una piedra sobre el mismo. Para poder dar explicación al fenómeno de doble refracción Young, supuso que las ondas luminosas eran transversales, y así se lo comunicó a Arago en 1817.

Malus (1775-1812) en 1808 observando la luz del sol, reflejada en una ventana, a través de un cristal de espato de Islandia, vio que sólo emergía del cristal un solo rayo; dedujo de ello que la luz se puede polarizar por reflexión. También observó que los dos rayos refractados que emergen del espato de Islandia, se polarizaban perpendicularmente, porque cuando el cristal gira, un rayo se debilita y el otro se intensifica, desapareciendo cada uno de ellos alternativamente en cada giro del cristal de un ángulo recto. Malus buscó una explicación equivocada, imaginando que los dos rayos de luz (el ordinario y el extraordinario) representaban polos de luz de distinto signo (como sucede con las cargas eléctricas y los polos magnéticos) y les dio el nombre de rayos de luz polarizada. A Malus se atribuye el descubrimiento de la polarización de la luz por reflexión.

Biot (1774-1862) aunque seguía creyendo en la teoría corpuscular de la luz, descubrió en 1815 un fenómeno netamente ondulatorio, y fue el que las sustancias orgánicas líquidas o en disolución, hacen girar el plano de polarización de la luz en el sentido de las agujas del reloj unas veces o en el contrario otras. Sugirió que ésto podría ser debido a la asimetría de las moléculas orgánicas. Viviendo todavía Biot, Pasteur demostró que efectivamente esta asimetría es la causa de la rotación de la luz polarizada. También en 1815, Brewster (1781-1867), partidario de la teoría corpuscular de la luz, descubrió otro fenómeno netamente ondulatorio, y es que un rayo de luz puede desdoblarse en dos rayos, uno reflejado y otro refractado que forman un ángulo recto entre sí, y que pueden polarizarse completamente. Esta ley lleva hoy su nombre.

Nicol (1768-1851) estableció las bases de la polarimetría, que es una de las técnicas más potentes para el estudio de las estructuras moleculares, al descubrir en 1828, que pegando dos prismas de espato de Islandia con bálsamo del Canadá, la luz que incidía sobre un prisma era refractada en dos rayos, uno que se reflejaba en el bálsamo y otro que lo atravesaba. Este último rayo podía atravesar un segundo prisma de Nicol, si éste estaba alineado con el primero, y no pasaba nada de luz si ambos prismas formaban ángulo recto; en posiciones intermedias, según fuese el ángulo de giro de un prisma respecto al otro, pasaba luz con más o menos intensidad.

Mientras que los fenómenos neutros son explicados indistintamente por la teoría corpuscular y por la ondulatoria, los fenómenos de interferencias y de difracción, llamados escalares, y los fenómenos de polarización y doble refracción, llamados vectoriales, solamente son explicados por la teoría ondulatoria. Los fenómenos escalares sí son explicados y los vectoriales no, por la teoría de las ondas longitudinales, mientras que tanto los escalares como los vectoriales son explicados por la teoría de las ondas transversales.

Después de las experiencias y descubrimientos de Young, Arago, Malus y Biot, es Fresnel (1788-1827) quien completa y perfecciona la teoría ondulatoria de la luz y quien establece las bases matemáticas de la misma.

Comienza Fresnel a trabajar sobre la luz en 1815, en un momento en que los mayores sabios de Francia: Laplace, Poisson, Biot, etc., eran partidarios de la teoría corpuscular, y dirige a la Academia de Ciencias de París dos notas sobre el resultado de sus primeras investigaciones, en las que observa las franjas que aparecen en los bordes de la sombra de un cuerpo opaco, y da la explicación de las mismas por la teoría ondulatoria.

En marzo de 1817, la Academia de Ciencias de París propone como tema para el concurso del gran premio de ciencias matemáticas, el estudio experimental y teórico de la difracción de la luz. Fresnel presenta un trabajo que lleva por título "Natura simplex et fecunda" en la que describe el dispositivo experimental de los llamados hoy espejos de Fresnel, introduce las integrales que llevan su nombre (representación paramétrica de la espiral de Cornu), y da a conocer sus resultados experimentales y la explicación teórica de los fenómenos de interferencias y difracción. Poisson, uno de los miembros de la Comisión de la Academia encargada de juzgar la memoria de Fresnel, calcula siguiendo los métodos de Fresnel que en el centro de la sombra debida a una pantalla circular debería de haber un máximo de intensidad luminosa, y guiado por el sentido común, considera este hecho suficiente para descartar la teoría de Fresnel. Pero éste realizó la experiencia imaginada por Poisson, y demuestra que el resultado de los cálculos de Poisson es correcto, y que efectivamente en dicho punto hay un máximo de intensidad luminosa. En consecuencia la Academia de Ciencias le otorga el premio en 1819. La memoria es de 1818 y con ella triunfa la teoría ondulatoria de la luz.

A partir de esta fecha, Fresnel siguió investigando, explica los fenómenos de polarización sobre la base de que las vibraciones luminosas son perpendiculares a la dirección de propagación de la luz (ondas transversales), hipótesis enunciada por él en 1821. De 1821 a 1823 desarrolla la óptica cristalina, llevando la propagación de la luz a través de los cristales a la construcción de las superficies de ondas, demuestra que la rotación del plano de polarización de la luz en los cuerpos dotados de poder rotatorio, es debida a una desigual velocidad de propagación de la luz en las vibraciones circulares en el sentido de las agujas del reloj y en el sentido contrario.

En 1823 en una memoria sobre las modificaciones que la reflexión imprime a la luz, da las fórmulas, hoy válidas, que permiten calcular la intensidad de la luz reflejada y refractada al incidir sobre una superficie transparente.

La luz ordinaria consistía por tanto en ondas oscilando igualmente en todas las direcciones posibles formando ángulo recto con la dirección de propagación de la luz, mientras que la luz con oscilaciones desigualmente distribuidas es luz polarizada, de acuerdo con la terminología de Malus, y cuando la oscilación es según una sola dirección perpendicular a la de propagación, se dice que la luz está polarizada linealmente.

