EL REINADO DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA

JOSE JAVIER ETAYO MIQUEO

Académico Numerario

La geometría proyectiva es toda la geometría. *A. Cayley.*

If Plato wrote over the gate of the Academy, "Let none ignorant of geometry presume to enter here", surely we may write to-day in the same spirit, "Let none ignorant of the fundamentals of synthetic projective geometry presume to the title of geometer". *J.L. Coolidge* [1].

Puede decirse sin demasiada exageración que en el siglo XIX, incluso en su primera mitad, hace su aparición, sienta sus fundamentos y, casi, dibuja la imagen definitiva que de ella ha de perdurar, esta rama de la geometría que, con algunas otras, rompe la estructura euclídea que hasta entonces se había enseñoreado por completo del panorama geométrico. Es verdad que ha tenido precedentes, casi siempre prácticamente ignorados, y algunos han sido ya considerados en estos cursos [2].

Empero, la única variación, y eso en el aspecto metodológico, de la doctrina de Euclides había sido la introducida por Descartes; en realidad es la geometría del espacio euclídeo la que se estudia pero con el instrumental algebraico y analítico proporcionado por el método de las coordenadas. Con ello se ha relegado a un segundo término a la geometría sintética, aunque su construcción como modelo lógico deductivo no ha perdido, por supuesto, ni una coma de su valor.

También se recurre a ella en algunas aplicaciones, ingeniería, arquitectura, etc., que hoy entrarían en el capítulo de "sistemas de representación". Desde los estudios de perspectiva de los pintores renacentistas a la olvidada proyección cónica de Desargues y a la representación diédrica de Monge se van poniendo los cimientos de la geometría proyectiva que va a alcanzar todo su esplendor en este siglo XIX. Dice un autor [3]: "... ninguna rama de las matemáticas puede competir con la geometría proyectiva en originalidad de ideas, coordinación de intuición en el descubrimiento y rigor en la demostración, pureza de pensamiento, acabamiento lógico, elegancia de demostración y alcance de conceptos. La ciencia nacida del arte resultó ser ella misma un arte".

1. Jean-Victor Poncelet (1788-1867).

Monge (1746-1818) había centrado las distintas direcciones que la geometría, abundantemente rebasada por el análisis, estaba siguiendo. Las aplicaciones del análisis a la geometría hicieron reverdecer un poco a esta última bajo el aspecto de geometría analítica, pero la publicación entre 1795 y 1799 de su *Géométrie descriptive* cae dentro de los métodos de la geometría pura: propiedades y resultados de la representación en planta y alzado.

A su vez, Lázaro Carnot (1753-1823) [4] había también levantado la bandera de la geometría sintética, a la que quiso dotar de un nivel de generalidad comparable al de la geometría analítica. En esta línea publica en 1801 *De la corrélation des figures de la géométrie* y en 1803 su *Géométrie de position* que lo sitúa, junto a Monge, entre los fundadores de la geometría pura moderna.

Charles Julien Brianchon (1785-1864), discípulo de Monge en la École Polytechnique y conocedor de la obra de Carnot, demostró, siendo aún estudiante, el ya olvidado teorema de Pascal junto con el que desde entonces lleva su nombre; y, lo mismo que Pascal con el suyo, quedó asombrado del gran número de consecuencias que de su teorema podía obtener. Ambos resultados constituyen el primer ejemplo de lo que después se ha conocido como "teoremas duales". Ya tenemos el escenario preparado para que en él irrumpa el protagonista de la obra.

Su nombre es Poncelet. Había nacido en Metz y fue también discípulo de Monge en la Politécnica. Como oficial del cuerpo de ingenieros del Ejército participó en la campaña napoleónica de Rusia en 1812 y fue hecho prisionero. Podemos muy bien pensar que Tchaikowsky no llegó a recoger en su famosa Obertura lo que esto significó. En efecto, durante los años 13 y 14, recluído en la prisión de Saratoff, distrajo sus ocios reelaborando, a falta de libros, las lecciones de Monge y Carnot: y así dicen que nació la geometría proyectiva.

Al volver a Francia, en septiembre de 1814, traía entre otras cosas dos manuscritos sobre geometría, en las dos direcciones que había aprendido de Monge. Uno de ellos, que parece debía servir de fundamento al otro, era de geometría analítica y se titulaba, siguiendo la pauta de su maestro, *Applications d'analyse et de géométrie;* pero no se publicó hasta medio siglo después. El otro estaba destinado a convertirse en histórico. Era el *Traité des propriétés projectives des figures,* que se publicaría en 1822, y en el que apuesta decididamente por la geometría pura o sintética.

La discusión se había hecho candente entre los cultivadores de la geometría: los que defendían los métodos analíticos por su mayor generalidad, ya que la geometría sintética se centraba en cada caso particular, en el estudio específico original de un problema dado, cuyos resultados dificilmente se podían generalizar, y los partidarios de los métodos geométricos puros, los más elegantes e intuitivos, de una sencillez y claridad que el método analítico no podía ofrecer. Había que liberar a la geometría "de los jeroglíficos del análisis", decía Carnot [5].

El mismo Poncelet, situado entre los últimos, tuvo como antagonista más radical a otro discípulo de Monge, Joseph-Diez Gergonne (1771-1859), con quien mantuvo una controversia virulenta a propósito de la prioridad sobre el principio de dualidad, según el cual cada teorema daba lugar a otro dual intercambiando los puntos con las rectas, y cuya universalidad decía demostrar Gergonne analíticamente, mientras Poncelet afirmaba haber sido el primero en descubrirlo, por ser una consecuencia de las relaciones entre polo y polar que establecía geométricamente.

Entendió Poncelet que la geometría podía alcanzar el mismo nivel de generalidad que el álgebra, puesto que operaba también con símbolos indeterminados, y una demostración hecha sobre una figura no tenía por qué ser válida exclusivamente para ella, como se decía, sino también para cualquier otra que pudiera obtenerse de ella mediante algunas variaciones. Observa, por ejemplo, la bien conocida propiedad de que los productos de los segmentos en que quedan divididas dos cuerdas que se cortan en un punto interior a una circunferencia son iguales, pero que si se cambia el punto, aunque pase a ser exterior, sigue siendo cierta la propiedad, salvo un cambio de signo, con análoga demostración; y también si una de las secantes desde el punto exterior se mueve hasta hacerse tangente.

Esta especie de ley de permanencia de las relaciones matemáticas daría la buscada generalidad a los teoremas de geometría sintética. Bajo el nombre de *principio de continuidad* la enuncia sustancialmente así: "Si una figura resulta de otra por un cambio continuo y es tan general como la primera, entonces una propiedad demostrada para la primera figura puede ser transferida a la otra sin consideraciones ulteriores".

Tal principio, que parece sugerido por el análisis, era para Poncelet propiamente de geometría sintética y rápidamente se convirtió en un apasionado defensor de esta última frente a los analíticos [6]. Creía, sin embargo, que la utilización irresponsable del principio de continuidad podía conducir a errores y, por tanto, debía ser usado más como medio de descubrimiento e invención que de demostración. Ya Cauchy se había burlado de él considerándolo una atrevida inducción injustificada: la misma idea de figura "en posición general" era suficientemente vaga e inconcreta.

Verdaderamente, y en casos particulares, ya había sido empleado de algún modo este principio u otro análogo por Carnot y, antes, por Desargues y hasta por Kepler en el estudio de las cónicas. La novedad aportada por Poncelet es su aplicabilidad también a los puntos del infinito, por deformación continua de los puntos propios. Introduce así las figuras del infinito y da una representación común a ellas y a las figuras a distancia finita, lo que constituye la esencia del método proyectivo, y le lleva a redescubrir el ya olvidado espacio proyectivo de Desargues bajo una nueva luz y con plena comprensión de su estructura: parece haber sido el primero en percibir que esta materia era realmente una rama completamente nueva de la matemática. Y Chasles - lo veremos luego - hace siempre la distinción entre la geometría antigua, la de los griegos, y moderna o proyectiva.

Como había hecho Desargues, el utillaje empleado por Poncelet procedía de la proyección cónica o central, lo que le lleva claramente a tomar como transformaciones propias de su geometría las proyecciones y las secciones. Distingue así netamente las propiedades métricas de las figuras de las proyectivas, que él llama gráficas, y que son aquéllas que no se alteran por una proyección central. Lo es, por ejemplo, la separación armónica de cuatro puntos alineados pero se le escapa, en cambio, la invariancia de la razón doble. Las reglas elementales de esa proyección son las que permiten un tratamiento igual a los puntos ordinarios y a los ideales o del infinito, que pasarían a ser la misma cosa, aunque él es consciente de que aquí es donde se introduce la verdadera novedad no considerada antes en la geometría. Por eso llama a veces "imaginarios" a los puntos del infinito, como a "todo objeto que se hiciese enteramente imposible o inconstructible" y dice que la recta del infinito es una "noción metafísica". Su espacio proyectivo empieza a no ser ya una representación del espacio físico, como era tomado el euclídeo.

