EL ANALISIS MATEMATICO

MANUEL VALDIVIA

Académico Numerario

Una faceta muy importante del análisis matemático en el siglo XIX es el rigor, que se establece no sólo en los conceptos sino también en las demostraciones. Ya Lagrange, a finales del XVIII, se preocupó de una fundamentación precisa de la matemática. Es muy significativo en esta dirección su famoso libro de 1797 y que en su edición de 1813 lleva por título: *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principles du calcul differential, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'evanouissans, de limites ou fluxions, et réduit à l'analyse algébrique des quantités, finies*, en donde realiza con cuidado el estudio de las derivadas de funciones, apoyándose en el desarrollo de Taylor. No obstante, como se verá después, y superando la opinión de Lagrange, el concepto de límite ocupa el punto crucial de la fundamentación sólida del análisis matemático.

En primer lugar, se debe citar a Karl Friedrich Gauss, el más famoso matemático del siglo XIX y uno de los más grandes de todos los tiempos, que nació en Brunswick en 1777 y murió en Gotinga en 1855. No es lugar aquí para exponer sus numerosas e importantes investigaciones, pero sí, teniendo en cuenta la orientación que se va a dar a este artículo, hacer referencia a su memoria publicada en 1813 sobre la serie hipergeométrica:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!},$$

siendo α, β y γ números reales, con γ distinto de cero o de cualquier entero negativo. En este ejemplo, se estudia por primera vez y con todo rigor la convergencia de una serie, pudiendo tomar x valores reales o complejos. Como consecuencia de aplicar el criterio de D'Alembert, Gauss obtiene que la serie es convergente cuando $|x| < 1$ y divergente si $|x| > 1$; en el caso en que $x = 1$, demuestre la convergencia si $\gamma > \alpha + \beta$ y la divergencia cuando $\gamma \leqslant \alpha + \beta$. Además, hace la observación de que carece de sentido preguntarse sobre el valor que toma la serie hipergeométrica para $|x| > 1$ ya que, en este caso, deja de ser convergente. Esto pone de manifiesto la postura de Gauss contra el uso de las series divergentes.

Uno de los matemáticos más profundos del siglo XIX fue Bernardo Bolzano, el cual realizó grandes esfuerzos en beneficio del establecimiento del rigor en el análisis matemático.

El padre de Bolzano era un italiano del norte de Italia, comerciante en antigüedades, que, casado con una alemana vivía en Praga. De este matrimonio nació Bolzano en el año 1781. Siguiendo el deseo paterno hizo la carrera eclesiástica, y se ordenó en el año 1805. Desde 1805 hasta 1820 enseñó Teología en la Universidad de Praga.

Por sus intervenciones a favor de la independencia nacional del pueblo checo y en contra de la monarquía austríaca, fue separado de la enseñanza, asignándosele una pensión mezquina con la que apenas podía vivir. Marchó a Techbuz en donde se dedicó, con alguno de sus amigos, a las matemáticas y a la filosofía. En el año 1841 regresó a Praga, viviendo allí hasta su muerte, acaecida en 1848. Escribió, aparte de matemáticas, sobre filosofía y teología. Parece que en algunas ocasiones no era muy ortodoxo, por lo que tuvo problemas con las autoridades eclesiásticas.

Bolzano fue poco conocido por sus contemporáneos. Fue redescubierto por Hankel en 1870, el cual señala la importancia del libro que publicó Bolzano en Praga en 1816 titulado *El teorema del binomio*, en el que aparece la fórmula del desarrollo en serie de $(1+x)^n$ cuando n no es un entero:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^p + \ldots,$$

en donde

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Esta fórmula fue demostrada antes por numerosos matemáticos entre los cuales están Euler y Lagrange, pero Bolzano afirma que las pruebas no son satisfactorias. Dice que la diferencia (entiéndase, en valor absoluto)

$$(1+x)^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x - \binom{n}{2}x^2 - \ldots - \binom{n}{p}x^p,$$

cuando $|x| < 1$ puede hacerse más pequeña que un número dado positivo sin más que tomar p suficientemente grande. Aquí se encuentra ya la definición de convergencia de una serie. Debe señalarse que Bolzano no conocía el trabajo de Gauss sobre la serie hipergeométrica.

Lo mejor de Bolzano como analista se encuentra en una memoria publicada en 1917, en donde prueba que una función real continua f definida en el intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Esta publicación da el primer paso hacia lo que se llamó después la aritmetización del análisis matemático, eliminando de las demostraciones las consideraciones geométricas.

Antes de probar el teorema fundamental da varios lemas y definiciones, aparece aquí la primera definición de función continua f en el punto x de un intervalo $[a, b]$ en la forma de que tiene la propiedad de que la diferencia $f(x+h)-f(x)$ (entiéndase, módulo de la diferencia) puede hacerse menor que toda magnitud dada si se forma el valor absoluto de h suficientemente pequeño; también define la continuidad lateral. En cuanto a la definición de serie convergente es la misma que habrá dado anteriormente para la serie del binomio, como el "límite" de las sumas parciales. Considera también las series de funciones.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{1}$$

y si

$$F_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x),$$

prueba lo que se llamó después el criterio de Cauchy: si la serie (1) converge, entonces $|F_m(x) - F_n(x)|$ se hace pequeño si se toman m y n suficientemente grandes; y además la propiedad recíproca, supeditada a la situación de que en este tiempo aún no se había hecho una construcción de los números reales y, por tanto, admitir la existencia de límite no era totalmente riguroso. Bolzano era consciente de ello cuando afirma que si se acepta que el límite existe se puede aproximar tanto como se quiera.