Fresnel explicaba la doble refracción, porque los dos rayos consistían en ondas oscilando en planos perpendiculares, lo cual es la causa de que se refracten de modo distinto en algunos sólidos.

Quedaba el interrogante de así como el aire era el medio en el que se propagaban las ondas sonoras, cual era el sujeto del verbo ondular en el caso de la luz. Entonces se opinó que el medio en el que se producían las vibraciones era el hipotético éter (quinto elemento de Aristóteles) que todo lo llenaba, incluso el vacío. Si las ondas hubieran sido longitudinales se hubiera podido admitir sin grandes dificultades, que el éter era un gas sutilísimo, pero al ser las ondas transversales, el éter era paradójico e irreal, era a la vez sólido y gas, más rígido que el acero y más sutil que el aire, no tenía que oponer ninguna resistencia al movimiento de los planetas. Fue Cauchy quien primero intentó establecer una teoría matemática del éter, pero Faraday ya dudaba del mismo y Maxwell al establecer la teoría electromagnética de la luz (culminación de la teoría ondulatoria de la luz) lo hizo innecesario, y la Relatividad acabó desechando la teoría del éter. Jamás la Física clásica logró construir una teoría lógica irrebatible del éter(*).

Las experiencias de Fizeau y de Foucault en 1850, que calculan la velocidad de propagación de la luz en el agua, que es inferior a la velocidad en el aire, confirman una vez más la teoría ondulatoria, porque este resultado está de acuerdo con la misma, mientras que según la teoría corpuscular la velocidad en el agua tendría que ser mayor que en el aire(**).

(*) Para el sujeto del verbo ondular en el caso de la luz, véase la nota 8ª.
(**) Sobre este tema véase la nota 7ª.

Casi simultáneamente Fresnel, Ampère y Fourier establecen las bases matemáticas de la Optica, del Electromagnetismo y de la Teoría del Calor. Fourier (1768-1830) investigó profundamente la ecuación del calor, partiendo de la hipótesis falsa del calórico, pero llegando a una teoría correcta. El calor se propaga en un cuerpo en función de las diferencias de temperatura entre las distintas partes, de su forma geométrica, y de la conductividad calorífica. Aparte de resolver importantes problemas físicos, de Fourier arranca el análisis armónico y también el análisis dimensional, al establecer la necesidad de utilizar sistemas de unidades prefijados para el uso de las ecuaciones matemáticas aplicadas a la física.

Que el calor sea un fluido indestructible, cuya cantidad se conserva (el calórico) o sea una forma de movimiento (teoría dinámica del calor) es una diferencia muy importante para profundizar en la termodinámica, en los problemas de transformación de trabajo en calor y viceversa, pero poco importa para la buena comprensión de la propagación del calor en los conductores térmicos. En 1807, presentó Fourier su primera memoria a la Academia de Ciencias de París sobre la propagación del calor, que fue rechazada por falta de rigor por la Comisión de la Academia encargada de juzgarla, formada por Lagrange, Laplace y Legendre. En 1811 la Academia propuso como tema para su premio esta cuestión, y en 1812 Fourier lo ganó con una segunda memoria, pero que no fue publicada porque no se libró de las críticas de sus jueces. En 1822 Fourier publicó su gran libro "Teoría Analítica del Calor" donde aparece por primera vez la integral (también transformada integral) y las series que llevan su nombre. Uno de los problemas centrales tratados por Fourier es el de representar cualquier variación periódica por complicada que sea, como suma de infinitas variaciones periódicas sinusoidales de periodos múltiples, o lo que es lo mismo desarrollar una función arbitraria en serie de senos y cosenos de arcos múltiples. Ya en 1775, Daniel Bernoulli en el problema de la cuerda vibrante, había encontrado la solución por una serie de Fourier de senos solamente, pero sin haber podido obtener las fórmulas que permitían calcular los coeficientes de la serie. En 1759 Lagrange había obtenido la ecuación de la cuerda vibrante como caso límite de un sistema de partículas de igual masa, equidistantes entre sí sobre la cuerda, atrayéndose proporcionalmente a la distancia cada par de partículas contiguas, cuando el número de partículas tiende a infinito y su masa a cero, de modo que el producto de la masa de cada partícula por su número se mantenga constante. Suponiendo arbitrarios los desplazamientos y velocidades iniciales de las partículas, obtuvo la solución del movimiento de la cuerda en forma de una serie trigonométrica, pero al no decidirse a permutar la integración de los términos de la serie y su suma, no pudo calcular los coeficientes de Fourier. Estos coeficientes habían sido hallados por Euler en 1754 en sus investigaciones sobre mecánica celeste.

La ecuación del calor en dos y tres dimensiones es la igualación del laplaciano de la función incógnita a la derivada parcial respecto al tiempo de primer orden, y cuando la temperatura es constante, la ecuación del calor es idéntica a la ecuación de Laplace. En unproblema particular de este tipo, Fourier encontró el desarrollo de la unidad en una serie de cosenos de múltiplos impares de un mismo arco, lo que marca el comienzo de las series trigonométricas. Fourier también obtuvo los desarrollos en serie de $x/2$ y de log [2 cos $(x/2)$], demostrando que toda función periódica par (o impar) puede ser desarrollada en serie de cosenos (o de senos) solamente. Después trató de generalizar el problema para una función arbitraria, daba este nombre, guiado por la visión geométrica, a una función cuyo diagrama es un dibujo arbitrario. Antes de Fourier se consideraba que una función debía de ser representada mediante una sola expresión analítica, mientras que Fourier consideró el desarrollo en serie de funciones que en diferentes partes del intervalo de $-\pi$ a π, tienen diferentes expresiones analíticas, como por ejemplo la función periódica que para el intervalo de $-\pi$ a 0 vale cero, y para el intervalo de 0 a π vale x, y otros muchos casos parecidos.