Pero la palabra *imaginario* conviene mejor a otro tipo de puntos, más en consonancia con los resultados del álgebra. Dos cónicas, por ejemplo, se cortan generalmente en cuatro puntos, dados por las soluciones del sistema formado por sus ecuaciones; pero dos de estas soluciones pueden ser imaginarias (conjugadas) o incluso las cuatro, según que las cónicas se corten en sólo dos puntos o en ninguno. Esos puntos, no construíbles, son los que se llamarán también imaginarios y Poncelet establece que si dos circunferencias, que son cónicas, tienen a lo más dos puntos reales de intersección, es porque tienen también dos puntos imaginarios comunes situados en la recta del infinito: son los *puntos cíclicos* por los cuales "pasan" todas las circunferencias del plano. Introduce igualmente el *absoluto* del espacio o circunferencia imaginaria del plano del infinito común a todas las superficies esféricas del espacio.

El juego de proyecciones y secciones, cuya composición en número finito es lo que se llama hoy "proyectividad en el sentido de Poncelet", le lleva al descubrimiento de numerosos y muy bellos resultados. Uno de ellos, al que ya hemos aludido, es el de la *polaridad,* caso particular de proyectividad, que él llama "transformación por polares recíprocas", es decir, establecida entre polo y polar respecto de una cónica, para la cual obtiene una formulación general que desarrolla los casos estudiados por sus antecesores. Otra proyectividad particular es la *homología* en la que los puntos correspondientes están alineados con un punto fijo y las rectas correspondientes se cortan en una recta fija. Los triángulos del teorema de Desargues están en esa relación y puede ser éste un involuntario homenaje de Poncelet a su olvidado y prácticamente ignorado predecesor.

2. Un antepasado desconocido.

En efecto, hasta 1847 no se ha vuelto a saber nada de la obra de Desargues, y eso gracias a una copia que había hecho La Hire y que descubre Chasles. Este último intentó además bucear en un más remoto y perdido precedente de nuestro tema. Pero digamos antes algo de él mismo.

Michel Chasles (1793-1880), nacido en Epernon, fue también alumno de la Escuela Politécnica en los últimos tiempos de Monge y profesor de la misma en 1841. Cinco años más tarde pasó a regentar una cátedra de geometría superior, creada para él en la Sorbona, a la que sirvió durante largos años. Fue miembro de la Academia de Ciencias de París y correspondiente de la de Bruselas.

Chasles fue el continuador de la obra de Poncelet. Demostró la invariancia de la razón doble bajo las proyectividades así como la propiedad de que, dados cuatro puntos de una cónica, la razón doble de las cuatro rectas que los unen con un punto variable de la misma es constante. Prestó también gran atención al principio de continuidad, al que encontraba falto de una demostración rigurosa, lo que no le impide seguir aferrado al cultivo de la geometría pura pasando luego el testigo a algunos geómetras alemanes.

Estudia la generalización de la proyectividad a las *correspondencias* (**n**,**m**) sobre la recta proyectiva, es decir, aquéllas que a cada punto hacen corresponder **n** puntos, distintos o confundidos, y a su vez cada punto es el correspondiente a **m** puntos distintos o confundidos; el *principio de correspondencia de Chasles* establece que el número de puntos (distintos o confundidos) que coinciden con algunos de sus correspondientes es igual a **m + n**.

En este trabajo está el germen de lo que después se llamaría *geometría numerativa,* basada en el "principio de la conservación del número" - *das Prinzip der Erhaltung der Anzahl* -, trasunto de aquel principio de continuidad de Poncelet, que se usa de un modo también intuitivo aún en la obra de Hermann Schubert (1848-1911) [7], pero que ha sido objeto después de formalizaciones precisas, por Severi o van der Waerden, entre otros; todavía hoy es este tipo de geometría tema de investigación y sigue produciendo, con nuevas técnicas, interesantes resultados [8].

Chasles fue, en fin, uno de los últimos geómetras franceses, quizá el único importante, que, siguiendo los pasos de Poncelet, enriqueció la geometría proyectiva con ingeniosas y útiles ideas recogidas en su *Traité de géométrie superieure,* editado ya en 1852. Antes, en 1837, había publicado una obra muy citada y famosa, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie,* importante como aportación histórica. Hombre curioso e interesado por los documentos del pasado [9], dedicó también su atención a un objeto que ha sido tomado como el eslabón perdido entre la geometría de Euclides y la proyectiva, y al que, como antecedente de nuestra historia, me gustaría dedicar unas palabras: me refiero a los *porismas* de Euclides.

Ya es sabido que los tres libros que Euclides les dedicó se han perdido y que su referencia ha llegado a nosotros a través de Pappus (hacia 320 d.C.) y de un breve comentario de Proclo. No sabemos muy bien, pues, qué cosa eran pero, incluso etimológicamente, parece que deben de ser unas proposiciones que, dentro del concepto métrico reinante en la época, se presentan como "fisuras" no explicables, imposibles de asimilar ni incorporar totalmente al bloque de la geometría. Desde luego, ni Pappus ni cuantos en siglos posteriores han tratado de los porismas o han enunciado otros nuevos, les han dado ese sentido [10], pero es significativo observar que casi siempre pueden reducirse a proposiciones proyectivas y, lo que es aún más importante, no han podido entenderse ni estudiarse hasta que el método proyectivo no ha entrado en vigencia. Poncelet mismo se fija en que uno de los porismas, el reconstruído con el número XLI, y que se basa directamente en el lema de Pappus, contiene una relación de reciprocidad entre puntos y rectas análoga a la de las polares recíprocas.

Siguiendo a Pappus, los libros perdidos de Euclides contenían 171 teoremas que él clasifica en 29 géneros. Sólo el primero tiene un enunciado completo: "Si por dos puntos dados se trazan dos rectas que se cortan sobre otra recta dada en posición, y una de ellas intercepta sobre una recta dada un segmento, a partir del punto dado en ella, la otra formará también sobre otra recta un segmento que tenga con el primero una razón dada."

Para explicar los porismas Pappus enuncia 38 lemas, de los cuales el número 13 es el celebérrimo de la configuración que lleva su nombre y el 12 el de la misma configuración sobre dos rectas paralelas; en casi todos los restantes puede apreciarse también el carácter proyectivo que los informa. Uno de ellos, que condensa diez porismas de Euclides, hace presentir ya la configuración de Desargues [11].

La curiosidad que siempre despertaron los porismas y los esfuerzos que realizaron muchos geómetras para adivinar y reconstruir los enunciados originales sirvieron de poco: la concisión de Pappus al no dar las proposiciones completas y la índole de la materia, que se resistía a los métodos imperantes, hace muy poco fecunda la investigación y Halley, por ejemplo, después de haberse dedicado al estudio del enigma, ha de confesar paladinamente no haber comprendido nada.

El mayor éxito en el intento de desentrañar el misterio corresponde a Robert Simson (1687-1768), cuyos primeros ensayos fructuosos datan de 1720 y se refieren a la explicación de tres proposiciones de Pappus, dos de ellas las ya enunciadas aquí y la tercera, una generalización a **n** rectas de una de ellas, la [11]. El resultado final del trabajo de Simson se resume en diez porismas que corresponden a siete de los géneros de Pappus, dejando intactos los otros 22, y añadiendo: "I believe it will be extremely difficult for any body to restore them".

Pues bien, he aquí que nuestro Chasles se lanza a ello; bien es verdad que cuenta ya con unos métodos con los que estos enunciados pueden ser entendidos. Él mismo lo dice en la obra a ellos dedicada [12]: "Car il fallait donner d'abord aux trois théories du *rapport anharmonique,* des *divisions homographiques* et de *l'involution* les développements dont étaient susceptibles les germes que s'en trouvent dans les Lemmes de Pappus. C'est que j'ai cherché à faire dans le *Traité de Géométrie supérieure,* ouvrage dont ces théories mêmes forment les bases."