Bolzano escribió en 1835 un libro incompleto titulado *Teoría de magnitudes*, que fue publicado en 1930. En una de sus partes, *Teoría de funciones*, hace una construcción del número irracional que adolece de rigor. En la primera parte de *Teoría de funciones* utiliza sin prueba la propiedad de que un conjunto acotado infinito de números reales tiene por lo menos un punto de acumulación, resultado que es conocido ahora como el teorema de Bolzano–Weierstrass. En la segunda parte, titulada *Funciones derivadas*, critica una proposición que había sido publicada en 1830 por el famoso matemático francés Galois, a sus 18 años, alumno que era entonces de la Escuela Normal. Esta proposición se refiere a la afirmación hecha por Ampère en 1806 de que toda función real continua en un intervalo $[a, b]$ tiene derivada salvo en puntos aislados. Galois "demostró" esto.

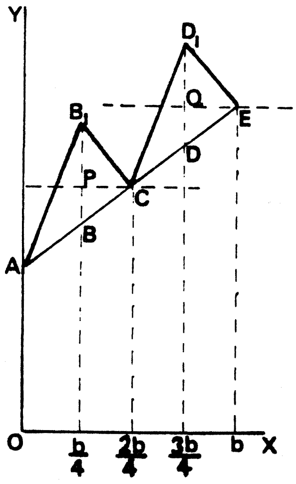
La réplica de Bolzano consistió en dar un ejemplo que pone de manifiesto que dicha propiedad no es cierta; Bolzano prueba que la función construida por él no tiene derivada en un conjunto denso de su intervalo de definición, aunque después se comprobó que no es derivable en ningún punto.

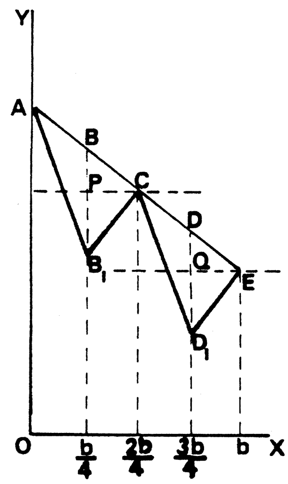
A continuación se expone el ejemplo de Bolzano, modificado ligeramente para hacer más breve su explicación.

Sea $f_0(x)$ una función lineal definida en el intervalo cerrado $[0, b]$, $0 <$

$b < \infty$, tal que la pendiente de su gráfica es distinta de cero. Si dicha pendiente es positiva, sea h la diferencia $f_0(b) - f_0(0)$, y si la pendiente es negativa, h significa $f_0(0) - f_0(b)$. Se divide el intervalo $[0, b]$ en cuatro partes iguales añadiendo los puntos $\frac{b}{4}$, $\frac{2b}{4}$, y $\frac{3b}{4}$ (véanse las figuras, las cuales corresponden a los casos en que la pendiente de la gráfica AE es positiva y negativa, respectivamente). B, C y D son las intersecciones con AE de las paralelas al eje OY por los puntos de abscisas $\frac{b}{4}$, $\frac{2b}{4}$ y $\frac{3b}{4}$. Se trazan dos rectas r y s paralelas al eje OX por los puntos C y E, respectivamente. Si $PB_1 = \frac{3}{2} PB$ y $QD_1 = \frac{3}{2} QD$, la poligonal AB_1CD_1E es la gráfica de una función continua $f_1(x)$ definida en $[0, b]$ cuya derivada no existe en los puntos $\frac{b}{4}$, $\frac{2b}{4}$ y $\frac{3b}{4}$. Puesto que $|f_0(0) - f_0(b)| = h$, resulta que, para cada x de $[0, b]$, $|f_0(x) - f_1(x)|$ es menor o igual que la longitud común de los segmentos BB_1 y DD_1, que a su vez coincide con $\frac{5}{8} h$, luego

$$|f_0(x) - f_1(x)| \leqslant \frac{5}{8} h, \quad x \in [0, b].$$





Se tiene, además,

$$\left| f_1\left(\frac{b}{4}\right) - f_1(0) \right| = \left| f_1\left(\frac{3b}{4}\right) - f_1\left(\frac{2b}{4}\right) \right| = \frac{7}{8} h$$

$$\left| f_1\left(\frac{b}{4}\right) - f_1\left(\frac{2b}{4}\right) \right| = \left| f_1\left(\frac{2b}{4}\right) - f_1\left(\frac{4b}{4}\right) \right| = \frac{3}{8} h$$

y por tanto:

$$\frac{3}{8}h \leqslant \left| f_1\left(\frac{kb}{4}\right) - f_1\left(\frac{(k-1)b}{4}\right) \right| \leqslant \frac{7}{8}h, \quad k = 1,2,3,4 \tag{2}$$