Surge inmediatamente el problema de la convergencia de las series de Fourier. El había conseguido demostrar la convergencia en algunos casos particulares, pero no había obtenido la demostración general. Poisson en 1820 primero y en 1823 después, intentó esta demostración sin éxito, y en sus investigaciones introdujo la famosa integral que lleva su nombre y que alcanzaría una gran importancia en las teorías de las funciones de variable real y compleja. Cauchy en 1826 y en 1827, también intentó una demostración sin éxito, porque en su demostración integraba una serie término a término y la reordenaba, lo que suponía admitir la convergencia que quería demostrar.

Fue Dirichlet (1805-1859), también conocido en la literatura científica por su nombre completo Lejeune Dirichlet, que vivió en París de 1822 a 1825, y estuvo en contacto con Fourier, quien dio por primera vez en 1829 las condiciones suficientes que aseguran la convergencia de las series de Fourier de una función, que son: 1°) que la función sea unívoca y acotada, 2°) que sea contínua a trozos, es decir que tenga un número finito de discontinuidades en el periodo, 3°) que sea monótona a trozos, es decir que tenga un número finito de máximos y mínimos en el periodo. En su artículo de 1829 define una función que no satisface estas condiciones, y es una función que toma un valor constante para los valores irracionales de la variable independiente, y otro valor constante distinto para los valores racionales. También en este artículo introdujo la integral que lleva su nombre. En 1837 prosiguiendo sus investigaciones sobre las series de Fourier, señala la necesidad de sustituir el antiguo concepto de función, por el más moderno, utilizado en la actualidad, de correspondencia unívoca según la cual a cada valor de la variable real independiente en un intervalo dado, corresponde un solo valor de la función.

La condición de Dirichlet para la convergencia de las series de Fourier despertó el interés sobre el problema de la continuidad de una función suma de una serie de funciones continuas, que llevaron a la introducción de la convergencia uniforme. Concepto descubierto por Seidel (1821-1896) en 1848 y por Stokes (1819-1903) en 1849, y reencontrado por Cauchy en 1853. Seidel hablaba de convergencia arbitrariamente lenta y no arbitrariamente lenta, Stokes de convergencia infinitamente lenta y no infinitamente lenta. Pero fue Weierstrass (1815-1897) quien precisó con todo rigor la convergencia uniforme, denominación que utiliza ya, aunque informalmente en sus manuscritos sobre las series de potencias (gleichmassig convergenz) y en 1880 la define correctamente.

Las series de Fourier jugaron un papel muy importante en el proceso de alcanzar el rigor matemático, estas series engendradas por una función dada, pueden no ser convergentes en todo el intervalo para el que se obtienen, incluso en ningún punto del intervalo; si la serie es convergente, su suma no tiene porque ser igual a la función. En 1873 du Bois-Reymond (1831-1889) demostró que una función continua no ha de ser necesariamente representada por una serie de Fourier.

Una diferencia notable entre las series de Taylor y las de Fourier, es que la primera representa una función solamente en el entorno de un punto, en el que la función es analítica, mientras que la de Fourier representa una función mucho más general en un intervalo completo.

Fourier, Cauchy y Poisson, casi simultáneamente utilizaron también las integrales dobles de Fourier, para representar funciones arbitrarias soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Estas integrales junto a la de Laplace y su introducción en el campo complejo, se han mostrado de una fecundidad extraordinaria en la representación integral de funciones trascendentes superiores.

La integral de Fourier tiene casi tanta importancia en Física Matemática como en la Matemática pura, y la integral de Fourier y su inversión son esenciales en la Estadística Matemática y en el Cálculo de Probabilidades, por establecer la relación entre las funciones características y las funciones de distribución y de frecuencias de las variables aleatorias.

En 1885 el físico suizo Fick desarrolló la teoría matemática de la difusión partiendo de la ecuación del calor.

En Mecánica la trayectoria y la ley horaria del movimiento de un punto material quedan unívocamente determinados por la posición y la velocidad iniciales, de modo que un ser omnisciente que conociera en un instante determinado la posición y la velocidad de todos los cuerpos, conocería en cualquier instante posterior la posición y la velocidad de todos ellos, esto constituye el determinismo de Laplace de la mecánica clásica(*). La justificación matemática de este determinismo quedó establecido con los teoremas de existencia y de unicidad de la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales de Cauchy. Cauchy demostró estos teoremas en sus cursos de Análisis Matemático de la Escuela Politécnica de 1820 a 1830, demostración que fue perfeccionada por su discípulo el abate Moigno (1804-1884). Cauchy extendió su demostración al caso de la ecuación diferencial de orden n, por reducción a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. En 1876 fue ampliada la demostración, para condiciones menos restrictivas por Lipschitz (1832-1903) y a continuación por Peano. En 1893 Picard (1856-1941) dio otra demostración de los teoremas de existencia y unicidad, basado en un método de aproximaciones sucesivas, el cual ha servido de base para los métodos de integración numérica de ecuaciones diferenciales.

(*) Y también en cualquier instante anterior.

En la mecánica de Lagrange el movimiento de un sistema material holónomo de n grados de libertad, queda determinado por la integración de un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden, en el que las funciones incógnitas son las n coordenadas generalizadas del sistema. Se usa en mecánica analítica el concepto de coordenada generalizada con bastante anterioridad a la geometría analítica. El movimiento se puede representar por la trayectoria y la ley horaria con que sigue esta trayectoria un punto figurativo del sistema en un espacio abstracto de n dimensiones (el de las n coordenadas generalizadas), que recibe el nombre de espacio de las configuraciones.