Chasles restaura los porismas enunciando 221 proposiciones que corresponden a los 29 géneros de Pappus. La mayoría de ellos, fieles al espíritu de la época en que nacieron, hacen referencia a relaciones métricas, casi siempre de razones dobles o de proporcionalidad de longitudes o áreas. Es en esta geometría donde se aprecian aquellas fisuras que presagian la posterior creación de un método y de una axiomatización que den forma a la geometría proyectiva. Muy bien lo percibe Chasles cuando dice en la presentación de su libro: "Tal vez no se verá sin asombro que la obra tan célebre de Euclides, de la que una oscuridad tan profunda ocultaba la forma, no menos que los puntos de contacto que podía tener con nuestros métodos actuales, encerraba precisamente los gérmenes de estos mismos métodos y varias de las proposiciones que forman sus aplicaciones más inmediatas y naturales". Y añade, siguiendo este pensamiento: "Esto explica, creo yo, cómo pareció siempre tan difícil, podría decir que casi imposible, hasta estos últimos tiempos dar una interpretación de gran parte de los enunciados de los porismas dejados por Pappus, puesto que la mayor parte de las proposiciones que satisfacen a estos enunciados se refieren a un género de relaciones que, salvo para los casos más simples, no habían entrado todavía en la geometría moderna y que en la antigua no se han reencontrado quizá más que en la obra perdida de Euclides."

"Chasles ha elaborado una ingeniosa reconstrucción de la obra de Euclides llevando a sus lógicas conclusiones los 38 porismas dados por Pappus", dice Coolidge [1], que se muestra sin embargo escéptico de esa labor, "deporte favorito", dice, para los geómetras. Piensa, no obstante, que Pappus y probablemente Euclides, que escribió 600 años antes, conocían la invariancia de la razón doble. Ello hace creer, como algunos han indicado, que la geometría proyectiva habría alcanzado antes su madurez de no haberse perdido los libros de los porismas.

Sea como fuere, Chasles decidió colgar en nuestra galería de retratos el de aquel primer antepasado cuyo rostro se desconocía y que ha querido reproducir, acaso convencionalmente, como casi siempre se hace, a partir de las descripciones incompletas que de él quedaban. Y ha logrado sobre todo llegar - podría decir Baudelaire - "al fondo de lo desconocido para encontrar lo nuevo."

3- La década prodigiosa.

Diez años transcurren entre la publicación del libro de Poncelet y el de Jacob Steiner (1796-1863) *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Desarrollo sistemático de la dependencia mutua de las figuras geométricas), de 1832. Durante ellos se produce la gran floración de métodos, analíticos y gráficos, que ilustran toda una época de la geometría y dejan a la proyectiva en situación de buscar su rigurosa fundamentación.

Hijo de un granjero suizo, analfabeto hasta sus catorce años, pestalozziano después e interesado por la importancia que esta escuela concedía a la formación de la intuición geométrica, llegó Steiner a ocupar hasta su jubilación una cátedra en la Universidad de Berlín; el apoyo de Jacobi parece que fue decisivo a la hora de vencer las resistencias que provocaba su muy personal preparación, aunque ciertamente había asistido a aquella universidad y a la de Heidelberg.

Consecuente con esa formación se apunta a los métodos sintéticos de la geometría, detestando los analíticos. Estos eran para él una pura herramienta que suplanta al pensamiento mientras que la geometría debe ser justamente acicate y estímulo de la imaginación y del pensamiento mismo.

En esta línea puso a contribución su fecundo ingenio que poseía el don de sacar consecuencias admirables de simples premisas elementales [13]. Sus ideas y descubrimientos se agolpaban en su mente tan rápidamente que apenas conseguía ordenarlos por escrito, y sus resultados enriquecieron la geometría con gran número de bellos y a menudo intrincados teoremas que todavía seguimos conservando y estudiando con su nombre.

Los elementos fundamentales, puntos, rectas y planos, con los que se construyen las demás figuras siguiendo unas vías muy definidas, se combinan entre sí mediante relaciones duales, volviendo sobre ese principio cuya potencia quiso mostrar, al tiempo que terciaba en la controversia que se había suscitado, dando la prioridad a Gergonne contra la teoría de las polares recíprocas de Poncelet.

El rasgo más característico de la obra de Steiner es precisamente el que adjetiva su título: "sistemático". Usa un método consistente y uniforme para el tratamiento de sus figuras y lo maneja maravillosamente [1]. Pasa de la perspectividad a la proyectividad, estableciéndola entre las formas proyectivas fundamentales, serie rectilínea y haces de rectas y planos, y utilizándola para la generación de figuras. Construye las cónicas por intersección de haces proyectivos, siguiendo la idea que ya había iniciado Chasles, y extiende el método a la obtención de otras figuras, cuádricas, superficies regladas o la cúbica alabeada.

Le quedan todavía algunas apoyaturas de tipo métrico, por ejemplo en la definición de razón doble, noción que contribuiría a esclarecer y que sólo con Staudt alcanzaría la independencia respecto de la geometría euclídea. Este último fue, como veremos, y en qué grado, el continuador de Steiner en la persecución de la "pureza" de la geometría frente a las técnicas que el álgebra proporcionaba. Ciertamente la elegancia formal de los resultados contrastaba con la pesadez de muchos de los cálculos en coordenadas, aunque también favoreciese cierto relajamiento del rigor en el razonamiento, reemplazado a veces por "principios" más o menos vagos introducidos sin demostración [8].

No obstante, el enorme prestigio de Steiner, considerado como el más grande geómetra de su época, equiparado a lo que Apolonio supuso en la antigüedad, hizo prevalecer su postura en Alemania, con menosprecio de la línea analítica que estaba dando una base sólida a la geometría con el empleo de coordenadas homogéneas. Su profunda aversión hacia esos métodos, que le llevó a amenazar con no publicar sus trabajos en el *Journal* de Crelle si seguían admitiendo los de Plücker, eliminó a éste, por cansancio y desánimo, durante más de quince años, desde 1847, del escenario geométrico de su país.

Bien puede decirse, en efecto, que Julius Plücker (1801-1868) no fue profeta en su tierra. Fue, sí, profesor de física y matemáticas en las universidades de Berlín y Halle y en la de Bonn desde 1837. Como físico experimental hizo una serie de descubrimientos en magnetismo de cristales, conducción eléctrica en gases y espectroscopía; pero aquí nos interesa su contribución a la geometría, contribución tan hoscamente recibida por Steiner.

Gentes eran aquellas, a lo que se ve, muy temperamentales y peleonas. El mismo Plücker, que había empezado con resultados de tipo sintético publicados en los *Annales* de Gergonne, en 1826, dicen que se pasó al campo analítico a raíz de una agria polémica mantenida con Poncelet, que le acusaba injustamente de plagio. Una primera labor emprendida en el nuevo campo, en el que se alzó como guía indiscutible, fue la de limpiar las farragosas expresiones y cálculos algebraicos que la geometría analítica venía arrastrando. La llamada "notación abreviada de Plücker", que puede ser compartida con otros, liberó de innecesarias complicaciones a razonamientos hechos con ecuaciones completas. Hoy parece una trivialidad decir que $C+\mu C' = 0$ es un haz de figuras del mismo tipo que C y C': si éstas son dos cónicas, por ejemplo, la ecuación representará a todas las cónicas que pasan por los puntos de intersección de ambas. Pero piénsese lo que sería trabajar con las ecuaciones generales.

Esta notación, además, equivale a que no sean únicamente los puntos los elementos básicos de la geometría, sino, como en el ejemplo anterior, otras figuras, rectas, circunferencias, cónicas, con las que se puede operar como con ellos y que constituyen los elementos de un espacio, los "Raumelemente"; lo cual conduce a generalizar el número de dimensiones, que dependerá del de parámetros necesarios para definir esos "elementos" [14]. De esta manera se entiende la geometría de las congruencias y complejos de rectas, o familias de dos o tres parámetros, que comenzó hacia 1830, precedidas por las uniparamétricas o superficies regladas. Las rectas están aquí consideradas no como conjuntos de puntos sino como objetos que dependen de cuatro parámetros. Y todavía, al introducir las *coordenadas plückerianas* de la recta que pasa por dos puntos como los menores de orden dos de la matriz cuyas filas son las coordenadas homogéneas de ambos puntos, y observar que esas seis coordenadas de la recta se relacionan por una ecuación cuadrática, aparecen las rectas del espacio tridimensional como los puntos de una cuádrica del espacio proyectivo de dimensión cinco, lo que permitirá después a Klein estudiar las familias de rectas en términos de "geometría sobre la cuádrica".

Se ocupó Plücker de estos problemas en los dos volúmenes de su *Analytisch-geometrische Entwicklungen,* publicados en 1828 y 1831, considerando las ecuaciones de las curvas algebraicas y sus ecuaciones tangenciales, cuyos grados son, respectivamente, el orden y la clase de la curva, y utilizando el número de puntos dobles y de retroceso y de tangentes dobles y de inflexión para obtener, además de las famosas fórmulas duales que llevan su nombre, un método de clasificación de las curvas algebraicas.