Cada uno de los segmentos AB_1, B_1C, CD_1 y D_1E se divide en cuatro partes iguales y se le aplica la misma construcción que a AE; se obtiene una poligonal que es la gráfica de una función continua $f_2(x)$ definida en $[0, b]$, que es lineal en cada uno de los intervalos

$$\left[\frac{(k-1)b}{4^2}, \frac{kb}{4^2}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 4^2,$$

siendo la pendiente de la gráfica de $f_2(x)$ en cada uno de estos intervalos distinta de cero. Se deduce de (2) y de la construcción realizada que

$$|f_2(x) - f_1(x)| \leqslant \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{8}h, \quad x \in [0, b],$$

y también que

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2 h \leqslant \left| f_2\left(\frac{kb}{4^2}\right) - f_2\left(\frac{(k-1)b}{4^2}\right) \right| \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^2 h, \quad k = 1, 2, \ldots, 4^2.$$

En general, se supone que, para un entero positivo n, se tiene una función continua $f_n(x)$ definida en $[0, b]$, que es lineal y cuya gráfica tiene pendiente no nula en cada uno de los intervalos

$$\left[\frac{(k-1)b}{4^n}, \frac{kb}{4^n}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 4^n,$$

verificándose además, que

$$\left(\frac{3}{8}\right)^n h \leqslant \left| f_n\left(\frac{kb}{4^n}\right) - f_n\left(\frac{(k-1)b}{4^n}\right) \right| \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^n h, \quad k = 1, 2, \ldots, 4^n. \tag{3}$$

Si la gráfica de $f_n(x)$ en el intervalo

$$\left[\frac{(k-1)b}{4^n}, \frac{kb}{4^n}\right]$$

es el segmento $Q_{k-1}Q_k$, se divide dicho segmento en cuatro partes iguales y se le aplica la misma construcción que a AE, obteniéndose una poligonal p_k. La unión de las poligonales $p_k, k = 1, 2, \ldots, 4^n$, forman una poligonal que es la gráfica de una función continua $f_{n+1}(x)$ definida en $[0, b]$, que es lineal y cuya gráfica tiene pendiente no nula en cada uno de los intervalos

$$\left[\frac{(k-1)b}{4^{n+1}}, \frac{kb}{4^{n+1}}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, 4^{n+1}.$$

Se deduce de (3) y de la construcción realizada que

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{5}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^n h, \quad x \in [0, b], \tag{4}$$

y también que

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{n+1} h \leqslant \left| f_{n+1}\left(\frac{kb}{4^{n+1}}\right) - f_{n+1}\left(\frac{(k-1)b}{4^{n+1}}\right)\right| \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} h,\ k=1,2,\dots,4^{n+1}.$$

De (4) se obtiene que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(f_n(x) - f_{n-1}(x)\Big)$$

converge uniformemente en $[0, b]$ y, puesto que

$$f_n(x) = f_0(x) + \sum_{p=1}^{n}\Big(f_p(x) - f_{p-1}(x)\Big),\ n = 1,2,\dots,\ x \in [0, b],$$

resulta que la sucesión $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ converge uniformemente en $[0, b]$ a una función f que, obviamente, es continua.

A continuación se verá que f no es derivable en ningún punto de $[0, b]$. No ofrece dificultad comprobar que, para cada entero positivo n,

$$\frac{f\left(\frac{(4^n-1)b}{4^n}\right) - f(b)}{\frac{(4^n-1)b}{4^n} - b} = \frac{f_n\left(\frac{(4^n-1)b}{4^n}\right) - f_n(b)}{-\frac{1}{4^n}b} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{h}{b}, & \text{si } f_0(b) > f_0(0), \\ (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{h}{b}, & \text{si } f_0(b) < f_0(0), \end{cases}$$

y, por tanto, f no es derivable en b. Se fija un punto x en $[0, b[$. Dado un número positivo m, se hallan dos enteros positivos k y n de manera que

$$n > m, \quad x \in \left[\frac{(k-1)b}{4^n}, \frac{kb}{4^n}\right[\subset [0, b[.$$

Si

$$\left| f\left(\frac{kb}{4^n}\right) - f(x)\right| \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^n h,$$

entonces

(5)
$$\left|\frac{f\left(\frac{kb}{4^n}\right) - f(x)}{\frac{kb}{4^n} - x}\right| \geqslant \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^n h}{\frac{1}{4^n}b} > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m \frac{h}{b}.$$

Si

$$\left|f\left(\frac{kb}{4^n}\right)-f(x)\right|<\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^n h,$$

resulta que

$$\left|f\left(\frac{(k-1)b}{4^n}\right)-f(x)\right|\geqslant\left|f\left(\frac{(k-1)b}{4^n}\right)-f\left(\frac{kb}{4^n}\right)\right|-\left|f\left(\frac{kb}{4^n}\right)-f(x)\right|=$$

$$=\left|f_n\left(\frac{(k-1)b}{4^n}\right)-f_n\left(\frac{kb}{4^n}\right)\right|-\left|f\left(\frac{kb}{4^n}\right)-f(x)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{3}{8}\right)^n h-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^n h=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^n h$$

y, por tanto,

$$\text{(6)}\qquad\left|\frac{f\left(\frac{(k-1)b}{4^n}\right)-f(x)}{\frac{(k-1)b}{4^n}-x}\right|\geqslant\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^n h}{\frac{1}{4^n}b}>\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m\frac{h}{b}.$$

Se deduce ahora de (5) y de (6) que f no es derivable en x.

