ORIGENES DE LA GEOMETRIA
NO EUCLIDIANA:
SACCHERI, LAMBERT Y TAURINUS

ALBERTO DOU

Académico Numerario

0. Introducción

0.1. Durante el siglo XIX, a partir de los años 1825 y 1826, los matemáticos János Bolyai y Nikolai Lobachevski dan a conocer públicamente los primeros descubrimientos de la primera geometría no euclídea. Ambos publican independientemente y casi simultáneamente sendos tratados, Lobachevski en 1829 y Bolyai en 1832, que hacen patente que cada uno ha descubierto la misma primera geometría no euclídea. Esta geometría, que Lobachevski llama imaginaria (1840, n. 22) y Bolyai llama S (1832, §15) en oposición a la geometría euclídea que llama Σ, es la geometría que se obtiene de la de Euclides, o sea de los *Elementos* de Euclides, cuando, en vez de asumir el quinto postulado o postulado de Euclides, se asume precisamente su negación.

La emergencia de esta geometría en el siglo XIX, después de haberse creído unánimemente por todos los geómetras durante más de dos milenios que la única geometría posible era la de los *Elementos*, supone la contribución importante de muchos precursores. El primero, que dió con el método que lógicamente tenía que conducir y de hecho condujo al descubrimiento de la nueva Geometría, fue Saccheri (1667–1733). Siguieron con el mismo método Lambert (1728–1777), Gauss (1777–1855), Wachter (1792–1817), Schweikart (1780-1859), Taurinus (1794-1874), J. Bolyai (1802-1860) y Lobachevski (1793-1856). Hubo otros que también se ocuparon de la teoría de las paralelas como Thibaut y Legendre, pero recayendo en los métodos antiguos de pseudodemostraciones y sus resultados terminaron en línea muerta.[1]

[1]Véanse los comentarios de Stäckel, 1895, pp. 211sgs. reproducidos en parte en Dou 1970; y los de Kárteszi, 1987, pp. 19sgs.

En este artículo vamos a estudiar y exponer las contribuciones más importantes de los tres precursores Saccheri, Lambert y Taurinus. Saccheri creó un método válido y publicó en 1733 el primer tratado de geometría, que contiene muchos y difíciles teoremas de las dos primeras geometrías no euclídeas, la del ángulo obtuso y la del ángulo agudo (que es la misma que descubrieron Lobachevski y Bolyai un siglo más tarde). Saccheri demostró rigurosamente sus teoremas, pero nunca creyó que su nueva geometría estuviera exenta de contradicción.

Lambert aportó importantes contribuciones a las geometrías de Saccheri, pero igual que éste parece que nunca creyó que estuvieran exentas de contradicción, pero quizás fue el primero que sospechó seriamente que la geometría del ángulo agudo podía ser verdadera. El caso de Taurinus es todavía más sorprendente como veremos.

Consiguientemente, dividiremos este trabajo en tres partes, dedicadas respectivamente a Saccheri, Lambert y Taurinus. Nos alargaremos algo más en la exposición de Saccheri, sobre todo por haber sido el iniciador del método que condujo a la creación de las geometrías no euclídeas.

0.2. Antes de entrar en la exposición histórica, daremos en términos modernos un marco de referencia que permita hacer más precisa y más fácilmente comprensible una exposición de las contribuciones de los tres geómetras.

Para su estudio es suficiente que nos restrinjamos a la geometría plana. Entendemos por plano un agregado de entidades primitivas que llamaremos puntos y rectas, entre los que postularemos la existencia de unas relaciones que definiremos mediante axiomas. Naturalmente, dos planos y sus correspondientes geometrías son distintos sólo y cuando los dos sistemas de axiomas que los definen no sean equivalentes.

En los *Elementos* de Euclides se supone que una figura, basta un triángulo, se puede mover en su plano *isométricamente*, es decir de modo que durante su movimiento las longitudes de los lados y los valores de los ángulos se conservan; ello implica la existencia de unos axiomas de congruencia. A las geometrías, en las que las figuras gocen de esta propiedad, las llamaremos *elementales*, tanto por su referencia a los *Elementos* como por su carácter más intuitivo.

También se supone que la recta es continua o sea que el conjunto de puntos de una recta y su orden es el del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales; de modo que se suponen (implícitamente) el postulado de continuidad y unos postulados de orden. A las geometrías en las que los segmentos de la recta sean isomorfos a los de $\mathbb{R}$ las llamaremos *reales*.

En consecuencia, podemos restringirnos a la consideración de las geometrías planas, elementales y reales. Más concretamente, de las geometrías modernas las únicas que se necesitan para nuestro estudio son la *euclidiana*, la *hiperbólica* y la *elíptica*, según la terminología introducida por Klein.

La geometría euclidiana plana es la geometría ordinaria que se estudia en el bachillerato. Su axiomatización fue llevada a cabo por Hilbert (1899) mediante cinco grupos de axiomas: de incidencia, de orden o de intermediedad, de continuidad, de congruencia y el famoso postulado de paralelismo de Euclides, o quinto postulado que establece que en el plano por un punto A, no contenida en una recta r, pasa a los sumo una recta paralela a la recta r. Obsérvese que los postulados de congruencia, juntamente con los de orden, implican la longitud infinita de la recta. Al quinto postulado de Euclides lo llamaremos postulado Q. Y a los postulados que establezcan la no existencia de paralelas, o de una única paralela o de al menos dos paralelas por el punto A a la recta r, lo llamaremos respectivamente Q_0, Q_1, Q_2.

La geometría hiperbólica plana tiene unos axiomas que coinciden con los de la geometría euclidiana, excepto que en lugar del axioma Q asume la negación de Q, o sea Q_2, puesto que $\neg Q = Q_2$.

Si llamamos respectivamente G_1, G_2, G_3 y G_4 a los postulados de incidencia, orden, continuidad y congruencia de Hilbert (1899) en la axiomatización de la geometría euclidiana, y ponemos

$$G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 = G,$$

entonces los postulados que definen las geometrías euclidiana e hiperbólica son respectivamente

$$G \cup Q \quad \text{y} \quad G \cup (\neg Q).$$

Coxeter (1942) adopta en lugar de G el grupo de axiomas $\hat{G}$ que se refieren exclusivamente a unas entidades primitivas o *puntos* y a las relaciones primitivas de *intermediedad* y *congruencia.* Con ello se simplifica el grupo de axiomas, pues la recta resulta una entidad derivada, y también lo es la relación de incidencia; pero se dificulta la comparación con la geometría proyectiva. Se puede poner $\hat{G} = G_{12} \cup G_3 \cup G_4$ siendo[2] G_{12} el grupo de axiomas 8.311, 8.313–8.317, siendo G_3 el postulado de continuidad 2.13[3] y G_4 el grupo de postulados de congruencia 9.11–9.15.[4]

0.3. En la *geometría elíptica plana* las relaciones de incidencia y separación (más débil que la de intermediedad) son exactamente las mismas que las de la geometría proyectiva plana. Los axiomas que definen esta última geometría son bien conocidos y pueden verse en Coxeter (1942). Son, además de los de incidencia G_1^* (axiomas 2.111–2.114, pag. 20, que en el contexto son equivalentes al grupo G_1), el importante y específico axioma 2.31 (pag. 27). Este establece que "dos rectas se cortan en un punto", y caracteriza la geometría proyectiva. El axioma 2.31 equivale a negar la existencia de paralelas. Consiguientemente el axioma 2.31 es equivalente al Q_0.