Pero estos dos volúmenes, así como la memoria *Über ein neues Coordinaten System,* de 1829, marcan sobre todo la introducción de las coordenadas proyectivas con que Plücker hizo posible y enriqueció el método analítico para el estudio del espacio proyectivo. No fue el único. Independientemente, y con algunas variaciones, Feuerbach, Möbius y algunos otros habían llegado también a definir coordenadas en el plano proyectivo, tomando siempre un triángulo de referencia y obteniendo para cada punto una terna de coordenadas y todas sus proporcionales.

Fijémonos, por ejemplo, en el más interesante desde nuestro punto de vista, el alemán Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868), profesor que era de astronomía, director del observatorio de Leipzig y cultivador al mismo tiempo de distintos campos de la matemática: justamente se ha hecho popular por la banda de su nombre, como ejemplo sencillo de superficie no orientable. En su obra *Der barycentrische Calcul* (1827) fija las coordenadas de un punto del plano respecto del triángulo de referencia elegido en él como los pesos que hay que asignar a cada vértice del triángulo para que el punto dado ocupe su centro de gravedad: estas *coordenadas baricéntricas,* que son efectivamente homogéneas ya que pesos proporcionales a los anteriores darían el mismo baricentro, resultan adecuadas para describir las propiedades proyectivas y afines del plano; o del espacio, si se hace en él una formulación semejante. Hoy las llamamos también *coordenadas afines* cuando elegimos como representante de la clase de ternas proporcionales que determina un punto aquélla cuya suma de las tres coordenadas es la unidad.

Möbius hace más: a él se debe el concepto fundamental de correspondencia biunívoca o transformación en el plano y en el espacio y, en particular, el de homografía o colineación, única que conserva las relaciones gráficas puesto que no altera la incidencia o pertenencia, y ve que no difiere de la relación establecida mediante proyecciones y secciones. Considera igualmente las correlaciones o reciprocidades como transformaciones entre elementos de naturaleza dual, por lo que en él se encuentra por primera vez la idea de proyectividad tal como hoy puede estudiarse, después de haber sido ampliamente extendida por Plücker.

Volvamos nuevamente a éste y a aquellos dos volúmenes en que nos habíamos detenido. Las coordenadas trilineales que Plücker introduce en el primero de ellos, el de 1828, son las distancias del punto a los tres lados del triángulo de referencia. Pero en el segundo abre ya la puerta a las coordenadas proyectivas: un punto tiene coordenadas **(x,y,t)**, no todas nulas, si **(x/t, y/t)** son sus coordenadas cartesianas cuando $t \neq 0$, mientras que las ternas de la forma **(x,y,0)** representan puntos del infinito. "¡Por fin los elementos del infinito de Kepler, de Desargues y de Poncelet se habían conseguido tratar dentro de un sistema de coordenadas que sólo utilizaba números usuales!" [6]. Una recta se escribirá ahora $ax+by+ct = 0$, y $t = 0$ será, pues, la ecuación de la recta del infinito. He aquí a punto el instrumental para el estudio analítico de la geometría proyectiva que hasta entonces se había enfocado sólo desde el punto de vista sintético puro.

Observemos, como Plücker, que una recta $ax+by+ct = 0$ queda caracterizada por la terna **(a,b,c)** de sus coeficientes o cualquier otra proporcional a ella. Podemos, pues, considerar a **(a,b,c)** como unas ciertas "coordenadas" de la recta. Si las fijo, la ecuación anterior me da todos los puntos **(x,y,t)** que pertenecen a esa recta. Pero si en esa ecuación fijo el punto **(x,y,t)** y dejo variables **(a,b,c)**, cada una de estas ternas me da una recta que pasa por el punto: es pues la ecuación del haz de rectas de vértice ese punto. Se acaba de descubrir, y con qué elegancia, la versión analítica del principio de dualidad por el que tanto habían batallado los geómetras puros: el intercambio dual de "punto" y "recta" se corresponde con el de "constantes" y "variables" en la ecuación, ecuación que, al comportarse de igual modo respecto de unas y de otras, garantiza el paso de cada forma a su dual. No es raro que Plücker, tal como habíamos apuntado, pasase de la recta al estudio de la curva bien como lugar engendrado por un punto móvil o bien como la envolvente de sus tangentes, según que la dé en coordenadas de puntos o en coordenadas tangenciales o de rectas.

Grandes han sido las contribuciones de Plücker, como las de sus compañeros, en el desarrollo analítico de la geometría proyectiva. Pero aquí llega otro alemán dispuesto a tomar el relevo de Steiner en pro, otra vez, de la geometría pura.

4. Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867)

Había nacido en Rothenburg sobre el Tauber (Baviera), estudió en la vecina Ansbach, licenciándose con medalla de honor y mostrando una particular preferencia por las matemáticas. Ello le hizo frecuentar durante varios semestres, a partir de 1817, la Universidad de Göttinga y trabar relación con Gauss que le demostró alta estima y ejerció una gran influencia sobre él. En 1822 se graduó en Erlangen, en cuya Universidad profesó desde 1835 hasta su muerte, después de haber pasado por Würzburg y Nürenberg.

Contrariamente a lo que cabe pensar de algunos de sus compañeros, fue un hombre sencillo y bondadoso, que trabajó en callado aislamiento, no diferente tal vez del de su contemporáneo Möbius; sus colegas le apreciaban por la nobleza de su carácter y por la claridad de su mente, pero poco se sabía de la altura de sus méritos científicos [15]. Y es que, además, su obra, seguramente la más importante y completa, superaba a su época en muchos aspectos, sobre todo en su tendencia a la aritmetización, hasta el punto de resultar más "moderna", y desde luego más rigurosa, uniforme y luminosa, que otras posteriores; y esto hacía que, como ocurre con los adelantados a su tiempo, tuviese en él escasa resonancia.

Staudt adquirió por el estudio de las obras de Poncelet, Möbius y Steiner, la convicción de la necesidad, por un lado, de introducir un mayor rigor en los fundamentos y métodos de la geometría pura y, por otro, de que la separación de las propiedades descriptivas o de posición y métricas o de magnitud, que ya Poncelet había señalado, debía hacerse más neta. Así lo dice en el prefacio de su *Geometrie der Lage:* "En los últimos tiempos se ha marcado la distinción entre la Geometría de la posición y la Geometría métrica y, sin embargo, corrientemente se suele demostrar apelando a razones y proporcionalidades, incluso proposiciones que no ponen en cuestión ninguna magnitud. En esta obra he buscado hacer de la Geometría de la posición una ciencia independiente a la que no es necesario aplicar el concepto de medida".

En efecto, mediante un trabajo admirable de ingenio y de paciencia, consigue ofrecer a la geometría pura una obra verdaderamente clásica, que reúne las investigaciones de sus predecesores y las suyas propias en una única dirección, la que apunta al fin que él se ha propuesto. Así nace *Die Geometrie der Lage* (Fr. Korn, Nüremberg, 1847), seguida de los *Beiträge zur Geometrie der Lage,* en tres fascículos publicados por la misma editorial en los años 1856, 57 y 60, respectivamente [16].

Veamos, siquiera simplificadamente, la novedad de su aportación. La definición de proyectividad según Poncelet, por la que dos figuras son proyectivas si puede pasarse de una a otra por un número finito de proyecciones y secciones, va seguida de su caracterización por tres pares de elementos homólogos: una proyectividad entre dos series rectilíneas, por ejemplo, quedaría determinada dando tres puntos de la primera y sus correspondientes en la segunda. Evidentemente hay muchas maneras de obtener combinaciones de proyecciones y secciones que transformen cada uno de los tres puntos dados en su correspondiente, por lo que habrá que demostrar que dos cualesquiera de ellas son equivalentes, esto es, que dado otro punto cualquiera de la primera recta, sus transformados por ambas composiciones de perspectividades coinciden. Lo que puede probarse haciendo uso del teorema de Pascal, y es equivalente a la invariancia de las razones dobles, cuestión, por otra parte, sujeta a la idea de medida.

La postura de Staudt es distinta: dos figuras son proyectivas si la relación establecida entre ellas conserva las razones armónicas, las cuales pueden obtenerse, ¡y esto ya desde Desargues!, por pura construcción gráfica, la del cuadrilátero completo. Es claro que esta "proyectividad según Staudt" es más general que la de Poncelet, ya que las proyecciones y secciones conservan las razones armónicas, y en cambio no queda asegurado que dos figuras proyectivas en el sentido de Staudt lo sean en el de Poncelet. Esto lo resuelve el *teorema fundamental de la proyectividad* que, brevemente, diría: si dos figuras con la misma base son proyectivas en el sentido de Staudt y hay tres elementos que coinciden con sus homólogos, todo elemento es homólogo de sí mismo.