Finalmente, en su libro escrito en 1847, *Paradojas del infinito*, que tiene fundamentalmente carácter filosófico, introduce la definición de conjunto infinito como aquél que se pone en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio de él. Esta definición fue dada mucho tiempo después, independientemente, por Dedekind.

La persona más influyente en el análisis matemático riguroso fue Agustín Louis Cauchy, que nació en París en 1789. Cuando era niño, su padre se ocupó de su formación dándole clase frecuentemente, pues era una época en la que, por razones políticas, las escuelas francesas estaban cerradas, o bien funcionaban irregularmente. Ingresó en la Escuela Politécnica de París en 1805.

Desde 1810 hasta 1813 trabajó como ingeniero en Cherburgo, y después se dedicó, hasta su fallecimiento en 1857, a la ciencia pura.

Fue candidato dos veces a la Academia de Ciencias, pero no ingresó hasta 1816, por voluntad de Luis XVIII, que previamente había excluído arbitrariamente de la Academia a Monge y a Carnot.

Cauchy enseñó en la Escuela Politécnica, en el Colegio de Francia y en la Sorbona, dando cursos que fueron famosos.

En 1830, por razón de ocupar un puesto público, tenía que prestar juramento a Luis Felipe de Orleans; se negó a hacerlo y se exilió voluntariamente. Estuvo en Friburgo, Suiza y después en Turín, enseñando en una cátedra de Física de la Universidad durante dos años. Después, en 1833, fue a Praga como instructor del duque de Burdeos. Volvió a Francia en 1838, pero no se le restituyó en la cátedra de la Sorbona hasta 1848, por concesión especial de Napoleón III.

Es probablemente, después de Euler, el matemático más prolífico en publicaciones.

En la Escuela Politécnica, dictó conferencias sobre análisis matemático, publicadas en tres obras famosas: *Curso de análisis*, subtitulado *Análisis algebraico* (1821), *Resumen de las conferencias de cálculo infinitesimal* (1823) y *Conferencias sobre aplicaciones del análisis a la geometría* (2 tomos, 1826, 1828). Estos libros tienen una importancia enorme, porque en ellos, por primera vez, el análisis se construye sobre la teoría de límites con un rigor inusitado hasta entonces.

En el *Curso de análisis*, Cauchy define el concepto de límite de una sucesión, da una definición general de función y, sobre todo, elimina las series divergentes con el fin de ser riguroso, haciendo un estudio muy detallado de las series convergentes. Prueba el criterio de convergencia llamado ahora de Cauchy, y que anteriormente habrá encontrado también Bolzano. Estudia las series de términos positivos, da el criterio de la raíz y demuestra de una forma precisa el criterio de convergencia que D'Alembert había dado en 1768. Introduce el concepto de serie absolutamente convergente, y pone como ejemplo de una serie convergente no absolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad 0 < s < 1.$$

Demuestra que el producto, llamado ahora de Cauchy,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(u_1 v_n + u_2 v_{n-2} + \ldots + u_n v_1 \right)$$

de dos series absolutamente convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

es absolutamente convergente. Comete un error "demostrando" que si una serie de funciones continuas definidas en un intervalo, converge en cada uno de los puntos de dicho intervalo, la función suma es continua. Abel observó en 1826 que esto era falso y dio como contraejemplo la serie de funciones continuas en el intervalo $[0, \pi]$,

$$\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \ldots,$$

que converge a $\frac{x}{2}$ en $[0, \pi[$ y a cero en π.

El cálculo infinitesimal que presenta Cauchy está próximo a nosotros. La definición de derivada como límite de

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

cuando h tiende a cero es la misma de Bolzano, y añade que si una función tiene derivada en un punto, es continua en él. Introduce la integral de una función continua f definida en un intervalo $[a, b]$, independientemente del concepto de derivada, para lo cual realiza una partición de dicho intervalo en n partes mediante los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

forma la suma

$$S = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_{j-1})$$

y demuestra que S converge a un límite cuando aumenta n y cada uno de los intervalos $x_j - x_{j-1}, j = 1, 2, \ldots, n,$ tiende a cero. A este límite le llama la integral de f en $[a, b]$, que designa por

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Es interesante observar que para demostrar la existencia del límite de S, Cauchy usa el hecho de que la función f es uniformemente continua en $[a, b]$, sin expresarlo claramente. Dicho concepto sería precisado años más tarde por Heine.

Para una función f que admite derivadas continuas hasta un orden n en el intervalo $[a, b]$, Cauchy demuestra la fórmula:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots +$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)\,dx$$

La función

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0,\ f(0) = 0,$$

que es infinitamente diferenciable en la recta real, la da Cauchy como ejemplo de una función cuya serie de Taylor en el origen converge en todo número real, pero no representa a la función f. Esto sucede porque las derivadas de todas las órdenes de f en el origen son nulas.