[2]Coxeter, 1942, pags. 161–162. Estos axiomas definen la relación de intermediedad [ABC], que significa que B está entre A y C.

[3]Pag. 23.

[4]Pags. 179–180. Nótese que el axioma 9.11 hace que el 8.312 sea superfluo.

Además de los axiomas de incidencia hay los de separación (2.121–2.126), que establecen que si hay cuatro puntos en una recta hay un par que separa el otro par, además de otras relaciones. Son análogos a los del grupo G_2, aunque más débiles, y los englobamos en el grupo G_2^*.[5]

Para convertir la geometría proyectiva plana en geometría elíptica plana hay que introducir la relación de distancia con lo que se obtiene una geometría métrica. Para ello basta especificar una polaridad elíptica del plano proyectivo y convertirla en polaridad absoluta como hace Coxeter (1942, cap. VI). También puede hacerse axiomáticamente[6] mediante un grupo de axiomas de congruencia que designaremos por G_4, igual que el grupo de Hilbert, pues modificando ligeramente[7] los de Hilbert se obtiene un grupo de axiomas de congruencia que vale indistintamente tanto para la geometría elíptica como para la euclidiana (y consiguientemente también para la hiperbólica).

En resumen, la geometría elíptica plana viene definida axiomáticamente por los grupos de axiomas $G_1 \cup 2.31$, G_2^*, el axioma de continuidad G_3 o 2.13, y el grupo G_4. Poniendo

$$G^* = G_1 \cup G_2^* \cup G_2 \cup G_4$$

y teniendo en cuenta que 2.31 es equivalente a Q_0, tenemos que el grupo de axiomas de la geometría elíptica plana es

$$G^* \cup Q_0.$$

0.4. Consideremos ahora una geometría plana en la que sus puntos y rectas satisfagan el axioma único $G \vee G^*$, es decir satisfagan el sistema G o el G^*. Podemos escribir este axioma único así:

$$G_1 \wedge (G_2 \vee G_2^*) \wedge G_3 \wedge G_4$$

Notemos, además, que la satisfacción del grupo de axiomas G_2 implica la satisfacción del grupo G_2^*.

Si una geometría satisface G, entonces existe por lo menos una paralela como se deduce de los *Elementos*, I, 1–28.[8] Por tanto tiene que satisfacer o Q_1 o Q_2, y ha de ser euclidiana o hiperbólica. Si satisface G^* sin que satisfaga G, entonces no puede verificarse *Elementos* I, 16 y las rectas ha de ser todas de la misma longitud finita.[9] Por tanto, no hay paralelas y la geometría satisface Q_0, y consecuentemente ha de ser elíptica, pues Q_0 equivale a 2.31.

[5]Véase Coxeter, 1942, p. 22. Véase también pag. 28.

[6]Véase Coxeter, 5.1.

[7]Basta tener en cuenta que en la geometría elíptica plana tres puntos no alineados determinan exactamente cuatro triángulos; y que en general cuando se habla del segmento AB, quizás haya que especificar de cual de los dos se habla.

[8]Recordemos que Euclides en los *Elementos*, suponiendo que la recta es de longitud potencialmente infinita, en la Proposición I, 16 demuestra que en todo triángulo ABC, el ángulo exterior C es mayor que cada uno de los ángulos (interiores) A y B. Mediante este resultado, en la proposición I, 27 demuestra que por un punto dado F fuera de una recta dada AB pasa una paralela a AB.

[9]Es decir, si se satisface G^* y no se satisface G, entonces las rectas han de ser de longitud finita (de lo contrario se verificaría también G) y todas cerrándose sobre sí mismas y de igual longitud (axiomas de congruencia).

Finalmente, interpretamos que la geometría *euclídea* o sea la del libro de los *Elementos* es una geometría que satisface los axiomas G^*, y que además supone (en su postulado 2, proposición I, 12 y sobre todo en la I, 16) que la recta es de longitud infinita. De donde resulta, teniendo en cuenta el quinto postulado Q, que ha de ser una geometría euclidiana.

§1. Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733)

Saccheri publicó el mismo año de su muerte el volumen *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733).[10] El texto de este volumen consta de 142 páginas en cuarto, dividido en dos libros y precedido de XVI páginas (portada, dedicatoria, licencia de publicación, imprimatur, "Proemium", "Addenda indicis loco" y fe de erratas). El texto va seguido de seis tablas de una página cada una, con las que acaba el volumen. Aquí nos ocuparemos solamente del primer libro (pp. 1–101 y 5 tablas) en el que, según Saccheri, da dos demostraciones del quinto postulado de Euclides[11] en las proposiciones XXXIII (última de la primera parte) y en la proposición XXXIX (última de la segunda parte y de todo el libro). Saccheri comete en este libro dos paralogismos, el primero en la Proposición XXXIII y el segundo en la XXXVII, en cuyo resultado se basa la pseudodemostración de la proposición XXXIX.

1.1. El punto de partida de Saccheri es el cuadrilátero birrectángulo e isósceles ABDC, que ahora lleva su nombre. O sea que se tiene que los ángulos en A y B son rectos y AC=BD. Figura 1. (Tomada del original de Saccheri).

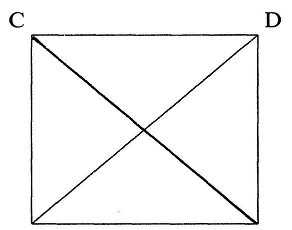

Figura 1

Demuestra en primer lugar que los ángulos C y D son iguales. En la proposición III demuestra que si C es obtuso, entonces AB es mayor que CD; si C es recto, AB es igual a CD; si C es agudo, entonces AB es menor que CD; y recíprocamente. En las proposiciones V–VII demuestra que, si en un sólo cuadrilátero de Saccheri el ángulo C es obtuso, recto o agudo, entonces en todos los cuadriláteros de Saccheri del plano los ángulos no rectos por construcción, serán también obtusos, rectos o agudos respectivamente. Este resultado le permite hablar

[10] *Euclides vindicado de toda mancha.* Hay un ejemplar en la Biblioteca Nacional (Madrid) y varias traducciones. Véase Bibliografía.

[11] Saccheri, siguiendo a Clavius, lo llama Axioma decimotercero.

de tres hipótesis: la del ángulo obtuso, la del ángulo recto y la del ángulo agudo, de las que uno y sólo una ha de verificarse. En las dos proposiciones siguientes, VIII y IX, demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo rectángulo es igual, mayor o menor que dos rectos según que se haga la hipótesis del ángulo recto, obtuso o agudo respectivamente.