Staudt lo demuestra dentro de las posibilidades de rigor de la época, teniendo en cuenta que aplica una idea de continuidad no suficientemente bien comprendida por entonces. El quiere llegar mediante cuaternas armónicas, a partir de tres puntos, a todos los puntos de la recta; son las llamadas "redes de Möbius". Así alcanza todos los puntos racionales pero el paso no riguroso al continuo deja el teorema realmente sin demostrar. Equivaldría a admitir que toda razón doble es límite, en un sentido aún no muy precisado, de una sucesión de razones armónicas. Esta deficiencia, que deja intacto el rigor del teorema para la geometría racional, no le quita, aun en la real, originalidad ni eficacia y posteriormente, como diremos, se llenará el hueco todavía no entrevisto.

Siguiendo la misma vía, las colineaciones y las correlaciones entre dos planos, que son correspondencias biunívocas que conservan la incidencia, son proyectivas porque transforman cuaternas armónicas en armónicas. E invierte el proceso de Poncelet que, partiendo de una cónica, definía la transformación entre polo y polar respecto de ella, para considerar ahora correlaciones involutivas y tomar el lugar de los puntos incidentes con su recta transformada, lo que le da justamente una cónica. Esta definición es autodual y conduce a los clásicos teoremas de dualidad, ya antes tratados, y al mismo tiempo es aplicable a tres o más dimensiones. Igualmente conoce en este sentido el problema de los sistemas nulos, atribuidos a Möbius.

Pero aparte de los nuevos conceptos introducidos y del método puramente proyectivo que emplea, es útil y sugestiva su lectura porque, a pesar de los años transcurridos, ha podido conservarse fresca merced a la visión con que el autor supo anticiparse a su momento histórico. La introducción, por ejemplo, de los elementos del infinito está hecha con tal claridad, incluso didáctica, que aún podría seguir explicándose con las mismas palabras y el mismo estilo [17].

Como se ha dicho, se razona siempre sobre entes geométricos sin que los cálculos desvíen la atención, ejercitando así la facultad de intuición geométrica del estudioso. No se encontrará una sola fórmula pero tampoco una sola figura: el lector deberá ejercitar su razón con toda generalidad, sin el recurso concreto de la representación gráfica o, en todo caso, deberá ser él quien la dibuje en los casos más difíciles de imaginar; la mayor fatiga redundará en favor de la concepción geométrica. "Es admirable el rigor que reina en esta obra", dirá Segre. La gran agudeza y precisión del lenguaje hacen imposible la ambigüedad; el estilo se distingue por su extraordinaria concisión, omitiéndose toda palabra que no sea absolutamente indispensable.

Se cuenta en este punto que, casi al final de su vida, se le pidió que en la siguiente reimpresión pusiera figuras, a lo que contestó que así sólo se mostraría al lector un caso especial mientras que él debería imaginar simultáneamente una serie de figuras distintas que respondieran a la misma proposición. Y también que ampliara las explicaciones para que fuera más facilmente inteligible a los estudiantes; él se mostró muy sorprendido de que se encontrase su obra difícil de entender pero se negó a cualquier cambio diciendo que la había modificado muchas veces haciéndola cada vez más concisa y no iba a emprender ahora el camino inverso. (Un año más tarde, en 1866, lo hizo Th. Reye, en un libro de igual título aunque diferente en varios puntos, pero que contribuyó a dar a conocer los métodos de Staudt). En cualquier caso, el libro de Staudt, a quien se comparó con Euclides, como a Steiner con Apolonio, permanecerá para siempre en los anaqueles de los clásicos.

Al final ya del mismo estimó conveniente introducir las expresiones: "par de elementos imaginarios", "cónica imaginaria", etc., para abreviar enunciados relativos a cónicas o cuádricas, pero no pudo hacer mayor uso de ellas ya que habría sido necesario tratar a los elementos imaginarios no como pares sino separando cada uno de su conjugado: un par de puntos imaginarios conjugados, por ejemplo, no eran otra cosa que los puntos dobles de una involución elíptica en la recta.

La búsqueda de su individualización fue el origen de los *Beiträge*, sin duda su obra más interesante. En ella define el punto imaginario como una involución elíptica más un sentido, idea ciertamente revolucionaria a la par que natural e ingeniosa; la misma involución con el sentido opuesto nos da el punto imaginario conjugado del anterior. Puede comprenderse el enorme progreso que recibe la geometría pura para la cual los elementos imaginarios no constituían hasta entonces verdaderos entes sino sólo una locución oportuna, cuando Staudt, definiéndolos geométricamente, completa con ellos la geometría de la posición, salvando por otra parte los defectos de rigor y demás inconvenientes en que incurrían los geómetras que antes de él trataron los imaginarios.

Mas, ironías del destino, esa perfecta construcción axiomática del espacio proyectivo con la que Staudt pretendía liberar a la geometría de la noción de número y de la métrica, le lleva justamente a la meta contraria. Porque demuestra que el conjunto de todos esos puntos, incluídos los imaginarios, es isomorfo al cuerpo de los números complejos, con lo que en realidad acaba probando la identidad de la geometría pura con la geometría analítica sobre el cuerpo complejo [18].

5. Formalización.

Este resultado transcendental, que sumerge a la geometría dentro de la matemática abstracta, planteará el problema de salvar su personalidad, pronto en crisis. Seguramente ni Staudt ni muchos geómetras posteriores se dieron cuenta de su importancia, pero su obra marca el final y la culminación de este gran periodo en la historia de la geometría sintética. Bien puede hablarse de la geometría proyectiva antes y después de Staudt. Ha quedado así elaborado un método geométrico completo y, durante cincuenta años, el trabajo de los geómetras consistirá principalmente en aplicarlo, en extender tales métodos a nuevos problemas, más que en encontrar métodos nuevos. Sus esfuerzos se dirigirán esencialmente hacia la revisión de sus principios y de su estructura.

El inglés Arthur Cayley (1821-1895) se dedicó a estudiar profundamente la geometría proyectiva con el empleo de coordenadas, consiguiendo ver que todas las propiedades métricas pueden obtenerse como casos particulares de propiedades proyectivas dando entrada a los puntos cíclicos o al absoluto del espacio. Más aún, según le comunicaba Klein en 1871, no sólo la geometría euclidea ordinaria sino también las no euclídeas podrían ser subordinadas de manera análoga a la geometría proyectiva. Lo que permitió a Cayley enunciar su conocido - y hoy exagerado - aforismo: "La geometría descriptiva es toda la geometría" (usando en él el apelativo transmitido ya desde Monge y que luego hemos adaptado siempre diciendo "proyectiva" en lugar de "descriptiva", para evitar confusiones).

Acaso una excepción en la búsqueda de nuevos métodos y de una organización de los resultados sea la que concierne a las transformaciones geométricas, que ya venían desde la proyección central y homología de Poncelet, la transformación proyectiva de Chasles y también la cuadrática de Steiner y, sobre todo, las transformaciones biunívocas de Möbius que apuntan ya la noción de invariante y hasta, quizá, la de grupo de transformaciones. Cayley, haciendo pareja con Sylvester, profundiza en la teoría de invariantes y Félix Klein (1849-1925), que había sido ayudante de Plücker en la Universidad de Bonn, tras el regreso de éste a la geometría, lo hace en la clasificación de las geometrías por los grupos de transformaciones: cada geometría es así la teoría de los invariantes de un cierto grupo; en nuestro caso, del proyectivo. Ahí queda resumido el célebre "programa de Erlangen". Y nuestro camino conduce ya sin interrupción hacia un panorama ya previsto: la geometría de variedades algebraicas en un espacio proyectivo. En una palabra, la geometría algebraica, de la que la proyectiva es el primer capítulo.

Atrás queda, pues, ese hermoso edificio que le da acomodo y que ha nacido y ha culminado en su trayectoria durante el transcurso del siglo XIX, siglo de oro de la geometría. Durante él se ha sometido a revisión profunda el concepto de espacio y se ha hecho de sus temas uno de los centros de mayor interés de la investigación matemática. La geometría proyectiva, en concreto, añade a su íntima conexión con las geometrías no euclideas y con el álgebra, su efecto aclaratorio sobre la geometría en su conjunto y, de un modo muy singular, su indiscutible encanto estético.

Sus métodos han sido elaborados en toda la primera mitad de la centuria y han ido entretejiendo, desde los puramente geométricos de Poncelet, Chasles, Steiner y Staudt, hasta los analíticos de Möbius, Plücker y luego Cayley y otros, todo un entramado que se hace preciso fundamentar y formalizar. Ha llegado el momento de la axiomatización.