En relación con el establecimiento del rigor en el análisis matemático, se ha de citar también a Karl Weierstrass, nacido en Ostenfeld, Westfalia, en 1815 de una familia católica. Después de sus estudios secundarios marchó a la Universidad de Bonn para cursar derecho, influido por los deseos de su padre, pero no llegó a terminar estos estudios. Cediendo a sus propios impulsos se trasladó a Munster en 1838, para estudiar privadamente matemáticas bajo la dirección de un competente profesor: C. Gudermann. Se dedicó durante muchos años a la enseñanza media. En 1856 fue nombrado profesor en el Instituto Profesional de Berlín. Encargado de curso en 1856 en la Universidad de Berlín, se dedicó permanentemente a ella a partir de entonces, convirtiéndose en profesor titular en 1863. Permaneció en su puesto hasta su muerte, acaecida en 1897, cuando tenía ochenta y dos años.

Aunque Cauchy estableció práctivamente los conceptos del análisis matemático en su forma actual, utilizando la idea de límite, fue Weierstrass quien dijo la última palabra construyendo una base aritmética formal como fundamentación del análisis, con exclusión de todo razonamiento de naturaleza geométrica. A esta forma de proceder se le ha llamado “la aritmetización del análisis matemático”.

En el año 1872, Weierstrass mostró que existen funciones reales continuas definidas en un intervalo que no tienen derivada en ninguno de sus puntos; Bolzano, muchos años antes, había dado un ejemplo con esta propiedad, pero no había llegado al público matemático. El ejemplo de Weierstrass es el siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

en donde x es un número real cualquiera, $0 < a < 1$, y b un entero par tal que $ab > 1 + 2\pi$. Puesto que la serie dada está mayorada por la serie geométrica convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n,$$

resulta que f es una función continua definida en la recta real. Si h es un número real distinto de cero, se tiene que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{\cos(b^n\pi(x+h)) - \cos(b^n\pi x)}{h} =$$

$$= -\frac{2}{h}\sum_{n=0}^{\infty} a^n \operatorname{sen}\left(b^n\pi\left(x+\frac{h}{2}\right)\right) \operatorname{sen}\left(b^n\pi\frac{h}{2}\right).$$

Si se toma h sucesivamente igual a b^{-m} y a $1/2b^{-m}$, siendo m un entero positivo, todos los términos de la serie anterior son nulos para $n > m$, y resulta, si

$$S_m = -\frac{2}{h}\sum_{n=0}^{m-1} a^n \operatorname{sen}\left(b^n\pi\left(x+\frac{h}{2}\right)\right) \operatorname{sen}(b^n\pi x),$$

que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = S_m - 2a^m b^m \operatorname{sen}\left(b^m \pi x + \frac{\pi}{2}\right),$$

cuando $h = b^{-m}$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = S_m - 2\sqrt{2}\, a^m b^m \operatorname{sen}\left(b^m \pi x + \frac{\pi}{4}\right),$$

cuando $h = \frac{1}{2} b^{-m}$.

En cualquier caso,

$$|S_m| \leqslant \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{m-1} a^n \left|\operatorname{sen} b^n \pi \frac{h}{2}\right| \leqslant \frac{2}{h} \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n \pi \frac{h}{2} =$$

$$= \pi \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} \leqslant \pi \frac{a^m b^m}{2\pi} = \frac{a^m b^m}{2}.$$

Si k es un entero, la unión de los intervalos

$$\left[k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8},\ k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right], \quad \left[k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8},\ k\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right]$$

es un intervalo de amplitud $\frac{\pi}{2}$ por lo que dado un número real cualquiera pertenecerá a alguno de estos intervalos para algún entero k. Si

$$b^m \pi x + \frac{\pi}{4} \in \left[k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8},\ k\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right],$$

entonces

$$\left|\operatorname{sen}\left(b^m \pi x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{4}$$

y, por tanto, para $h = \frac{1}{2} b^{-m}$,

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geqslant 2\sqrt{2}\, a^m b^m \left|\operatorname{sen}\left(b^m \pi x + \frac{\pi}{4}\right)\right| - |S_m| \geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{2}\, a^m b^m \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{a^m b^m}{2} = \frac{a^m b^m}{2}.$$

Si

$$b^m \pi x + \frac{\pi}{4} \notin \left[k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8},\ k\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \right],\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots,$$

existe un entero q tal que

$$b^m \pi x + \frac{\pi}{4} \in \left[q\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8},\ q\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right],$$

de aquí que

$$b^m \pi x + \frac{\pi}{2} \in \left[q\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8},\ q\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \right]$$

y, por tanto,

$$\left| \operatorname{sen} \left(b^m \pi x + \frac{\pi}{2} \right) \right| \geqslant \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} > \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Consecuentemente, para $h = b^{-m}$,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \geqslant 2a^m b^m \left| \operatorname{sen} \left(b^m \pi x + \frac{\pi}{2} \right) \right| - |S_m| \geqslant$$

$$\geqslant 2a^m b^m \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} - \frac{a^m b^m}{2} > \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) a^m b^m$$

Se deduce de lo anterior que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

no tiene límite finito cuando h tiende a cero, luego f no es derivable en x.

Las ideas de Weierstrass no fueron conocidas, como en el caso de Cauchy, por artículos o libros que publicara sino por el trabajo de personas que escucharon sus lecciones. Para poder establecer el cálculo sobre el concepto de número, hizo en primer lugar una construcción del número real independiente de toda concepción geométrica. En su teoría, se representa cada número real por un cierto conjunto de números racionales.