Ahora bien, como es sabido, un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden se puede transformar en un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, mediante la introducción de n nuevas variables. En el caso de que exista una función de fuerzas, Hamilton (1805-1865) tomó como nuevas variables no las velocidades generalizadas, que era lo más pedestre, sino los momentos generalizados de Lagrange, con lo que obtuvo a partir de las n ecuaciones de segundo orden de Lagrange, las $2n$ ecuaciones de primer orden, que llevan su nombre y también el de canónicas. Estas ecuaciones toman una forma muy particular e interesante, utilizando la función hamiltoniana, que lo es de las coordenadas y de los momentos generalizados. Los sistemas que se pueden escribir de esta manera se llaman hamiltonianos. Así como las ecuaciones de Lagrange marcan el paso de la era newtoniana a la lagrangiana en mecánica, las ecuaciones canónicas de Hamilton marcan el paso de la era lagrangiana a la hamiltoniana.

Jacobi escribió una ecuación en derivadas parciales de primer orden homogénea y no lineal que lleva su nombre(*). Esta ecuación es cuadrática respecto a las derivadas parciales de las coordenadas generalizadas y lineal respecto a la derivada parcial del tiempo; se obtiene sustituyendo en el hamiltoniano los momentos generalizados por las derivadas parciales respecto a las coordenadas generalizadas del mismo nombre e igualando este resultado a la derivada parcial respecto al tiempo. el problema mecánico está resuelto en cuanto se conoce una integral completa de la ecuación de Jacobi dependiente de n constantes arbitrarias (tantas como coordenadas), porque entonces las derivadas parciales de esta integral completa respecto a estas n constantes arbitrarias igualadas a otras n constantes arbitrarias resolviéndolas, dan los valores de las coordenadas generalizadas; y las derivadas parciales respecto a las coordenadas igualadas a los momentos generalizados, dan los valores de éstos.

Un caso particularmente notable es aquél en que los enlaces del sistema material son independientes del tiempo y existe un potencial, porque entonces la integral completa de la ecuación de Jacobi permite obtener por separado las trayectorias del punto figurativo del sistema en el espacio de las configuraciones y la ley horaria con que recorre esta trayectoria. En el caso concreto de un solo punto material en un campo conservativo de fuerzas (existencia de un potencial)

(*) He hecho gran uso de la ecuación de Jacobi en la Teoría de la Relatividad y en la Cosmología relativista. Para los sistemas que he llamado universoidales, tanto en Mecánica clásica como relativista se puede integrar la ecuación de Jacobi.

las trayectorias del punto dependen de seis parámetros que son las tres coordenadas cartesianas de la posición inicial del punto material y las tres componentes de la velocidad inicial. Pero la ecuación de Jacobi permite clasificar esta familia séxtuple de trayectorias en familias triples de trayectorias que son las trayectorias ortogonales de una familia triple de superficies que resultan de hacer constantes las integrales de la ecuación de Jacobi. Existe una analogía entre la óptica y la mecánica que fue observada por Hamilton, ya que las trayectorias y superficies a las que son ortogonales están en la misma relación que los rayos y las ondas de la óptica. Esta analogía es formal, porque la trayectoria de un punto material en un campo de fuerzas conservativo, dadas la posición y la velocidad iniciales del punto, es única, mientras que las familias de trayectorias de la ecuación de Jacobi, son trayectorias posibles, de las que una sola posibilidad corresponde a la trayectoria real.

La propiedad de las trayectorias de ser ortogonales a la familia de superficies que resultan de igualar a una constante, una integral completa de la ecuación de Jacobi permite redescubrir el principio de la mínima acción de Maupertuis, según el cual la integral del producto de la cantidad de movimiento por la diferencial del arco de trayectoria (diferencial de la acción) entre dos puntos cualesquiera de la trayectoria es mínima, respecto al valor que tomaría esta integral para cualquier otra curva infinitamente próxima, que una estos dos puntos(*). Hay veces en que la acción maupertuisiana es máxima en vez de mínima, lo que sucede cuando las trayectorias posibles tienen una envolvente, y la trayectoria real es tangente a esta envolvente entre los dos puntos en que se calcula la integral de la acción. Pero siempre la integral de la acción es estacionaria (máxima o mínima).

Hamilton enunció en un principio de mínima acción, más general que el de Maupertuis, al que se reduce cuando existe un potencial. Para un punto material cuando existe una función de fuerzas, que eventualmente puede depender del tiempo, el principio de Hamilton afirma que la integral del producto de la suma de la semifuerza viva del punto material y de la función de fuerzas por la diferencial del tiempo (diferencial de la acción) entre dos instantes sucesivos, calculada a lo largo de la trayectoria real, es mínima respecto al valor que tomaría para cualquier otra curva infinitamente próxima. Este principio se extiende a los sistemas holónomos. Del principio de Hamilton se deducen las ecuaciones de la dinámica de los sistemas materiales. Mientras que la acción maupertuisiana es expresada mediante el producto de una cantidad de movimiento por una longitud, la acción hamiltoniana lo es por el producto de una energía por un tiempo.

Mientras que la formulación lagrangiana no es reinterpretable por la mecánica cuántica, la formulación hamiltoniana si lo es. Ni las velocidades ni las ecuaciones de Lagrange son reinterpretables por la mecánica cuántica, en cambio sí lo son las ecuaciones de Hamilton y los momentos. Existe una analogía entre el principio del tiempo mínimo de Fermat de la óptica geométrica y el principio de

(*) Véase en mi conferencia sobre el siglo XVIII, la diferencia entre la variación de la integral de la acción y la integral de la variación de la acción, cuando no son permutables la integración y la variación; y la generalización de las integrales curvilíneas que ello supone.

Maupertuis de la mínima acción, del que se sacó un gran partido al comienzo del desarrollo de la mecánica ondulatoria(*).

Gauss enunció un principio más general que el de Hamilton, pero menos práctico que es el principio de la mínima constricción, que recuerda en su formulación al método de los mínimos cuadrados que Gauss utilizó en sus trabajos de geodesia y de agrimensura, y que había sido utilizado con anterioridad por Legendre. Según este principio en el caso de un sistema material holónomo o no, sujeto a enlaces bilaterales, el movimiento tiene lugar de modo que se hace mínima la suma de los productos de las masas de los puntos materiales que forman el sistema por los cuadrados de las distancias entre las posiciones que ocupan estos puntos en el movimiento real y las posiciones que ocuparían en el caso de ser el movimiento libre, es decir no sujeto a enlaces, en el mismo instante.