Comienza con la aparición del libro de Moritz Pasch (1843-1930) [19], en un momento que coincide con la época de fundamentación de toda la matemática. Responde, pues, a una razón básica y profunda que fue la crisis del concepto de espacio. Pasch persigue la construcción del espacio proyectivo definiendo las proyectividades en el sentido de Poncelet; pero, al serle necesaria la configuración de Pappus, a la hora de demostrar para ellas el teorema fundamental, se ve en la precisión de construir previamente el espacio euclídeo. Parte para ello de unos elementos primitivos, no definibles, puntos, rectas y planos, y de unas propiedades fundamentales dadas por los axiomas; unos y otros inspirados en el espacio intuitivo. Entre los axiomas, por primera vez, hace hincapié en la ordenación de puntos de una recta que hasta entonces se había usado prácticamente de modo implícito. Pero como los axiomas de incidencia y orden no resultan suficientes para llenar la laguna que habíamos señalado en la demostración de Staudt y el punto de vista que adopta le impide aceptar como axioma la idea de continuidad en la rerie rectilínea, se ve obligado a construir a través de diez axiomas el concepto de congruencia, del cual resultará dependiente la geometría. Esto hace a su geometría subsidiaria de la métrica, cosa a la que Staudt se oponía por ser las nociones de incidencia los únicos invariantes proyectivos esenciales.

Por el contrario Klein, tras observar que Staudt, como también Pasch, desarrolla su geometría sin hacer uso de modo sustancial del postulado de paralelismo, ve como este último el vacío que quedaba en la fundamentación de la proyectividad y lo llena no con la congruencia, sino con un axioma de continuidad formulado ya con rigor.

La axiomática de Hilbert (1862-1943) [20] se refiere al espacio euclídeo, no al espacio proyectivo precisamente, pero es la axiomatización fundamental que, además, define el concepto moderno de espacio y, por consiguiente, de toda la geometría. Sus axiomas son los de incidencia, ordenación, congruencia, paralelismo y continuidad y expresan proposiciones arbitrarias que definen implícitamente los conceptos primitivos, abstractos, pues, y no tomados del espacio intuitivo. La incidencia y el paralelismo permiten definir la adición y multiplicación de puntos de una recta, viéndose que para esas operaciones forman un cuerpo. La conmutatividad de éste es equivalente al lema de Pappus y para demostrarlo no bastan la incidencia, ordenación y paralelismo sino que se necesita además o bien la continuidad o bien la congruencia: puede verse así la relación entre esta axiomática y las de Pasch y Klein. La aplicación de la axiomática de Hilbert a los espacios proyectivos es obra de Hessenberg (1874-1925) [21], que es el primero que opera sin postulados de ordenación, en un sentido en que luego trabajaron Veblen y Young.

Otros autores, Peano, Schur, Veronese, ... implantan distintas axiomáticas y también se ensayan nuevas direcciones en la formalización de la geometría proyectiva. No se pretende en ellas obtener ninguna propiedad nueva sino proporcionar a la geometría un apoyo más sólido. La amplitud de la obra no iba a permitir allanar rápidamente todas las dificultades y habrá que esperar al siglo XX para que este esfuerzo de axiomatización pueda desarrollarse con provecho [5]. Con esto, pues, no sólo nos hemos salido del marco de nuestro estudio sino que tampoco añadiríamos nada, salvo alguna alusión, al majestuoso monumento erguido en su totalidad en el pasado siglo y que conocemos por *geometría proyectiva*.

6. Particella para español solista

Y los españoles, ¿por dónde andábamos durante estos afanes? Dice Rey Pastor que cincuenta años por detrás. Y lo dice con amargura, cuando estaba en un momento en el que, a pesar de todo, algo se empezaba a ver de lo que se hacía fuera, cosa que no había ocurrido en los dos o tres últimos siglos. Cuando él irrumpe en la vida científica ha habido unos pocos maestros que, con gran visión, han entendido la necesidad de conectar con la ciencia europea y él no duda en reconocerles, pese a la aparente modestia de sus resultados, el mérito ingente de preparar el terreno para las nuevas generaciones. "A fines del siglo XIX - dice, y lo citamos mucho, en la contestación al discurso de ingreso en nuestra Academia de su discípulo San Juan - damos un salto de gigante con la introducción de Staudt, más estudiado aquí que en Alemania; pero la geometría se enderezó por el rumbo analítico y tanto Cremona como Torroja y quienes lo seguíamos quedamos una vez más fuera del cauce".

Sin embargo, cuán grande es su devoción por la labor del maestro: "Torroja abrió más amplia brecha en la muralla de nuestro aislamiento matemático, e importó de lejanas tierras la Geometría de la posición de Staudt. Para quienes conozcan la geometría proyectiva y hayan admirado la sencillez de sus principios y la uniformidad de sus métodos, pudiera parecer fácil empresa la de haber importado los elementos de esta disciplina, y hasta se extrañarán de que tal suceso no haya acontecido antes. Mas no opinarán así quienes conozcan las dificultades de la obra alemana, la abstracción suma de sus conceptos, su concisa relación, de penosa inteligencia, no facilitada siquiera gráficamente, puesto que carece de figuras. Sólo aquéllos que hayan estudiado la Geometría de la posición en la fuente original misma, aun años después de haberla aprendido en las obras de Torroja, pueden valorar justamente la labor del geómetra español, formado solo, sin precursores ni maestros, (...) cumbre solitaria en medio de la llanura." [22]

Don Eduardo Torroja y Caballé (1847-1918) fue uno de aquellos maestros que, como Echegaray o Galdeano, se propuso actualizar la matemática española, no tanto por su contribución original como por la presentación a sus discípulos del panorama exterior que podían percibir. Él tomó un momento histórico del desarrollo de la geometría proyectiva, el protagonizado por Staudt, y formó toda una escuela de geómetras que lo estudiaron con pasión. Acaso se centraron monográficamente en ese momento, pero cuántos de nosotros habremos recibido todavía el influjo benéfico de lo que aquellos hombres expandieron.

El propio Rey Pastor fue uno de los que participaron de aquel fervor y en 1909 leyó su tesis doctoral *Correspondencia de figuras elementales con aplicación al estudio de las figuras que engendran* [23]. Su argumento es la generalización de las proyectividades a las correspondencias **(n,m)** y su único instrumento, el principio de correspondencia de Chasles; lo mismo que se obtienen las cónicas por intersecciones de haces proyectivos, él obtiene curvas de orden $\mathbf{n+m}$ a partir de dos haces entre los que se establece una correspondencia proyectiva **(n,m)**, lo que equivale a aplicar a figuras algebraicas de grado mayor que dos la bien conocida teoría geométrica de las cónicas, esto es, a generalizar la geometría proyectiva cuadrática al estudio sintético de la geometría algebraica. Y bien que sintético, sin consideraciones analíticas, sin fórmulas ni ecuaciones en toda la obra. Mas advierte que ha comprobado también analíticamente todos sus resultados y hasta incluye en un apéndice algunas de esas comprobaciones por parecerle fundamentales o por revelar nuevas propiedades a través del cálculo. Esta tesis resulta, pues, paradigmática de la geometría que Torroja nos trajo. Todavía sigue Rey, con sus estancias en Alemania, ocupándose de estos problemas, antes de que su interés derivase hacia el análisis [24].

Pero hay en aquel tiempo otro personaje del cual quería hablarles y que presenta un aspecto distinto, aunque complementario, de los maestros que cita Rey Pastor. Es también geómetra, entre otras cosas, y afiliado igualmente a la versión pura, que había estudiado en Alemania; pero no fue un maestro: al menos no parece que hubiera trascendido su labor a una escuela o grupo. Sí trascendió en cambio al exterior y es el único que envía y publica trabajos en los *Mathematische Annalen.* Su repercusión fue, pues, mínima en la matemática española pero grande, en lo que cabe, para la imagen que ésta pudiera presentar hacia fuera. Su nombre es don Ventura Reyes y Prosper (1863-1922).