En las exposiciones del cálculo realizadas por Bolzano o por Cauchy, cuando se habla de límite se maneja, de alguna manera, la intuición de movimiento, como por ejemplo, la expresión de Cauchy de una "variable que se acerca a su límite". Weierstrass, por el contrario, introduce una forma "estática" del límite y de la continuidad mediante el llamado método $\varepsilon\,\delta$. Para Weierstrass, una variable x

no es más que una letra que designa cualquier elemento de un conjunto dado A de números reales; la variable x es continua si, para cada x_0 de A y cada $\delta > 0$ existe en el intervalo $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$, algún elemento de A distinto de x_0, o lo que es lo mismo x_0 es de acumulación de A. De una manera similar a Bolzano y a Cauchy, pero con más claridad define los conceptos de derivada y de suma de una serie.

La idea de convergencia uniforme se remonta a C. Gudermann, maestro de Weierstrass, que la utilizó en un artículo publicado en el *Journal de Crelle* en 1838, en relación con ciertos desarrollos en serie de funciones elípticas. En 1847, Ph. L. Seidel y G. G. Stokes introducen también la convergencia uniforme, pero sus escritos relacionados con ella no tuvieron repercusión. Fue Weierstrass en 1861 quien definió y utilizó con gran precisión la convergencia uniforme de las series funcionales, demostrando que si una serie cuyos términos son funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ converge uniformemente en este intervalo a una función f, entonces f es continua. También estudió la derivación término a término de las series de funciones en relación con la convergencia uniforme.

Citemos ahora a Richard Dedekind, que nació en Brunswick en 1831, ciudad en donde había nacido también Gauss. En 1850, ingresó en la Universidad de Gotinga, leyendo su tesis de habilitación en 1854, apadrinado por Gauss. En esta época, los matemáticos que más influyeron en Dedekind fueron Riemann y Dirichlet; este último ocupó la cátedra que dejara Gauss a su muerte en 1855. En el año 1858, Dedekind fue llamado al Politécnico de Zurich para ocupar una plaza de profesor ordinario de matemáticas; a los cuatro años pasó al Instituto de Brunswick en donde trabajó hasta 1916, fecha de su muerte.

Cuando Dedekind preparaba su curso en Zurich, 1858–1859, sobre cálculo diferencial e integral, sintió que se necesitaba para explicarlo una base realmente científica de la aritmética. Para poder afirmar que una sucesión creciente acotada superiormente de números reales tiene límite, se tenía que recurrir entonces a una evidencia geométrica. Si en una recta se toma un origen y un punto unidad, se representan fácilmente en ella los números racionales y ciertos números irracionales, pero asegurar que una sucesión creciente de puntos de la recta, acotada por la derecha, tiene límite, supone admitir que la recta no tiene "huecos", y aceptar esto, es en el fondo, poner un axioma. Si se toma un punto x en la recta, cuya abscisa sea irracional, éste realiza una clasificación de todos los puntos racionales de la recta en dos grupos: los que están a la izquierda de x y los que están a la derecha. Aquí está la idea de partida de Dedekind para construir su teoría de cortaduras que publicó en el año 1872 en un artículo titulado *Continuidad y números irracionales*.

Una cortadura (A, B) es una partición del conjunto Q de los números racionales en dos clases A y B de manera que cada elemento de A es menor que cualquier elemento de B. Si se tiene un número racional b y se escribe:

$$A = \{r \in Q:\ r \leqslant b\}, \quad B = \{r \in Q:\ r > b\},$$

(A, B) es una cortadura tal que A tiene un elemento máximo: b, mientras que B no tiene elemento mínimo. Por otra parte, si

$$C = \{r \in Q : r < b\} \quad \text{y} \quad D = \{r \in Q : r \geqslant b\},$$

(C, D) es una cortadura tal que C no tiene máximo y D tiene elemento mínimo: b. Se dice que las cortaduras anteriores son racionales y están definidas por b. Si se designa ahora por A el conjunto de todos los números racionales no positivos junto con los racionales positivos, cuyo cuadrado sea menor que 2, y B es el subconjunto de Q formado por los elementos positivos cuyo cuadrado es mayor que 2, (A, B) es una cortadura que no es racional, y se dice que es irracional y está definida por $\sqrt{2}$.

Sea R el conjunto formado por las cortaduras racionales (A, B) tales que A tiene un elemento máximo junto con todas las cortaduras irracionales. Dedekind define una relación de orden, una suma y un producto en R que le dan estructura de cuerpo ordenado, arquimediano y completo (el concepto de cuerpo fue introducido por Dedekind en 1971). R es el cuerpo de los números reales construido por Dedekind. Si se identifica cada número racional con la cortadura racional de R que define, la suma, el producto y la relación de orden en R restringidos a Q, coinciden con la suma, producto y relación de orden usuales de Q. Charles Méray (1835–1811), matemático francés, publicó en 1869 una memoria en donde introduce los números reales de una manera similar a como lo hizo posteriormente G. Cantor.