En las proposiciones XI y XII supone dos rectas y una transversal que corta perpendicularmente a una de ellas y hace un ángulo agudo con la otra. Demuestra que las dos rectas se cortarán si se las prolonga suficientemente, suponiendo la hipótesis del ángulo recto en la XI y la del ángulo obtuso en la XII. En la proposición XIII prescinde del supuesto de que la transversal sea ortogonal a una de las dos rectas dadas, y consiguientemente demuestra el quinto postulado de Euclides, tanto en la hipótesis del ángulo recto, como en la del ángulo obtuso.

De este modo consigue finalmente uno de los dos objetivos parciales que constituyen el objetivo de todo el libro. En efecto, como ya hemos indicado el objetivo del libro es vindicar Euclides de toda mancha, y en particular el objetivo del primer libro es vindicarlo en cuanto admite el axioma decimotercero (hoy en quinto postulado), cuya verdad no aparece como evidente. La hipótesis del ángulo recto da lugar de manera obvia a la geometría de los *Elementos* y por tanto es natural que se pueda demostrar con ella el postulado de Euclides. Por el contrario, la demostración del postulado de Euclides en la hipótesis del ángulo obtuso significa la consecución del primer objetivo parcial y constituye una verdadera hazaña intelectual.

Este éxito debió llevarle a la convicción, o se la aumentó si ya la tenía, de que también en la hipótesis del ángulo agudo conseguiría su segundo objetivo parcial, y con él el objetivo del libro primero de demostrar completamente el postulado de Euclides.

Antes de emprender la tarea de demostrar el segundo objetivo parcial de demostrar también el quinto postulado en la hipótesis del ángulo agudo, deduce una consecuencia obvia e importante de su proposición XIII. En la proposición XIV demuestra que la hipótesis el ángulo obtuso es absurda, pues lleva a una contradicción. En efecto, demostrado el postulado de Euclides, la geometría es la misma que la de los *Elementos*, pero en ésta todos los cuadriláteros de Saccheri son rectángulos, lo que contradice la hipótesis del ángulo obtuso.

Observemos que todas las demostraciones son correctas y consecuentemente todos los teoremas de Saccheri son válidos.[12] hoy día sabemos de la existencia de una geometría plana, elemental y real en la que los ángulos C, D de los cuadriláteros de Saccheri son obtusos; y sabemos que esta geometría tiene la misma consistencia lógica que la geometría euclidiana. A esta geometría la llamamos ahora geometría elíptica plana, siguiendo a Klein.

[12]Stäckel (1895, Notas de las pp. 52, 62) parece argüir que las demostraciones de Saccheri son insuficientes (ungenügend), porque éste aplica la proposición I, 16 de los *Elementos*, la cual proposición es falsa en la hipótesis del ángulo obtuso. Pero ya C. Segre (1902–1903, Nota 4) puso de manifiesto que esta conclusión de Stäckel no se sigue.

Ahora bien, la geometría del ángulo obtuso de Saccheri no es la geometría elíptica plana. En efecto, la geometría de Saccheri en términos relativos es evidentemente la misma de Euclides, pero prescindiendo del quinto postulado. Según hemos indicado ya al final de la Introducción, interpretamos la geometría de Euclides como una geometría en la que previa e independientemente de la postulación del quinto postulado se supone que la longitud de la recta es potencialmente infinita.[13] En este caso la geometría de Saccheri en términos absolutos es una geometría en la que se postulan los axiomas G^* como han sido explicados en la Introducción, no se postula el postulado de Euclides, pero tácitamente (por evidencia, siguiendo a Euclides) se asume que la recta es de longitud infinita.

Así pues, Saccheri supone la longitud infinita de la recta, lo que contradice los postulados de la geometría elíptica. Consecuentemente, Saccheri puede sin paralogismo alguno demostrar, y de hecho demuestra que su geometría del ángulo obtuso lleva a la contradicción y por tanto es absolutamente falsa.

1.2. A Saccheri le queda lograr su segundo objetivo parcial, a saber la demostración del postulado de Euclides en la hipótesis del ángulo agudo.

En las siete proposiciones XV–XXI demuestra propiedades generales relativas a las tres hipótesis o sólo a la hipótesis del ángulo agudo. La proposición XXI va seguida de cuatro escolios importantes, en los que entre otras cosas analiza las teorías de Borelli, Nassaridin y Wallis. En la proposición XVII demuestra el siguiente interesante teorema. Figura 15. (Del original de Saccheri).

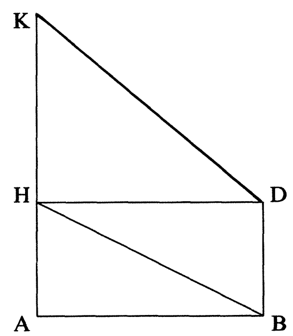

Figura 15

Sea AB un segmento tan pequeño como se quiera y sea AH perpendicular a AB. Entonces, en la hipótesis del ángulo agudo, se puede trazar una recta

[13]En otras ocasiones y en este mismo contexto de la geometría de Saccheri (Dou 1970, 1985b) he interpretado diversamente la geometría de los *Elementos*. Ahora me parece claro que la interpretación es la que doy aquí, principalmente porque me parece que a Euclides nunca se le pudo ocurrir que la recta se pudiera cerrar sobre sí misma.

BD, tal que el ángulo ABD sea agudo y tal que por más que se la prolongue nunca cortará la recta AH.

Para ello basta trazar HB y luego HD de modo que el ángulo BHD sea igual al HBD. Entonces la perpendicular BD trazada por B a HD nunca cortará a AH. La demostración es por reducción al absurdo. En efecto, supóngase que la prolongación de la recta BD y la de AH se cortaran en K. Ahora bien, el ángulo HDK sería recto; y el ángulo KHD sería obtuso, puesto que su suplementario AHD es agudo, ya que es la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo (proposiciones VIII y IX). Por tanto, resultaría que la suma de los ángulos del triángulo HDK sería mayor que dos rectos, lo cual es absurdo, como se quería demostrar.

Este resultado le llamó la atención a Saccheri, quien en un escolio que sigue a continuación declara que si se pudiera demostrar que esta proposición XVII es falsa, ipso facto la hipótesis del ángulo agudo quedaría refutada.

A partir de la proposición XXII las proposiciones de Saccheri van dirigidas ordenada y progresivamente hacia la búsqueda de una contradicción en las consecuencias cada vez más sorprendentes de su geometría del ángulo agudo. Damos a continuación, sin que sea aquí posible dar la demostración, otro resultado sorprendente y el que probablemente es el teorema más importante de Saccheri. Para ambos resultados damos figuras propias, más simples y adecuadas que las del texto, y formulamos los enunciados de forma distinta aunque naturalmente equivalente.