Los principios de mínimo se llaman también principios variacionales(**).

La teoría matemática del potencial eléctrico se desarrolló muy rapidamente a comienzos del siglo XIX, guiada en parte por la teoría del potencial newtoniano. Se pasó de las atracciones de las masas puntuales a las de distribuciones contínuas de masas, y se pasó del potencial inversamente proporcional a la distancia de una masa puntual al potencial de una masa extendida en el espacio, que es la integral triple del cociente de dividir la densidad de la distribución contínua de la masa por la distancia al punto en que se calcula el potencial, extendida a todo el espacio ocupado por la masa. Ya en 1787 Laplace había demostrado que fuera del espacio ocupado por la masa atractiva, el potencial satisfacía la ecuación que lleva su nombre. Poisson resolvió varios problemas de electrostática y magnetoestática y en 1813 demostró que el potencial gravitatorio en el interior de la masa atractiva y el potencial eléctrico en el interior de una carga eléctrica satisfacen a la ecuación que lleva su nombre, que es el resultado de igualar la densidad de carga eléctrica o de masa multiplicada por -4π al laplaciano del potencial. De esta manera se inicia la teoría del potencial que iba a ser de una gran fecundidad en Física y Matemáticas, y que sería desarrollada en su primera etapa por Gauss y Green.

Green (1793-1841) en su memoria "Ensayo de la aplicación del análisis matemático a la electricidad y al magnetismo" en 1828, dio a conocer el teorema que lleva su nombre, que permite transformar integrales triples en integrales dobles (de superficie) y viceversa, utilizando la divergencia y el flujo de un vector como funciones subintegrales. Teorema que también fue demostrado por Ostrogradsky (1801-1861) por lo que en la literatura científica este teorema es atribuido indis-

(*) Véase en la nota 7ª, cómo adoptando la hipótesis de los fotones el principio del mínimo tiempo de Fermat es un principio de la mínima acción de los fotones, y cómo la dinámica de los fotones no es reductible a la dinámica de los puntos materiales.

(**) Véanse en las notas 1ª, 2ª y 3ª la obtención de principios de mínimo en espacios no riemannianos (espacios de Finsler) en mecánica y electrodinámica clásica, así como la generalización de las coordenadas cíclicas y el concepto de potencial paramétrico y de ecuaciones diferenciales que dependen de los valores iniciales. En las notas 4ª y 6ª la aplicación a la mecánica y la electrodinámica relativistas.

..ntamente a ambos científicos, y otras veces a Gauss porque lo encontró en sus investigaciones sobre el potencial electrostático en la forma más particular: "el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada, es igual a 4π veces la carga eléctrica encerrada por la superficie". Este teorema se puede demostrar o bien utilizando las líneas de fuerza de Faraday o como aplicación combinada del teorema de Green y de la ecuación de Poisson.

Stokes en la misma línea, transformó integrales dobles o de superficie en integrales curvilíneas, mediante el teorema que lleva su nombre, utilizando el rotacional y la circulación de un vector. Sus aplicaciones a la Física Matemática son muchas, así el teorema de Ampère en electromagnetismo, los teoremas de Helmholtz y lord Kelvin en Hidrodinámica, el invariante de Poincaré en Optica, etc. El teorema de Stokes en dos dimensiones junto a las condiciones de Cauchy-Riemann demuestra el teorema de la integral de Cauchy de las funciones analíticas de variable compleja. El teorema de Stokes apareció como un problema de exámen en 1854, propuesto por el propio Stokes, pero lord Kelvin ya lo conocía en 1850.

En nuestra conferencia sobre la segunda parte del siglo XIX, ultimaremos este siglo.

NOTAS

Para ilustrar el texto de la conferencia he incluido estas notas, extraídas de mis propias investigaciones.

Nota 1ª

En el caso de un sistema holónomo de n grados de libertad, cuando los enlaces dependen del tiempo, la semifuerza viva T es igual a:

$$T = T_2 + T_1 + T_0; \quad T_2 = \frac{1}{2} \sum \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad T_1 = \sum a_i \dot{q}_i \qquad (1)$$

donde las a_{ij}, a_i son funciones de las n coordenadas generalizadas $q_1, ..., q_n$ y eventualmente del tiempo t, las $\dot{q}_i$ son las derivadas de las q_i respecto al tiempo, y T_0 es una función de las q_i y eventualmente del tiempo. Si existe una función de fuerzas $V(q_1, ..., q_n, t)$, es sabido por el principio de Hamilton que las ecuaciones de Lagrange del movimiento, se obtienen anulando la variación de la integral:

$$\delta \int (T(q, \dot{q}, t) + V(q, t))dt = 0 \qquad (2)$$

Ahora bien si el tiempo t no figura explicitamente en la T y existe un potencial $U(q_1, ..., q_n)$, he demostrado que las únicas funciones de $T_2, T_1, T_0, U,$

que la variación de su integral conducen a las ecuaciones del movimiento son el lagrangiano ordinario $T - U$, que es la (2), y la:

$$\delta \int \left[2\sqrt{(h - U(q) + T_0(q))T_2(q,q')} + T_1(q,q') \right] d\lambda = 0 \tag{3}$$

donde la derivación (denotada por la comilla) lo es respecto a una nueva variable λ, que tiene las dimensiones de un tiempo, y está ligado a t por la ecuación (4), en la que h es una constante:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{\frac{h - U(q) + T_0(q)}{T_2(q,q')}} \tag{4}$$

de la que se sigue la integral primera:

$$T_2(q,\dot{q}) + U - T_0 = h \tag{5}$$

De (1) se sigue que la (3) puede escribirse:

$$\delta \int \sum a_i dq_i + \sqrt{2(h - U + T_0)\Sigma\Sigma a_{ij}\, dq_i\, dq_j} = 0 \tag{6}$$

que son las ecuaciones de las líneas geodésicas de un espacio de Finsler (no riemanniano), cuyo elemento lineal ds es igual a la suma de una forma lineal y de la raíz cuadrada de una forma cuadrática, ambas en las diferenciales de las coordenadas; (3) y (6) son un principio de mínima acción, en el que se ha eliminado el tiempo, y muestran que $T_1(q,\dot{q})$ y $-T_0(q)$ juegan el papel de un potencial vector y de un potencial escalar respectivamente.