Georg Cantor nació en San Petersburgo en 1845, en una familia danesa; su padre era judío convertido al protestantismo. Cantor realizó sus estudios primarios en su ciudad natal, y los secundarios en Francfurt, a donde se había trasladado con su familia. En 1862, se desplaza a Zurich para emprender estudios superiores, que abandona al año siguiente, a la muerte de su padre. En 1963, ingresa en la Universidad de Berlín, en donde estudia matemáticas. Kummer y Kronecker ejercieron una gran influencia sobre él, pero sobre todo fue Weierstrass quien más participó en la carrera científica de Cantor. En el año 1872 fue nombrado profesor extraordinario en la Universidad de Halle. En el año 1884 sufrió una depresión nerviosa motivada, según parece, por la oposición de Kronecker a su teoría de conjuntos. Murió en 1918 en una clínica psiquiátrica de Halle.

G. Cantor elaboró una construcción de los números reales semejante a la de Méray. Se publicó en 1872 redactada por su discípulo Heine, y después, en el mismo año, Cantor hizo otra publicación. Esta teoría fue perfeccionada en un trabajo de Cantor de 1883.

La teoría de Cantor consiste en lo siguiente: sea (a_n) una sucesión de números racionales; esta sucesión se dice de Cauchy si dado un número racional positivo cualquiera ε, existe un entero positivo p tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \text{si } n, m \geqslant p.$$

Sea M el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales. Si para (a_n) y (b_n) pertenecientes a M, se pone

$$(a_n) \sim (b_n)$$

cuando $(a_n - b_n)$ sea una sucesión nula, se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia en M. Sea R el conjunto de las clases de equivalencia para $\sim$. Cantor define en R una suma, un producto y una relación de orden que le dan a R una estructura de cuerpo ordenado, arquimediano y completo. Este cuerpo es el de los números reales. Si se identifica cada número racional b con el elemento de R formado por todas las sucesiones de números racionales que convergen a b, la suma, el producto y la relación de orden de R restringidos a Q coinciden con la suma, el producto y la relación de orden usuales de Q.

En 1873, Cantor escribe a Dedekind preguntándole si existe una aplicación biyectiva del conjunto N de los enteros positivos en el conjunto R de los números reales. Cantor mismo responde negativamente a esta pregunta, algunos días más tarde utilizando el llamado principio de encaje de intervalos en R, que se debe a Cantor, y que es consecuencia de la completitud del cuerpo de los números reales. Dice lo siguiente: si $[a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, es una sucesión de intervalos cerrados de R tales que

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], \; n = 1, 2, \ldots,$$

existe un número real perteneciente a todos estos intervalos. Cantor supone que R es numerable y lo ordena en una sucesión (α_n). Halla un intervalo $[a_1, b_1]$, $a_1 < b_1$, al cual no pertenezca α_1. Supuesto obtenido el intervalo $[a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, construye un intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, $a_{n+1} < b_{n+1}$, contenido en el anterior al cual no pertenezca α_{n+1}. Entonces, existe por lo menos un número real α tal que

$$\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Obviamente, α es diferente de $\alpha_n, n = 1, 2, \ldots$, lo cual es una contradicción.

En una carta que escribe Cantor a Dedekind en 1874, el pregunta si existirá una aplicación biyectiva del intervalo $[0, 1]$ en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Hasta tres años más tarde, Cantor no dará respuesta, en este caso positiva, a esta cuestión.

En una serie de artículos entre 1879 a 1884, Cantor elabora su teoría de conjuntos. Dice que dos conjuntos A y B tienen la misma potencia, o el mismo número cardinal, cuando se puede establecer entre sus elementos una correspondencia biunívoca. Prueba que si $\mathscr{P}(A)$ es el conjunto de todas las partes de un conjunto A, A no se puede poner en correspondencia biunívoca con $\mathscr{P}(A)$, de donde deduce, teniendo en cuenta que, obviamente, existe una aplicación inyectiva de A en $\mathscr{P}(A)$, que el número cardinal de $\mathscr{P}(A)$ es estrictamente más grande que el de A. La demostración es la siguiente: se supone que existe una aplicación biyectiva de A en $\mathscr{P}(A)$ que asigna a cada elemento b de A el subconjunto A_b de A, o sea, el elemento A_b de $\mathscr{P}(A)$. Se pone

$$B = \{b \in A \,:\, b \notin A_b\}$$

Se tiene que B es igual a A_c para un cierto elemento de A. Entonces, si $c \in B = A_c$, resulta, por la definición de B, que c no está en B, y si $c \notin B = A_c$, se obtiene que c pertenece a B. Esto constituye una contradicción.

Cantor define operaciones con números cardinales y elabora una aritmética trasfinita.