Había nacido en Castuera (Badajoz) y era doctor en Ciencias Naturales. En menos de dos años, a partir de 1891, obtuvo una cátedra de esta disciplina en el Instituto de Teruel, a continuación la de Matemáticas de Albacete y después las de Física y Química de Jaén y de Cuenca. Más tarde pasó a la cátedra de Matemáticas de Toledo donde falleció siendo director de su Instituto. Y parece que, en efecto, también su interés y su curiosidad se diversifica en más de una dirección: lo mismo hace una catalogación de aves exóticas o le dedican una especie nueva de moluscos terrestres en Filipinas que pasa por experto en arqueología y arte en su Toledo de residencia. Las pocas noticias que de él he podido conseguir me lo hacen aparecer como hombre grave, quizá oscuro, sencillo, abstraído, descuidado en el vestir, la personificación del sabio distraído, seguramente [25]. Pero, al mismo tiempo, de vigorosa personalidad y extensa cultura, conocedor de varios idiomas, de fina simpatía personal y de ningún modo negado al trato y a la relación: colabora en distintas revistas y organizaciones españolas y mantenía contacto amistoso con eminentes matemáticos alemanes, como Klein o Pasch.

Dejo para el final este punto, que es el que verdaderamente atañe a nuestro tema. Pero es que no quiero pasar por alto, siquiera brevemente, algunos otros asuntos que merecieron su atención aun en el terreno estrictamente matemático. Entre 1891 y 93 escribe siete pequeños artículos sobre lógica en *El Progreso Matemático,* aquella revista zaragozana, la primera revista matemática que se edita en España, debida al entusiasmo y a la generosidad de don Zoel García de Galdeano. Artículos seguramente divulgativos, aunque polémicos a veces, que lo sitúan en primer lugar como introductor en España de la lógica post-booleana y le acreditan como perfectamente conocedor de la misma, a la vez que corresponsal también de los lógicos más en boga, como Peirce, Peano o Schröder [26].

Pero sin duda fue la geometría su dedicación primordial. Sobre geometrías no euclídeas publicó un artículo en la Universidad de Kazan y fue también muy apreciada su resolución de un problema de Steiner. Su interés es plural. Yo he visto la ilusión con que describe, en una recensión [27] sobre un libro de papiroflexia geométrica, los ejercicios que, siguiendo sus instrucciones, hace con el papel: "... puedo asegurar que adquiriendo práctica, en poco tiempo la perfección del trabajo es tal que maravilla, y el resultado es asombroso por su exactitud."

Las notas aludidas, publicadas en *Mathematische Annalen*, son muy breves, dos páginas cada una si se suprime una figura, y responden a una preocupación muy sentida en los casos en que se está procediendo a la sistematización de una teoría: la de simplificar las demostraciones y de sentar los resultados con el menor número de hipótesis o condiciones. Es muy curiosa una de ellas, la segunda [28], porque adopta una forma de vieja tradición en la matemática: la comunicación epistolar de las investigaciones hechas por los corresponsales.

Constituye ésta el extracto de una carta dirigida a Pasch, de la que, probablemente éste, publica la parte científica. Se trata de la demostración, extremadamente sencilla y elegante, de un teorema que diría: Si las rectas α, β, γ, α', β',γ' pertenecen a una misma radiación de vértice un punto propio y los planos $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ y $\gamma\gamma'$ se cortan en una recta, las intersecciones de los planos $\beta\gamma$ y $\beta'\gamma'$, $\gamma\alpha$ y $\gamma'\alpha'$, $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$ son rectas coplanarias. Es, pues, el teorema de Desargues aplicado a triedros homológicos del mismo vértice, pero Reyes lo hace sin recurrir al de los triángulos por medio de la sección de la radiación por un plano y, por tanto, sin servirse de puntos y rectas impropios. Pasch le contesta por el mismo procedimiento [29], con el extracto de una carta en la que se refiere a las consideraciones por las que usaba la recta y el plano del infinito en [19] y a la simplifiación que supone el ejemplo de Reyes que, a su vez, comenta. Se ha afirmado [30] que sin esa demostración no habría podido desarrollar Schur la teoría de elementos ideales o impropios, iniciada por Klein, trabajosamente elaborada por Pasch y - termina Rey Pastor - "perfeccionada por Reyes y Prosper".

El otro trabajo [31] es realmente ingenioso. Se trata de demostrar, en relación con el teorema fundamental de Staudt, que el cuarto punto de una cuaterna armónica depende exclusivamente de los otros tres, independientemente de toda hipótesis sobre la teoría de las paralelas, como había probado ya Klein. La demostración de éste se basa en la bien conocida construcción de la cuaterna armónica mediante el cuadrilátero completo: si dos de estos cuadriláteros determinan los tres puntos dados, determinan también el cuarto. Para ello se comprueba que ambos cuadriláteros son homológicos, de lo que se sigue el resultado. El problema se plantea, en geometría sintética, cuando el centro de esa homología cae fuera del espacio que podemos contemplar o dibujar: se hace preciso entonces recurrir a otro cuadrilátero auxiliar, homológico con los otros dos y con los centros de homología a distancia observable; si tampoco éste resuelve la cuestión, se toma un cuarto, y así sucesivamente. La simplificación, ciertamente bella, de Reyes consiste en ver que, además de la homología natural entre los dos primeros cuadriláteros, se puede, si el centro cae fuera, encontrar una segunda homología, con centro practicable, que prueba igualmente la unicidad del cuarto punto. Esta nota, de sencilla lectura, creo que puede hacer las delicias de cualquier aficionado a la geometría pura.

Y a esto se reduce nuestra contribución a la ciencia universal: un autor y dos breves notas suyas. ¿Que es poca cosa? Con hermosa modestia él ya lo presume: "Je crois que les propriétés graphiques...", "Je crois qu'on peut simplifier...", inicia sencillamente una y otra. Convengamos, sin embargo, en que al menos se manifiesta buen conocedor de la matemática que entonces se está haciendo hasta el punto de incidir positivamente en ella, por pequeña y retardada que esa incidencia pueda acaso parecer. Y ello desde un panorama desolador: es el único matemático español anterior a nuestro siglo que se ha permitido tal cosa. Y lo ha hecho además en soledad. Sus contemporáneos realizaron la labor, entonces gigantesca, de acercar a sus discípulos la ciencia europea, de introducir y enseñar las teorías que ésta creaba para que fructificasen en una producción original que ellos no pudieron acometer. Un espíritu acerbamente crítico, como Rey Pastor, no duda en calificarlos de geniales, precisamente porque lo que es normal afuera es excepcional aquí dentro, y sus obras no serían juzgadas en su justo valor desligadas de su propio ambiente y puestas en parangón con las producciones europeas. ¿Qué decir entonces de quien en ese desierto ha sabido, solitario y aislado, cultivar una humilde flor y presentarla a concurso sin desmerecimiento alguno?. Cuando esto lo hacía en aquel Madrid tan poco propicio desde el que Reyes enviaba sus resultados, ¿nos imaginamos lo que podría haber hecho este hombre si, en vez de acogerse a un pobre instituto provinciano, hubiera sido trasplantado, pongamos por caso, a Göttinga?.

Por eso me he sentido, no sólo justificado, sino en la obligación de presentar aquí su figura, de destacar esos pocos compases, una piececita, casi inaudible, intercalada en la grandiosa sinfonía que llamamos geometría proyectiva, y señalársela a ustedes para que no pase inadvertida y puedan en ella reconocer las débiles notas de una pequeña melodía española.

BIBLIOGRAFIA Y NOTAS

[1] J.L. COOLIDGE: "The rise and fall of projective geometry", *Am. Math. Monthly, 41* (1934), 217-228.

[2] J.J. ETAYO: "Los caminos de la geometría", *Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII*, R. Acad. de Ciencias., Madrid (1988), 11-29.

[3] M. KLINE: "Geometría proyectiva", *Matemáticas en el mundo moderno,* Ed. Blume, Madrid (1974), 137-143.

[4] Su nombre completo es Lazare Nicolas Marguerite. No debe confundírsele, como a veces ocurre, con su hijo Nicolás Léonard Sadi (1796-1832), famoso por sus estudios de termodinámica que podríamos representar e ilustrar por el llamado "ciclo de Carnot", ni a éste con otro Sadi Carnot (1837-1894), sobrino suyo y, por consiguiente, nieto de Lázaro, que fue Presidente de la República desde 1887 hasta su muerte.

[5] J.P.COLLETTE: *Historia de las matemáticas,* Siglo XXI de España Ed., Madrid, 1985.

[6] C.B. BOYER: *Historia de la matemática*, Alianza Ed., Madrid, 1986.

[7] H. SCHUBERT: *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1879.

[8] J. DIEUDONNÉ: *Cours de géométrie algébrique,* Presses Univ. de France, 1974.