Si a T_1 se le suma la diferencial total de una función arbitraria de las $q : f(q_1, ..., q_n)$ en la que eventualmente puede faltar alguna de ellas, la variación de la integral (3) no varía.

Nota 2ª

El resultado de la nota 1ª lo he aplicado a la electrodinámica clásica, al movimiento de una carga eléctrica q de masa m, cuando existe un potencial vector $\vec{A}$ de componentes A_x, A_y, A_z y un potencial escalar $-V$, igual a la función de fuerzas de (2) cambiada de signo, entonces en (1) y (2) es:

$$T_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \quad T_1 = \frac{q}{c}(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}) \tag{7}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío y hay que cambiar en (2) la función de fuerzas V por $-qV$. No existe T_0.

Cuando los potenciales vector y escalar son independientes del tiempo, la (7) se escribe:

$$\delta \int \sqrt{2m(h - qV)(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{q}{c}(A_x dx + A_y dy + A_z dz) = 0 \qquad (8)$$

que representan las líneas geodésicas de un espacio de Finsler de tres dimensiones.

De (7) y (8) se siguen las ecuaciones de Maxwell y la expresión clásica de la fuerza de Lorentz.

Nota 3ª

En un sistema holónomo de n grados de libertad, supongamos que q_1, sea una coordenada cíclica en un sentido más general que el ordinario, es decir que la semifuerza viva T sea de la forma:

$$T = \overline{T} + \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + a_1 \dot{q}_1 \qquad (9)$$

en donde en $\overline{T}$ no figuran ni la q_1, ni la $\dot{q}_1$, y en a_{11} y a_1 no figura la q_1; si $Q_1, ..., Q_n$ son las fuerzas generalizadas, la Q_1 es nula y en las restantes Q no figura la q_1. Entonces existe la integral primera:

$$a_{11} \dot{q}_1 + a_1 = W \qquad (10)$$

donde W es una constante. En este caso he demostrado que las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas de q_2 a q_n, son las debidas a la semifuerza viva $\bar{T}$, a las fuerzas generalizadas Q_2 a Q_n, y al potencial (11):

$$\frac{(W - a_1)^2}{2a_{11}} \qquad (11)$$

El efecto ejercido por la coordenada cíclica q_1 sobre el resto del sistema es la adición del potencial (11) que he denominado *paramétrico*, porque depende de los valores iniciales de $\dot{q}_1$ y de q_2 a q_n. Se introducen así ecuaciones diferenciales, en las que figuran explícitamente los valores iniciales de la solución. Véase nota 9ª.

Los resultados de las notas 1ª y 3ª los he aplicado a la Teoría de la Relatividad restringida y generalizada y a la cosmología relativista.

Nota 4ª

En el caso de la dinámica relativista del punto material, cuando existe una función de fuerzas, las trayectorias son las extremales que anulan la variación de la integral:

$$\delta \int \left[\frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) + V t' \right] d\tau = 0 \tag{12}$$

donde la derivación es respecto al tiempo propio τ, y con el mismo significado para las letras que en las notas anteriores. Existe la integral primera:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = -c^2 \tag{13}$$

donde la constante de integración es $-c^2$.

La (12) en virtud de (6) , habida cuenta de los valores que ahora tienen T_2 y T_1 y de la relación entre dt y $d\tau$ deducida de (13), se escribe:

$$\delta \int mc\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} + V\,dt = 0 \tag{14}$$

que son las líneas geodésicas de un espacio-tiempo finsleriano.

Si existe un potencial U, es decir V es independiente del tiempo, en (12) hay que cambiar V por $-U$, y como t es una coordenada cíclica, existe además de la integral primera (13), la (15):

$$mc^2 t' + U = W \tag{15}$$

donde W es constante, es la energía total de la partícula. En este caso el movimiento del punto se puede estudiar en función del tiempo propio τ, y las ecuaciones del movimiento son:

$$mx'' = -\frac{W - U}{mc^2}\,\frac{\delta U}{\delta x};\ \ldots \tag{16}$$

y análogamente para y, z. Existe en este caso un potencial paramétrico:

$$-\frac{(W - U)^2}{2mc^2} \tag{17}$$

que por (15) depende de los valores iniciales de la posición y de la velocidad de la partícula. De (17) y (13) se sigue que en este caso, las trayectorias son las extremales de la variación de la integral:

$$\delta \int \sqrt{\left[\frac{(W-U)^2}{mc^2} - mc^2\right] (dx^2 + dy^2 + dz^2)} = 0 \tag{18}$$

y como el paréntesis cuadrado subradical de (18), es decir el primero es igual al momento p (cantidad de movimiento de la partícula) la (18) se puede escribir también:

$$\delta \int p\, ds = 0 \tag{19}$$

donde ds es la distancia entre dos puntos infinitamente próximos del espacio euclideo (su elemento lineal). La (19) es la forma que adopta el principio de Maupertuis en la dinámica relativista del punto material.

Nota 5ª

Aplicando la nota 4ª al oscilador armónico, se tiene:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = -c^2; \quad mc^2 t' + \frac{k^2 x^2}{2} = W \tag{20}$$

y de las (20) se sigue que:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{(W - k^2x^2/2)^2}{mc^2} - mc^2}} = \tau \tag{21}$$

que expresa la abscisa x como una función elíptica del tiempo propio τ, y de (20) y (21) se obtiene:

$$t = W\tau - \int_0^{\tau} \frac{k^2x^2}{2} d\tau \tag{22}$$

que da el tiempo ordinario t como la diferencia de dos integrales elípticas de x, o como la diferencia entre una función lineal y la integral del cuadrado de una función elíptica del tiempo propio τ.