En una memoria sobre series trigonométricas publicadas en 1871, Cantor demuestra el siguiente teorema de unicidad: si las series

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$\text{y} \quad \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \operatorname{sen} nx)$$

convergen puntualmente en R a la misma función f, entonces

$$a_0 = c_0, \ a_n = c_n, \ b_n = d_n, \ n = 1, 2, \ldots$$

Este resultado es equivalente al siguiente: si la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{7}$$

converge a cero en cada punto de R, entonces

$$a_0 = a_n = b_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots$$

En una publicación de Cantor de 1872, en la cual se desarrolla el número real tal como se ha explicado antes, se generaliza el teorema de unidad de las series trigonométricas, para lo cual se utiliza el concepto de punto de acumulación de un subconjunto acotado A de R; el conjunto derivado $A^{(1)}$ de A es el conjunto de los puntos de acumulación de A, y para cada entero positivo n, $A^{(n+1)}$ es el conjunto derivado de $A^{(n)}$. El nuevo enunciado es el enunciado es el siguiente: Sea A un subconjunto del intervalo $]0, 2\pi[$ tal que $A^{(n)}$ es el conjunto vacío para algún entero positivo n. Si la serie trigonométrica (7) converge puntualmente a cero en $]0, 2\pi[\setminus A$, entonces

$$a_0 = a_n = b_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots$$

Según Zermelo, es en la memoria anterior en donde tiene lugar el nacimiento de la teoría cantoriana de conjuntos.

Dado un conjunto acotado A de números reales, Cantor define el derivado de orden w:

$$A^{(w)} = \bigcap \{A^{(n)} : n = 1, 2, \ldots\}.$$

$A^{(w+1)}$ es el derivado de $A^{(w)}$ y, para un entero positivo n, $A^{(w+n+1)}$ es el derivado de $A^{(w+n)}$. También:

$$A^{(2w)} = \bigcap \{A^{(w+n)} : n = 1, 2, \ldots\}$$

Y así se van construyendo los distintos derivados:

$$A^{(3w)} = \bigcap \{A^{(2w+n)} : n = 1, 2, \ldots\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A^{(w^2)} = \bigcap \{A^{(nw)} : n = 1, 2, \ldots\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y, en general, se define

$$A^{(n_0 w^p + n_1 w^{p-1} + \ldots + n_{p-1} w + n_p)}$$

La elaboración anterior conduce a Cantor, de una forma natural, a las ideas de conjunto bien ordenado y de número ordinal.

Un conjunto ordenado es bien ordenado cuando todo subconjunto no vacío de él tiene primer elemento. Dos conjuntos bien ordenados se dice que tienen el mismo número ordinal cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ellos, que conserva el orden. Cantor estudia los números ordinales definiendo operaciones entre ellos y desarrollando una aritmética.

En la teoría cantoriana de conjuntos, surgen contradicciones cuando se consideran conjuntos demasiado grandes, así por ejemplo, si se admite un conjunto universal $\sqcup$, es decir, un conjunto que contenga a cualquier otro conjunto, se tiene que $\mathcal{P}(\sqcup)$ está contenido en $\sqcup$ y, por el teorema de Cantor, el número cardinal de $\sqcup$ es estrictamente más pequeño que el cardinal de $\mathcal{P}(\sqcup)$, lo cual es una contradicción.

Un conjunto A es ordinario cuando, considerado como elemento, no pertenece a A, así por ejemplo, el conjunto Z de todos los números enteros no es un entero y, por tanto, Z es ordinario. Si se supone que existe un conjunto Y cuyos elementos son todos los conjuntos ordinarios, se llega también a una contradicción. Esta es la famosa paradoja de Russell: se tiene que

$$Y = \{X : X \notin X\}.$$

Si $Y \in Y$, entonces $Y \notin Y$, y si $Y \notin Y$, resulta que $Y \in Y$.

Cuando aparecieron las paradojas que hicieron tambalearse el edificio cantoriano, Hilbert dijo lo siguiente: Cantor, con su teoría de conjuntos, ha construido un paraíso para los matemáticos, y no habrá nadie capaz de expulsarnos de él.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOLZANO, B.: Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrössen dienen, genauer als bisher erwiesen, Enders, Prag, 1816.

[2] BOLZANO, B.: Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegenegesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel del Gleichung liege, Abh. K. Böhm. Gessell. Wiss., 3, t. 5, pp. 1–60, 1817.

[3] BOLZANO, B.: Paradoxien des Unendlichen, Reclam, Leipzig, 1851.

[4] BOLZANO, B.: Functionenlehre, Schriften, t. I. K. Böhm, Gessel. Wiss., Prag, 1930.

[5] BOYER, C. B.: The history of the calculus and itsd conceptual development, Dover Publications, 1949.

[6] CANTOR, G.: Gesanmelte Abhandlungen, Olms, Hildesheim, 1962.

[7] CAUCHY, A. G.: Oeuvres complètes, Gauthur–Villars, Paris, 1882, 1897, 1895, 1898, 1900, 1974.

[8] DEDEKIND, R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen, siebente Auflage, Vieweg, Braunschueig, 1872.

[9] DIEUDONNÉ, J.: Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700–1900, I., Hermann, Paris, 1978.

[10] GAUSS, C. F.: Werke, Göttingen, 1866, 1906, 1917.

[11] HEINE, E.: Die Elemente der Functionenlehre, Journ. für die reine und angew. Math. t. 74, pp. 172–188, 1872.

[12] LORIA, G.: Storia delle Matematiche, Ulrico Hoepli, Milano, 1950.

[13] MÉRAY, CH.: Remarques sur la nature des quantités defnies par la condition de servir de limites à des variables données, Revue des Soc. Savantes, Sci. math. phyys. nat., 2, t. 4, pp. 280–289, 1869.