Sea BAX, figura I, un ángulo dado todo lo pequeño que se quiera. Entonces, siempre existe en la recta AB un punto C, suficientemente alejado de A, tal que la perpendicular CD levantada sobre AC no cortará a la recta AX por mucho que se prolonguen AX y CD. (Proposición XXVII).

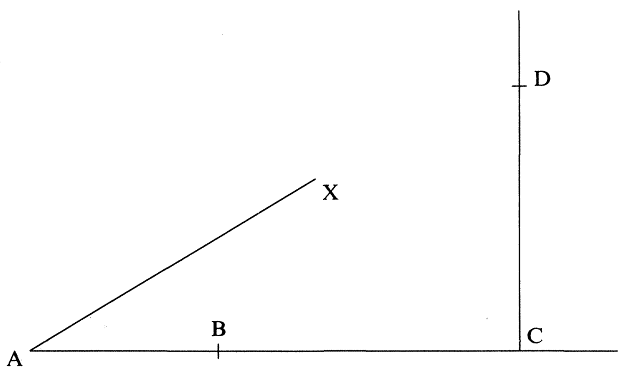

Figura I

En esta proposición, como también en la XXV, Saccheri repite enfáticamente que si se pudiera demostrar que es falsa, la hipótesis del ángulo agudo quedaría refutada.

Partiendo de la proposición XXIII y mediante la XXV, en la proposición XXXII Saccheri demuestra el siguiente resultado (Figura II):

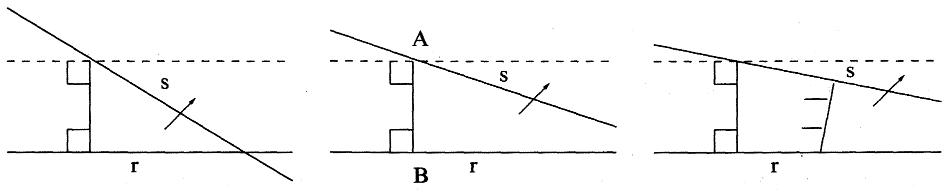

Figura II

Sean r y s dos rectas cualesquiera. Entonces una de tres: o se cortan (si se las prolonga suficientemente) o son asintóticas entre sí o tienen una perpendicular común. En particular por el punto A pasan dos rectas s y s', simétricas entre sí respecto de AB, que son asintóticas a la recta r.

En la proposición XXXIII, siguiendo a la XXXII y basándose en el resultado que acabamos de dar, Saccheri comete el primer paralogismo hallando una contradicción. La demostración es muy larga (pp. 70–86) y el error está en el primer párrafo, pues introduce el punto de intersección X de dos rectas asintóticas, las cuales tienen que admitir una perpendicular común en su punto X de intersección. Con cinco lemas demuestra que esto es absurdo.[14]

No hay inconveniente, en principio, en introducir el punto X; pero, naturalmente en este punto no se cumplen los axiomas de congruencia. Aunque con enorme laboriosidad, alcanza efectivamente llegar a una contradicción. Por el contrario, si no se introducen puntos X, se obtiene una geometría del ángulo agudo que satisface todos los axiomas y se puede desarrollar perfectamente. Esta geometría es la que descubrirán Gauss, Bolyai y Lobachevski, y que ahora llamamos geometría hiperbólica y que es equiconsistente con la geometría euclidiana, de modo que ambas son a la vez consistentes o inconsistentes.

Si se considera el modelo de Beltrami de la geometría hiperbólica plana se comprende mucho mejor el paralogismo de Saccheri. Los puntos X vienen representados en este modelo por los puntos del infinito, y son los puntos de la cónica de la polaridad absoluta. Los puntos X pueden introducirse como puntos ideales, pero no como puntos ordinarios, como hace Saccheri.

[14]Para más detalles nos remitiremos a Dou, 1970, pp. 391–392.

Con la proposición XXXIII termina la primera parte del primer libro. La segunda y última parte consta de seis proposiciones (XXXIV–XXXIX). En ellas se demuestran algunas interesantes propiedades de la curva equidistante de una recta. En la proposición XXXVII comete Saccheri el segundo paralogismo.[15]

1.3. La aportación más valiosa y profunda de Saccheri a la resolución de la problemática planteada por el quinto postulado de Euclides fue su descubrimiento de un método adecuado, y la difícil aplicación del mismo, suficientemente prolongada, para asegurar que con él se lograría el esclarecimiento de la cuestión propuesta. Todo ello a pesar de que la solución, que un siglo más tarde emergió gracias a Bolyai y Lobachevski, fue la contraria de la que esperaba Saccheri.

El tipo de razonamiento que Saccheri emplea en su *Euclides* es el de reducción al absurdo. Lo aplica en la demostración de muchas de sus proposiciones, pero lo aplica sobre todo globalmente de modo que todo el primer libro del *Euclides* es un magnífico y en verdad extraordinario ejemplo de aplicación del método de reducción al absurdo.

Llamemos S al grupo de axiomas que entran en la definición de la geometría del Euclides. Comprende el grupo G, que hemos definido en la introducción, y el axioma de la longitud infinita de la recta, que llamaremos J. Entonces, aunque sea de una manera redundante, podemos poner $S = G \wedge J$. Saccheri desea demostrar

$$(+) \qquad S \vdash Q,$$

o sea que Q es una consecuencia lógica de los axiomas S. Para ello introduce el postulado $\neg Q$, o sea la negación de Q, y pretende demostrar

$$(++) \qquad \{S, \neg Q\} \vdash Q.$$

Es, en efecto, bien conocido que, teniendo en cuenta la ley (tautología) de Clavius $(\neg Q \supset Q) \supset Q$ y el teorema de deducción para Teorías de Primer Orden, el resultado (+) se sigue del (++).

Así pues, Saccheri añade la proposición $\neg Q$ a las primeras 28 proposiciones[16] del primer libro de los elementos, y dispone de un bagaje más extenso para la construcción de la geometría del *Euclides*. Esta incorporación de $\neg Q$ a S y una elaboración profunda y prolongada de nuevos teoremas resultan decisivos para la creación de un nuevo método. Notemos que esta elaboración prolongada fue posible gracias a la incorporación de $\neg Q$. Desde la perspectiva actual me parece claro que el método contenido en el *Euclides* tenía que llevar necesariamente a la emergencia de la geometría del ángulo agudo como geometría de igual rango que la euclidiana y concurrente con ella para la comprensión de nuestro mundo físico.

---

[15]Para más detalles véase Dou, 1970, pp. 392–394.

[16]En realidad sólo las primeras 26 proposiciones, pues Saccheri excluye explícitamente la aplicación de las XXVII y XXVIII (Véanse Proemio y Prop. XXIII).