[9] Se cuenta el escándalo que produjo la clamorosa estafa de que le hizo objeto un tal Vrain Lucas vendiéndole, como verdaderas, cartas que había confeccionado y que, según él, procedían del archivo de la familia Boisjourdain, emigrada a América en los días de la Revolución. El 8 de julio de 1867 asombraba Chasles a sus colegas anunciando que Pascal había sugerido a Newton las leyes de la gravitación universal. Ni las bromas ni la

consideración de que, a la muerte de Pascal, Newton tenía sólo doce años le disuadieron de la creencia en la autenticidad de una carta en latín que Pascal escribía a Newton: "Mi joven amigo: Me he enterado del cuidado con que os estais iniciando en las ciencias matemáticas y geométricas y os envío diversos problemas que fueron en otro tiempo objeto de mis preocupaciones tocando a las leyes de atracción a fin de que ejerzais vuestro genio". Cuando Lucas fue detenido se le encontraron cinco mil documentos prestos a ser vendidos a Chasles que para entonces ya le había comprado cartas de Arquímedes a Nerón, de Pitágoras a Safo, de Julio Cesar a Vercingetorix y hasta de María Magdalena a su resucitado hermano Lázaro, escrita, eso sí, en francés antiguo al que había sido traducida por Rabelais [*Historia y Vida,* nº 101, 1976]. Recuerda a aquel trapisondista personaje de Muñoz Seca que vendía a los turistas las cosas más inverosímiles, desde un mechón de pelos de Wifredo el Velloso hasta el lebrillo en el que Pilatos se había lavado las manos.

[10] Según Pappus, los antiguos distinguen entre teoremas o proposiciones en las que se pide *demostrar* lo que está propuesto, *construir* lo propuesto o *encontrar* lo que se ha propuesto, y estos últimos son los porismas. Pero los geómetras de ese tiempo, dice él, no pudieron encontrarlo todo y se contentaron con probar que la cosa existe, sin determinarla, dando así una nueva definición de porisma: lo que constituye el porisma es lo que le falta a la hipótesis de un teorema local. En la época de Chasles se da esta definición: porismas son teoremas no completos que expresan ciertas relaciones entre cosas variables siguiendo una ley común.

[11] Así dice Pappus: "Dadas cuatro rectas que se cortan dos a dos, si tres de los puntos de intersección situados sobre una de ellas, o dos solamente en el caso de paralelismo, son dados, y dos de los otros tres están sujetos a permanecer cada uno sobre una recta dada, el otro estará situado también sobre una recta dada en posición". Chasles da dos versiones más "modernas" de esta proposición: "Dadas cuatro rectas, tres de las cuales giran alrededor de sus puntos de intersección con la cuarta, de modo que dos de los puntos de intersección de estas rectas se deslizan sobre otras dos rectas dadas en posición, el punto de intersección restante describe una nueva recta". O todavía: "Si se deforma un triángulo haciendo girar sus tres lados alrededor de tres puntos fijos alineados, y haciendo deslizar dos de los vértices sobre dos rectas fijas arbitrarias, el tercer vértice describe una tercera recta". Para llegar a Desargues sólo falta añadir que esta tercera recta es concurrente con las otras dos.

[12] M. CHASLES: *Les trois livres de Porismes d'Euclide,* Paris, 1860.

[13] F. ENRIQUES: *Lecciones de geometría proyectiva* (traducción de T.R. Bachiller), Madrid, 1946.

[14] D.J. STRUIK: *A concise history of mathematics,* Dover Publ., New York, 1948.

[15] C. Segre lo retrata así: "Un uomo pieno di bontá e di modestia, esempio di costumi semplici e di severa virtú, amante de la solitudine, ma giovale in compagnia,

scrupulosissimo nell'adempimento dei suoi doveri, coscienzoso in tutto, ed occupato specialmente dai pensieri della famiglia, delle ricerche scientifiche e dell'insegnamento."

[16] La edición que hemos utilizado es una buena traducción italiana de M. Pieri, *Geometria di Posizione,* Fr. Bocca Ed., Torino, 1889. Contiene los 25 capítulos más el apéndice de *Die Geometrie der Lage* y los seis primeros, dos de ellos incompletos, de los *Beiträge zur Geometrie der Lage,* bajo el título de *Aggiunte alla Geometria di Posizione.* Busca así desarrollar más extensamente algunos argumentos del primer libro, siguiendo el mismo diseño, pero esto le ha llevado a suprimir en ellos la parte que desde nuestra mirada actual resulta más sugestiva: la separación de los puntos imaginarios por cada uno de los dos sentidos de la forma geométrica. El libro va acompañado de un amplio estudio sobre la vida y obra de von Staudt debido a la pluma del eminente geómetra Corrado Segre. De él hemos sacado la precedente nota [15] y algunos comentarios esparcidos en nuestro texto.

[17] Observa que, en muchos casos, un punto puede ser sustituído por una dirección, o clase de rectas paralelas entre sí, y llamará a esa dirección *punto del infinito;* y una recta, por una "estesitura" o clase planos paralelos entre sí, que se llamará *recta del infinito.* Así, dos rectas de un mismo plano tienen común un punto o una dirección, etc. Este modo de ver, contrapuesto al ordinario, permite que "vengan recogidas en un solo enunciado proposiciones totalmente distintas en apariencia y son eliminadas las excepciones que de otro modo impedirían establecer leyes generales. La proposición de que una recta está determinada por dos puntos comprende en sí dos casos especiales, pudiendo ser uno de los puntos, o ambos, del infinito. Vale decir, una recta propia está también determinada por un punto y una dirección o por la estesitura de dos direcciones." Quede esto como una pequeña muestra de su estilo.

[18] P. ABELLANAS: *Unas reflexiones sobre la biografía de la Matemática,* Discurso de apertura del curso académico 1979-80, Univ. Complutense, Madrid, 1979.

[19] M. PASCH: *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Leipzig, 1882. Hay una traducción española de J. Alvarez Ude y J. Rey Pastor, *Lecciones de geometría moderna*, Madrid, 1913.

[20] D. HILBERT: *Grundlagen der Geometrie,* B.G. Teubner, Leipzig, 1899. Hay una traducción española con el título *Fundamentos de la Geometría*, publicada por el Inst. "Jorge Juan", C.S.I.C., Madrid.

[21] G. HESSENBERG: *Grundlagen der Geometrie,* Schwan, Leipzig, 1930.

[22] J. REY PASTOR: Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1920.

[23] Con este título, algo distinto pero equivalente al original, fue publicada en 1910. Al conmemorarse en 1988 el centenario de su fallecimiento, la Facultad de Matemáticas proyectó, entre los homenajes que se le rindieron, la

publicación en facsimil de la tesis escrita de su propia mano y felizmente encontrada por don Sixto Ríos en la biblioteca del antiguo Instituto "Jorge Juan". El autor de estas líneas, a quien se pidió para ella un pequeño estudio introductorio, tiene noticias de que próximamente aparecerá editada.

[24] Aparte de artículos enviados a revistas y de su discurso [22], señalemos dos libros:

J. REY PASTOR: *Teoría geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoría,* Memorias de la R. Acad. de Ciencias, serie 2ª, vol. VIII (1929). Es un trabajo premiado por la Academia en el concurso de 1912 y que aparece también con el título: *Estudio geométrico de la polaridad en figuras planas y radiadas de orden superior al segundo.*

J. REY PASTOR: *Fundamentos de la geometría proyectiva superior,* Junta para Ampliación de Estudios, Madrid, 1916.

[25] Tenía un hermano, Eduardo, también naturalista, profesor de Botánica, que debía de resultar su contrapunto. Era de gran fuerza física y belicoso carácter; aficionado a la esgrima, que practicaba en un centro militar. Murió de una septicemia provocada por la herida que le produjo un pisotón, seguramente accidental - al parecer, pies blancos sí ofenden -, que le llevó a anunciar su fin con un rasgo de humor feroz y bárbaro: "¡Muero como una cucaracha, pisado por una señorita!".

[26] Con anotaciones para cada uno de ellos han sido reproducidos por J.A. del Val en el vol. 3 (1973) de la revista *Teorema.* No he tenido aún ocasión de acceder a ellos y me he limitado a la recensión que de esa publicación se hace en *Mathematical Reviews, 50* (1975), ≠ 9519.

[27] *Gaceta de Matemáticas Elementales,* vol. I. nº 7 (1903).

[28] V. REYES Y PROSPER: "Sur les propriétés graphiques des figures centriques", *Math. Ann., 32* (1888), 157-158.

[29] M. PASCH: "Ueber die uneigentlichen Geraden und Ebenen", *Math. Ann., 32* (1888), 159-160.

[30] R. SAN JUAN: "Julio Rey Pastor: su vida y su obra vista por un discípulo", *Rev. Mat. Hisp.-Amer., 22* (1962), 60-93.

[31] V. REYES Y PROSPER: "Sur la géométrie non-Euclidienne", *Math. Ann., 29* (1887), 154-156.