La amplitud de las oscilaciones armónicas relativistas es mayor que la de las clásicas, si la llamamos x_a, vale:

$$mc^2 + \frac{k^2 x_a^2}{2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_0^2}{c^2}}} + \frac{k^2 x_0^2}{2} \tag{23}$$

siendo x_0 y $\dot{x}_0$, la posición y la velocidad iniciales del oscilador

Nota 6ª

Los resultados de las notas 1ª y 3ª las he extendido a la electrodinámica relativista, y con las mismas notaciones que en la nota 2ª, las trayectorias de una carga eléctrica anulan la variación de la integral:

$$0 = \delta \int \Big[\frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) +$$

$$+ q \left(\frac{A_x}{c} x' + \frac{A_y}{c} y' + \frac{A_z}{c} z' - V t' \right) \Big] d\tau \tag{24}$$

y también la:

$$\delta \int mc\sqrt{c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} +$$

$$+ q \left(\frac{A_x}{c} dx + \frac{A_y}{c} dy + \frac{A_z}{c} dz - V\, dt \right) = 0 \tag{25}$$

cuyas soluciones son las geodésicas en el espacio-tiempo finsleriano.

Si los potenciales vector $\vec{A}$ y escalar V son independientes del tiempo, se obtiene la (8) efectuando la sustitución:

$$h - qV \longrightarrow \frac{(W - qV)^2}{2mc^2} - \frac{mc^2}{2} \tag{26}$$

De las (24) se siguen las ecuaciones de Maxwell, la expresión relativista de la fuerza de Lorentz que difiere de la clásica, en que ahora la velocidad lo es con respecto al tiempo propio τ y no al ordinario t. La relación entre los potenciales vector y escalar con las densidades de corriente y de carga eléctrica se pueden establecer de la misma manera en la teoría clásica que en la relativista.

La equivalencia entre el potencial vector y escalar con T_1 y T_0 de la nota 1ª, me ha permitido construir una teoría de la dinámica relativista de los sistemas materiales, en la que T_2 no puede superar el valor del semiproducto de la masa total del sistema por c^2, pero la velocidad de algún punto material sí puede superar a la velocidad de la luz en el vacío c.

Si en (24) y (25) se sustituye T_2 es decir el primer paréntesis en la primera y el radical en la segunda por el elemento lineal de la relatividad generalizada se obtiene en esta teoría las ecuaciones del movimiento de una carga eléctrica.

Nota 7ª

Según el principio de Fermat, las trayectorias de los rayos luminosos son las extremales de la variación de la integral:

$$\delta \int n(x,y,z)\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=0 \tag{27}$$

donde $n(x,y,z)$ es el índice de refracción, es un principio del tiempo mínimo. Por lo visto en la nota 1ª, la (27) es equivalente a la primera (28) de la que es una integral primera la segunda (28). La (28) equivale al problema mecánico de hallar el movimiento de un punto material libre, sobre el que no actúa ninguna fuerza, y cuya masa varía proporcionalmente al cuadrado del índice de refracción; de la segunda (28) se sigue que la velocidad con que el punto material recorre el rayo luminoso (su trayectoria) es igual a c/n.

$$\delta \int n^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)dt=0 \quad n^2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=c^2 \tag{28}$$

Por lo visto en la nota 1ª también la (27) es equivalente a la primera (29), de la que una integral primera particular es la segunda (29), cuando la constante (que hemos llamado h) de la integral de las fuerzas vivas es igual a cero:

$$\delta \int [x'^2+y'^2+z'^2-c^2n^2]d\sigma=0; \quad x'^2+y'^2+z'^2=c^2n^2 \tag{29}$$

Las (29) equivalen al problema mecánico de hallar el movimiento de un punto material de masa la unidad, sobre el que actuan unas fuerzas que derivan del potencial $-c^2n^2/2$. La trayectoria de este movimiento coincide con la de los rayos luminosos, obtenida a partir de (27), pero el tiempo con que la recorre el punto material es distinto, porque la velocidad por la segunda (29) vale nc. La derivación en las (29) lo es respecto a una variable que tiene las dimensiones de un tiempo, σ, que proponemos llamar *tiempo óptico*, que está ligado al tiempo ordinario t por la relación:

$$\frac{dt}{d\sigma}=n^2(x,y,z) \tag{30}$$

El tiempo óptico σ, es pues el tiempo con que un móvil de masa la unidad recorre la trayectoria de un rayo luminoso bajo la acción de un potencial $-c^2n^2/2$. De lo anterior se sigue que la interpretación corpuscular clásica de acuerdo con las (29) conduce a la proposición falsa de que la velocidad de la luz es igual al producto de la velocidad de la luz en el vacío por el índice de refracción.

Si se admite la interpretación fotónica de la luz según la cual la energía del fotón es independiente del índice de refracción y vale $h\nu$, siendo h la constante de Planck y ν la frecuencia, y que la cantidad de movimiento del fotón p es

hn/λ, siendo λ la longitud de onda, es decir varía proporcionalmente al índice de refracción, entonces el principio del mínimo tiempo de Fermat (27) es equivalente al principio de la mínima acción del fotón:

$$\delta \int p\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0 \tag{31}$$

Con este valor para la cantidad de movimiento p del fotón, las fórmulas del efecto Compton dependen del índice de refracción.