Poco después del redescubrimiento del *Euclides* por Beltrami, los paralogismos de Saccheri llamaron poderosamente la atención y fueron a veces interpretados de manera disparatada.[17] Lo que más llama la atención en la tenacidad de Saccheri, no es que creyera que la geometría $\{G, \neg Q\}$ era físicamente falsa, sino que también creyera (incluso antes de cometer ningún paralogismo) que esta geometría era lógicamente imposible, es decir que entrañaba una contradicción.[18]

Tanto en el *Euclides* como en los *Elementos* encontramos un sistema axiomático genético (o material) en el que los términos o conceptos son aprehendidos de la realidad y cuyos sucesivos teoremas enuncian proposiciones verdaderas del mundo real de la física. Hay que tener en cuenta esta filosofía de las matemáticas, si queremos evaluar históricamente el progreso epistemológico aportado por la creación de las geometrías no euclídeas. Las actuales teorías de sistemas axiomáticos existenciales (o formales) y el concepto más abstracto de una geometría matemática, se basan en conceptos que no son exclusivamente aprehendidos de la realidad física (aunque no prescindan totalmente de ella) y sus teoremas no tienen por qué enunciar necesariamente proposiciones verdaderas, sino solamente válidas. Por lo que respecta a su método, esta geometría no se siente necesariamente controlada por la realidad del mundo físico. Pues bien, esta geometría actual es precisamente y en buena parte consecuencia de la emergencia de las geometrías no euclídeas.

§2. Johann Heinrich Lambert (1728–1777)

El libro de Lambert *Theorie der Parallellinien* fue escrito en 1766, pero no fue publicado hasta 1786 por Daniel Bernoulli (1744-1807), sobrino del famoso Daniel Bernoulli (1700–1782), que fue amigo de Euler e hijo del todavía más famoso Johann Bernoulli. Entre Saccheri y Lambert merecen citarse, en relación con nuestro tema, dos importantes matemáticos: Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800) que escribió *Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie* (1734) y Georg Simon Klügel (1739–1812) que escribió *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kästner et auctor.*[1]

En esta época renace en los países germánicos el interés por la teoría de las paralelas. Kästner, que consiguió formar una biblioteca con más de 7000 volúmenes pertinentes a esta teoría, todavía escribió que nadie en su sano juicio discutirá la verdad del postulado de Euclides, aunque se muestra pesimista sobre la posibilidad de su demostración.

Por su parte Klügel, en su libro, nota: "Ciertamente sería posible que rectas, que no se cortan, se separaran la una de la otra. Que esto sea un poco ab-

[17] Véanse por ejemplo G.B. Halsted, 1893, pp. 149–152; y E.T. Bell, 1946, pp. 345–356.

[18] A este respecto pueden verse Dou 1970 y 1972.

[1] Los datos que aquí damos de estos dos autores y los biográficos de Lambert están tomados de Stäckel (1895).

surdo no lo sabemos por ninguna demostración ni en virtud de conceptos claros de la línea recta o de la línea curva, sino más bien por experiencia y por el juicio de nuestros ojos" (p.16).

Lambert nació en Mühlhausen el 1728 en la Alta Silesia y se consideró toda su vida suizo. Fue miembro de la Academia de Berlín y en esta ciudad pasó los últimos trece años de su vida y en ella murió en 1777. Tiene importantes contribuciones no sólo en matemáticas, sino también en Física y Filosofía.

Lambert hace un gran elogio del libro de Klügel[2] y es muy posible que fuera este libro lo que motivó la dedicación de Lambert al estudio de la teoría de las paralelas.

2.1. Las aportaciones de Lambert a esta teoría se contienen en su libro *Theorie der Parallellinien* (1766). Consta de tres partes o capítulos. El primero (§§1–11), titulado *Consideraciones preliminares*, es una introducción filosófica con contribuciones originales, profundas y correctas, sobre las que volveremos al final de esta parte, después que hayamos expuesto sus contribuciones geométricas.

El segundo capítulo (§§12–26) se titula *Exposición de algunos teoremas, que pueden ser considerados por sí mismos*. Contiene varias pseudodemostraciones del postulado de Euclides. Lambert señala un método general para hallarlas: exceptuando las proposiciones I, 1–28 y algunas más, la mayoría de las proposiciones de los *Elementos* se demuestran aplicando o suponiendo el quinto postulado, y en muchas de ellas es posible, partiendo del teorema demostrado recuperar una deducción del quinto postulado. Por tanto, para demostrar el quinto postulado puede empezarse tratando de demostrar, sin emplear el quinto postulado, cualquiera de tales proposiciones.

Lambert escribe:

"Hay además muchas maneras de intentar (treiben) una demostración del postulado de Euclides, tales que, aquel pequeño remanente que queda, no sólo es claramente correcto, sino que se sostiene, y que mediante él se puede completar la demostración."[3]

A continuación da algunos ejemplos.

El tercer capítulo (§§27–88) contiene las más importantes contribuciones a la teoría de las paralelas. Consta de una introducción (§§27–39) y tres secciones. En la introducción, introduce ya el "cuadrilátero de Lambert" ABCD, que es la mitad del cuadrilátero de Saccheri cCDd. Los tres ángulos en A, B, C son rectos y Lambert hace también, como Saccheri, las tres hipótesis de que el ángulo D sea recto, obtuso o agudo. (Figura X del original de Lambert).

[2]Véase su *Theorie der Parallellinien*, final del §3, pag. 155. Se cita la edición de Stäckel, 1895.

[3]Comienzo del §21. Compárese con el texto todavía más expresivo de C.F. Hindenburg (1741–1808) en p. 143 de Stäckel, 1805.

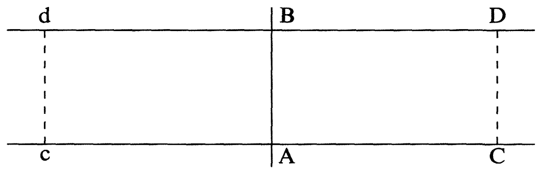

Figura X

En la primera sección considera el caso en que D sea recto. Demuestra que todos los cuadriláteros de Lambert son rectángulos, lo que implica la existencia de una paralela (sin explicitarlo). También demuestra que se cumple el postulado de Euclides (aunque tampoco lo dice explícitamente).

En la segunda sección Lambert supone que en ángulo D sea obtuso. De una manera elegante, concisa y rigurosa, demuestra, sin necesidad de axioma de continuidad, que las normales de AC, hasta su encuentro con BD, van decreciendo a medida que se apartan de A. Con un procedimiento insinuado ya en la primera sección, demuestra que BD corta necesariamente a AC. Naturalmente, también Bd corta a Ac, y por tanto la hipótesis del ángulo obtuso queda descartada.

Es notable que Lambert no emplea 1.16 de los *Elementos*; pero sí aplica 1.17, que es equivalente a 1.16. Ambas son proposiciones correctas de los *Elementos*, pues en éstos se supone que la recta es de longitud infinita.