Nota 8ª

Las ondas de radiación no son ondas que se propagan en un medio material como el éter de la física clásica, ni tampoco ondas de probabilidad como las que la mecánica cuántica asocia a las partículas materiales, si no que son *ondas de población*. El número de fotones asociado a una onda de radiación es directamente proporcional al cuadrado de su amplitud e inversamente proporcional a su frecuencia ν y a la constante de Planck h. Los fotones como individuos tienen el extraño comportamiento de que al superponerse se producen fenómenos de interferencias, es decir que por superposición puede haber creación o aniquilación de fotones. La población de fotones es el cuadrado del módulo de una función de cuadrado sumable, y la operación física de superponer dos poblaciones de fotones equivale a la operación matemática de sumar dos funciones de cuadrado sumable, y calcular el cuadrado del módulo de esta suma. La diferencia entre las funciones de densidad de fotones y las funciones de frecuencia (o densidad) de probabilidad de la mecánica cuántica está en que para estas últimas las funciones de cuadrado sumable están mormalizadas.

Si $U(\nu)$ es la fracción de la densidad de energía de la radiación correspondiente a la frecuencia ν, entonces $U(\nu)/h\nu$, es el número de fotones por unidad de volumen de frecuencia ν.

En el caso de una onda luminosa plana monocromática de frecuencia ν el número de fotones N que la acompaña, por unidad de volumen, por lo dicho en el párrafo anterior vale:

$$N = \frac{1}{8\pi h\nu}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) \tag{32}$$

cociente de dividir la densidad de energía por la energía $h\nu$ de un fotón. E, H, ε, μ, son respectivamente el campo eléctrico, el magnético, la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética, en el sistema de unidades electromagnéticas.

El número de fotones transportado por la onda, por unidad de tiempo y por unidad de área, perpendicular a la dirección de propagación vale:

$$\frac{c|\vec{E} \wedge \vec{H}|}{4\pi h\nu} \tag{33}$$

c es la velocidad de la luz en el vacío.

Las dos fórmulas anteriores permiten calcular la intensidad de corriente electrónica en el efecto fotoeléctrico, y la amplitud de los rayos X generados en el efecto inverso del anterior.

En esta clase de ondas se cumple que:

$$\varepsilon E^2 = \mu H^2 = \frac{B^2}{\mu} \Longrightarrow \frac{B}{E} = \sqrt{\varepsilon\mu} = n \tag{34}$$

siendo B la inducción magnética y n el índice de refracción.

Según las transformaciones de Lorentz de la relatividad restringida si O es un observador que se mueve con movimiento rectilíneo uniforme de velocidad υ respecto a otro observador O_1 en la misma dirección que la de la propagación de la onda, se cumple que:

$$\frac{B_1}{E_1} = \frac{B + E\upsilon/c}{E + B\upsilon/c} = \frac{n + \upsilon/c}{1 + n\upsilon/c} = n_1(*) \tag{35}$$

donde la presencia o ausencia de subíndice, indica el valor de la magnitud para O_1 o para O.

De (32) y (34) se sigue que N vale:

$$N = \frac{BE}{4\pi h\nu}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \tag{36}$$

como este valor de N ha de ser el mismo para O que para O_1, se sigue que

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} = \frac{BE\nu_1}{B_1 E_1 \nu}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \tag{37}$$

la cual en virtud de las transformaciones de Lorentz de E, B y ν permite calcular ε/μ, y como la (35) permite calcular $\varepsilon\mu$, se pueden obtener los valores de ε y μ, que son:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon(1 - \upsilon^2/c^2)^{3/2}}{(1 + \upsilon/nc)(1 + n\upsilon/c)^2}; \quad \mu_1 = \frac{\mu(1 + \upsilon/cn)^3}{(1 - \upsilon^2/c^2)^{3/2}} \tag{38}$$

que son las transformadas relativistas de ε y μ.

(*) Aun cuando no sea $B/E = n$, la transformada de Lorentz es análoga a la de n.

La teoría ondulatoria clásica, junto a la teoría de la relatividad permite calcular $\varepsilon_1\mu_1$, pero no ε_1 y μ_1 por separado; pero es obvio que al variar el producto $\varepsilon\mu$, ha de variar una de ellas o las dos. Esta interpretación fotónica de la luz, expuesta en esta nota, permite el cálculo por separado de ε_1 y μ_1.

Nota 9ª

En las notas 4ª y 5ª hemos definido el potencial paramétrico (17) y las ecuaciones diferenciales (16) que dependen de los valores iniciales de la posición y de la velocidad respecto al tiempo propio. Ahora bien este sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden dependientes de los valores iniciales, se puede transformar en un sistema de tres ecuaciones diferenciales de tercer orden, eliminando W entre las tres (16) y las que resultan de derivar éstas respecto a τ; este nuevo sistema es independiente de los valores iniciales, es un sistema ordinario, pero en él solamente se pueden fijar arbitrariamente los valores iniciales de la posición y de la velocidad, porque los de la aceleración, se obtienen en función de los anteriores a partir de las (16), de la (15) y de la (13).

En el caso particular del problema abordado en la nota 5ª, hay una sola variable y el sistema (16) se transforma en una sola ecuación que es la:

$$mx'' = -\frac{(W - k^2x^2/2)}{mc^2}k^2x \tag{39}$$

eliminando W entre (39) y la que resulta de derivarla respecto a τ, se obtiene la ecuación diferencial de tercer orden ordinaria:

$$x''' = \left(\frac{x''}{x} + \frac{k^4x^2}{m^2c^2}\right)x' \tag{40}$$

Obsérvese que (13), ò la primera (20) en este caso particular, permite calcular x', y', t', en función de $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, y viceversa.

BIBLIOGRAFIA

D'ABRO: The evolution of scientific thought, Ed. Dover

D'ABRO: The rise of the new phyysics, Ed. Dover

BELL: The Development of Mathematics, Ed. McGraw-Hill

TRUESDELL: Essays in the History of Mechanics, Ed. Springer

BOYER: A. History of Mathematics, Ed. Wiley

COLLETE: Histoire des Mathématiques, Editions du Renoveau Pedagogique

DIEUDONNE et col: Abrégé d'histoire des Mathématiques, Ed. Hermann

RIBNIKOV: Historia de las Matemáticas, Ed. Mir

CROWTHER: Hombres de Ciencia británicos del siglo XIX, y Hombres de Ciencia Norteamericanos, traducción en Espasa Calpe.