Por otra parte, en la hipótesis del ángulo obtuso, si no se supone la longitud infinita de la recta (y consecuentemente se asumen sólo los axiomas de separación) o un nuevo postulado equivalente (como sería que la recta divide el plano en dos partes separadas) es imposible demostrar que esta hipótesis lleva a un absurdo, pues se verifica en la geometría elíptica. Es verdad que es posible demostrar, sin suponer la recta infinita ni otro postulado equivalente para el caso, que BD corta a AC y a distancia finita, y a la misma distancia tanto en la dirección BD como el la dirección Bd. Pero, en este caso estos dos puntos de intersección coinciden en un mismo punto O, tal que AO=OA= $\pi/2$, si se toma como unidad de longitud el radio de curvatura del plano. En este caso los ángulos en A, B y C son rectos por contrucción en el plano elíptico, y podemos suponer que son también rectos en el mismo plano considerado como euclidiano. En cambio, el ángulo D será obtuso en el plano elíptico y recto en el euclidiano. La recta del infinito que compactifica el plano euclidiano será la recta del infinito del plano elíptico, de modo que los puntos y rectas del plano elíptico son los puntos y rectas del plano euclidiano, y además los puntos y la recta del infinito. Se tendrá AB>CD en medida elíptica, pero será AB=CD en medida euclidiana; de manera que BD, que corta a AC en el punto del infinito, será, si se le quita este punto del infinito, la recta euclidianamente paralela a AC trazada por B. El punto A es el polo de la recta del infinito, etc.

2.2. La tercera sección, en la que Lambert supone que el ángulo en D es agudo, contiene aportaciones profundas y originales y una notable conjetura.

Empieza demostrando bastantes resultados que se encuentran también en Saccheri, aunque las demostraciones difieren notablemente. No introduce las paralelas "asintóticas" de Saccheri, pero sus demostraciones son elegantes e ingeniosas. Como ejemplo damos a continuación un esquema de la demostración de la proposición del §70.

En la figura XXII se tiene, por contrucción, que AG y BK son rectas perpendiculares a AB. Se toman E, F, G, siendo EF=FG. Se levantan EH, FJ y GK perpendiculares a AG,. Se trata de demostrar, suponiendo que el ángulo BHE es agudo, que

$$JF-HE<KG-JF.$$

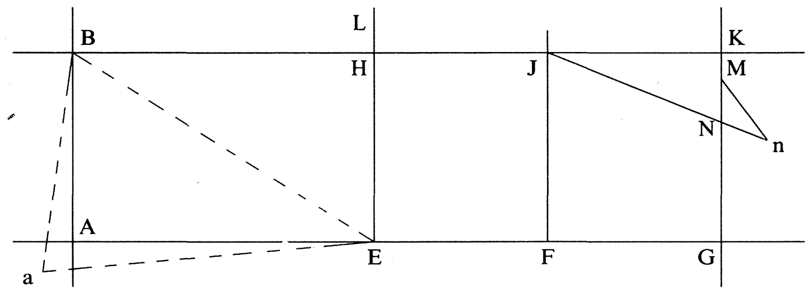

Figura XXII

Se sabe ya que ang BHE > ang BJF > ang BKG. Se traza traza LJM perpendicular a JF, y se toma GN=EH, y por tanto 1 Recto < ang EHJ= ang JNG. De donde se sigue que JK>JN.

Se toma *n* en la prolongación de JN de modo que J*n* =JK y se sigue que M*n* >MN; pero M*n* =MK y MN=LH. Por tanto MK>LH; pero esto es lo mismo que KG−JF>JF−HE, como se quería demostrar.

Demuestra también que en un triángulo equilátero ABC, llamando G al centro de gravedad y D al punto medio de BC, se tiene que AG es mayor que el doble de GD.

La contribución más notable es que, paso a paso, con sucesivas demostraciones obtiene el área S de un triángulo cualquiera ABC. Obtiene

$$S = k(\pi - A - B - C),$$

donde k es una constante del plano. Observa el parecido con la fórmula del triángulo esférico, y que en este caso, su obtención es independiente del postulado de las paralelas; así como el hecho de que la hipótesis del ángulo obtuso se verifica sobre la esfera.

Deduce la importante consecuencia, de que no hay figuras semejantes, y por tanto, si esta hipótesis del ángulo agudo fuera verdadera, se podría establecer una unidad de medida lineal absoluta ("absulute Maass" (sic), §80). En 1816, en una carta a Gerling, Gauss hablará de una medida universal (ein allgemeines Mass), y que por esta razón "sería incluso deseable que la geometría de Euclides no fuera verdadera".[4]

De la fórmula del área del triángulo deduce también una muy notable conjetura: "De ello debería casi sacar la conclusión de que la tercera hipótesis se verifica sobre una esfera de radio imaginario" (§82). Aunque Lambert no lo dice explícitamente, cabe pensar que cayó en la cuenta, de que si en la fórmula que da el área de un triángulo esférico,

$$S = R^2(A + B + C - \pi),$$

se pone Ri en lugar de R se obtiene precisamente su fórmula del área de un triángulo en la geometría del ángulo agudo.

Desgraciadamente el último apartado de la *Theorie der Parallellinien* contiene un enunciado, que le obliga a rechazar también la hipótesis del ángulo agudo. Naturalmente, como en el caso de Saccheri, la demostración es falsa.

Las contribuciones filosóficas, o mejor epistemológicas, se encuentran principalmente en los §§10 y 11. Es muy positiva su insistencia en la necesidad de prescindir de la "representación de la cosa" (Vorstellung der Sache). Es el primero que considera seriamente la posibilidad, por los menos lógica, de que la geometría del ángulo agudo sea la verdadera en nuestro mundo. Ello es equivalente, superando así el prejuicio de Saccheri, a afirmar que el postulado Q de Euclides es independiente del conjunto de postulados G.[5]

§3. Franz Adolph Taurinus (1794–1874)

Taurinus nació en 1794 en König im Odenwalde (Alemania) y después de estudiar Derecho vivió desde 1822 en Colonia. Al estudio de la geometría le estimuló su tío Ferdinand Karl Schweikart (1780–1857) y fue también influido por Gauss, quien, en contestación a una suya, le escribió una célebre carta privada (1824), de la que, sin embargo, no llegó a comprender su profundidad. Schweikart había llegado al convencimiento de la validez lógica de la "Astralgeometría", en la que la suma de los ángulos de un triángulo era menor que dos rectos, y tanto menor cuanto mayor era el triángulo.

Hacia 1821 Schweikart escribió una carta a su sobrino Taurinus, y este debió de dedicarse intensamente al estudio de la geometría. En 1825 publicó la

[4] Puede verse en Dou, 1970.

[5] Para una consideración argumentada de estos temas, véanse Dou, 1970 y 1972.

Theorie der Parallellinien. En el mismo año 1825 encontró que este libro contenía muchas cosas que ya no le agradaban y decidió complementarlo con un nuevo libro en latín: *Geometriae prima elementa* (1826). El mismo Taurinus consteó la publicación del libro y envió algunos ejemplares a amigos y autoridades matemáticas. Más tarde, al no encontrar ningún reconocimiento a sus esfuerzos, despechado quemó el resto de la edición.[1]

3.1. Taurinus en su *Theorie* contribuye con nuevos teoremas en la misma línea que Saccheri y Lambert. Sus aportaciones matemáticas más importantes son:

En primer lugar rechaza la geometría del ángulo obtuso, porque en ella, dada una recta cualquiera, se sigue que todas las rectas que le son perpendiculares se cortan en dos puntos, simétricos el uno del otro respecto de la recta dada; lo cual es contrario al axioma (así en singular) de la línea recta, a saber que dos puntos determinan una única recta.

Tanto en Saccheri como en Lambert, la geometría del ángulo agudo depende de la magnitud del ángulo agudo del primer cuadrilátero de partida. Taurinus introduce en su lugar un parámetro k positivo, que puede tomar todos los valores entre cero e infinito. Si k es muy grande la geometría correspondiente puede llegar a ser indistinguible de la de Euclides, hasta tal punto que ello puede crear confusión.

La *Theorie* tiene una larga *Postdata (Nachscrift)* a la que sigue todavía un largo *Suplemento (Nachtrag)*. En este último afirma explícita y rotundamente que la geometría del ángulo agudo no contiene *en sí misma* ninguna contradicción. He aquí este notabilísimo texto:

"Toda geometría, en la que se supone que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos, no contiene *en sí misma* –por razón del concepto– ninguna contradicción con el axioma de la línea recta y yo retiro completamente mi conjetura de que puediera encontrar una.[2] Lo que es una necesaria consecuencia del axioma, que entre dos puntos sólo *una* línea recta es posible, es lo que en cierto modo no excluye. La contradicción hay que buscarla en que no hay uno, sino infinitos sistemas de esta clase, cada uno de los cuales podría tener la misma pretensión de validez; y en que, por tanto, habría infinitas rectas entre dos puntos del espacio ..." (p. 96. Stäckel, p.261–262).

El *Suplemento*, y la *Theorie*, acaban con un notable resultado matemático y con una nueva razón, o una nueva formulación de la misma razón filosófica, que hace imposible la admisión de la geometría del ángulo agudo.

[1]Consecuentemente, es muy difícil encontrar un ejemplar de este libro. Véase Stäckel, 1895, pp. 246–252.

[2]Se refiere sin duda a la posibilidad de que todavía se encontrase una contradicción y que había expresado al final de la misma *Theorie*, antes de la Posdata, en pag. 87, n.8. (Pag. 259 de Stäckel).

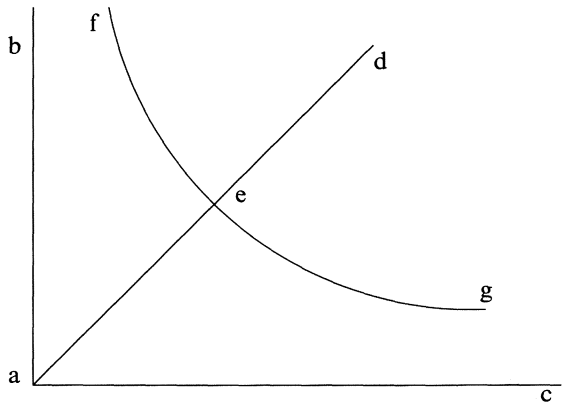

Figura VII

En la figura VII *feg* es una recta arbitraria y *aed* es perpendicular a *feg*. Las rectas *ab* y *ac* son simétricas respecto de *aed*, perpendiculares entre sí y ambas son paralelas a la recta *feg*.

Pues bien, Taurinus llama a la distancia *ae* el "parámetro", o "eje" o "potencia" del sistema geométrico y demuestra que puede tomar cualquier valor positivo y que, una vez fijado éste, la geometría queda unívocamente determinada. Nótese que empleando la función $\Pi(x)$ de Lobachevski, que da el valor del ángulo de paralelismo en función del segmento *ae*, resulta que este parámetro viene definido por $\Pi(ae) = \pi/4$.[3]

En el último párrafo de la *Theorie* y en la última nota que le sigue, Taurinus en su razón de rechazo de la geometría del ángulo agudo escribe:

"Pero entre dos puntos deber haber en definitiva sólo una única línea recta: de donde, las líneas de una geometría en la cual la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos rectos, no pueden ser líneas rectas" (p. 102) (Stäckel, p. 266).

En la nota final, Taurinus insiste que la línea recta entre dos puntos tiene que ser *absolutamente (absolut*, p. 102, Stäckel 266, donde el subrayado es del mismo Taurinus) determinada, y que, por tanto, no puede depender de un parámetro; de modo que tal geometría no puede ser rectilínea (geradlinig). Me parece que en este "absolut" resuena la doctrina de Kant.

3.2. En su segundo libro, *Los primeros elementos* de 1826, aunque aporta muchos resultados nuevos interesantes, las tesis fundamentales son las mis-

[3]Parece que Scheweikart fue el primero que presentó una figura como la fig. VII y mostró su importancia. Véase su carta de 18–11–1824 a su sobrino Taurinus (Stäckel, p. 245).

mas que las de su *Theorie*, y más explícitamente reafirmadas si cabe. Así se desprende del final del libro (inmediatamente antes del Apéndice) (p. 68; Stäckel, p. 274).

Lo más notable de *Los primeros elementos* es su deducción de toda la trigonometría válida en la geometría del ángulo agudo. La llama trigonometría esférico–logarítmica, porque la deduce a partir de la trigonometría esférica y porque las funciones pertinentes son funciones logarítmicas.

He aquí como se expresa al principio:

"Ya estaba esto impreso y me retaba sólo presentar mi visión sobre la verdadera esencia de esta geometría, cuando alcancé finalmente la certeza de que esta visión efectivamente puede demostrarse. Desde el principio había abrigado la sospecha de que una tal geometría tenía que ser en cierta manera la inversa (die Umkehrung) de la esférica, que implicaba logaritmos y que se podía deducir de las fórmulas generales de la geometría esférica; y me maravillaría, que una cosa así, que es tan clara y está al alcance de la mano de cualquiera, no la hubiese visto antes y hubiese tenido tantas prolijidades, si no me acordara de que precisamente cosas, que parecen evidentes, a menudo hayan quedado escondidas largo tiempo, incluso a hombres importantes". (pp. 64–65; Stäckel, pp. 270–271).

La manera de pasar de la trigonometría esférica a la del ángulo agudo es, naturalmente, sustituyendo los arcos esféricos por arcos imaginarios. El método resulta complicado y casi increíble, pues el paso a argumentos imaginarios lo hace en las diferenciales (¿por qué le resultó más natural?), de modo que al integrar obtiene funciones logarítmicas. Podía haber empleado las funciones hiperbólicas inversas, pero a él las logarítmicas le serían más familiares.

He aquí la fórmula que obtiene para el "defecto" esférico–logarítmico de un triángulo ABC cualquiera:

$$\pi - (\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \frac{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}},$$

donde α, β, γ son los lados del triángulo.

Los primeros elementos termina con un largo *Apéndice (Anhang)* en el que el autor resuelve correctamente los cuatro problemas siguientes, en los que se supone que *Ri* designa el radio imaginario de la esfera imaginaria que caracteriza la geometría.

1°) Dadas dos rectas paralelas AB y BC, se toma el punto H en AB y se traza la perpendicular HJ a AC.

Hallar la longitud de la perpendicular HJ suponiendo conocido el ángulo BHJ.

Se trata, pues, de un interesante problema, a saber, en términos lobachevskianos, de hallar $\Pi(x)$, conocido x =HJ.

2°) Dado un triángulo máximo ABC (en el que cada lado es paralelo a los otros dos), hallar los lados y ángulos del triángulo equilátero DEF inscrito en el ABC.

3°) Hallar el área de un triángulo conocidos sus lados.

4°) Hallar la longitud de una circunferencia de radio a.

Taurinus halla una sencilla fórmula que es equivalente a la bien conocida

$$\pi R\left(e^{a/R} - e^{-a/R}\right),$$

o sea $2\pi R$ senh (a/R).

De una manera semejante calcula el área del círculo y la de la esfera.

3.3. Vemos que Taurinus hace importantes contribuciones a la Teoría de las paralelas, tales como explicitar el parámetro del que depende la geometría del ángulo agudo, resolver numerosos e interesantes problemas y deducir una trigonometría completa de la misma geometría.

También afirma rotundamente y está convencido de que la geometría del ángulo agudo no contiene en sí misma ninguna contradicción; o sea, diríamos hoy, que es lógicamente consistente. Equivale a afirmar que el postulado Q de Euclides es independiente del grupo de postulados G. Saccheri estaba convencido de lo contrario, Lambert había manifestado seriamente sus dudas, pero es Taurinus quien lo afirma públicamente por primera vez. Incluso manifiesta que:

"Sospecho que no carecerá de importancia en las matemáticas" (p. 97; Stäckel, p. 262).

Pero, entonces, ¿por qué tiene que buscar una contradicción (que no esté en el mismo sistema), o por qué no puede ser que sea verdadera en el mundo físico? (Véase texto citado de p. 96).

Una primera razón la encontramos en los siguientes textos del autor:

"Contradice [el sistema del ángulo agudo] toda intuición. Es verdad que un tal sistema podría dar lugar en pequeño a los mismos fenómenos que el sistema euclídeo: sólo que, si la representación del espacio puede ser considerada como la pura forma del sentido exterior, entonces el sistema euclídeo es indiscutiblemente el verdadero y no puede aceptarse que una experiencia limitada pueda engendrar una ilusión sensorial" (*Theorie*, pag. 86; Stäckel, p. 258).

¿Por qué "no puede aceptarse" que engendre una ilusión? Porque va en contra la suprema autoridad del Kant.

El sistema del ángulo agudo "no está determinado en sí mismo, sino que requiere aún una especial magnitud que lo determine o sea una constante. De ahí resulta inmediatamente que para nosotros no se puede dar de ningún modo a priori otra geometría que no sea la euclídea, puesto que una tal constante puede ser tomada con total arbitrariedad" (*Theorie*, pp. 89–90; Stäckel pp. 259–260).

Gauss en carta a Gerling (1816) escribe que parece paradójico que pueda haber una constante a priori. Más tarde, en carta a Taurinus (1824), ya dice que quizás sea posible encontrarla a posteriori; y más tarde en la carta (6–3–1832) a Farkas Bolyai, refiriéndose a los sistemas Σ y S de János Bolyai, escribe: "Que sea imposible decidir a priori entre Σ y S es la más clara evidencia del error que Kant hizo cuando estableció que el espacio era meramente la forma de nuestro sentido..." De manera parecida se había expresado ya en 1829 en carta a Bessel. Pero, parece que Taurinus no renunció a la doctrina kantiana.

En Taurinus encontramos, al menos aparentemente, una confusión entre la existencia física de una única recta, entre dos puntos dados y para una geometría determinada por un valor del parámetro, y la infinidad de rectas posibles correspondientes a los infinitos valores posibles del parámetro. (Véanse los textos citados de las pp. 96, 102 y 68 de *Theorie*). Quizás el "absolut" (p. 102, que hemos citado) que se refiere a la determinación de la única recta que pase por dos puntos dados, deba entenderse en el sentido de recta objetivamente posible en sentido kantiano; es decir, a priori, y por tanto incompatible con la infinitud de rectas meramente lógicas. Esta interpretación daría consistencia a los textos de Taurinus, pero el error se derivaría de la tesis kantiana de la aprioridad de la geometría euclídea.[4]

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] BELL ERIC TEMPLE, 1946: *The Magic of Numbers*, Whittlesey House. *McGraw Hill Book*. New York, London, 1946.

[2] COXETER H. S. M.: *Non–Euclidean Geometry, University of Toronto Press*, 1968, reimpresión de la 5ª edición de 1966.

[3] DOU, ALBERTO, 1970: "Logical and historical remarks on Saccheri's Geometry", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 10 (1970) 385–415.

[4] DOU, ALBERTO, 1972: "De la verdad a la validez en Geometría (1733–1871)". *Pensamiento* 28 (1972), 413–429.

[5] DOU, ALBERTO, 1985a CON MIGUEL DE GUZMAN: "Grandeza y miseria de las matemáticas". En *Fragmentariedad de las Ciencias*, editado por A. Dou, *Ediciones Mensajero*, Bilbao 1985, pp. 179–212.

[6] DOU, ALBERTO, 1985b: "Local Theorems in Saccheri's Geometry" comunicación leída en el XVIIth International Congress of History of Science (University of California, Berkeley, 31–7 a 8–8–1985). Resumen en *Abstracts of Scientific Sections*, Mc–1.A.

[4]Véanse Dou, 1970, 1972, 1985a, y Becker, 1964, pp. 183–185.

[7] EUCLIDES: Στοιχεια *(Elementos)*, edición crítica y traducción al latín por I.L. HEIBERG. Traducción inglesa por T.L. HEATH, Dover, Nueva York, 1956 (2^a) edición).

[8] GRAY, J. J. AND LAURA TILLING, 1978: "Johann Heinrich Lambert, Mathematician and Scientist, 1728–1777. *Historia Mathematica* 5 (1978), 13–41.

[9] HALSTED, GEORGE B: *Mathematical Monthly,* 1894, 149–152.

[10] HILBERT, DAVID, 1899: *Grundlagen der Geometrie.* Traducción castellana por Francisco Cebrian, *Fundamentos de la Geometria,* CSIC, Madrid, 1953.

[11] KARTESZI, FERENC, 1987, EN JANOS BOLYAI: *Appendix, The Theory of Space,* editado por Kárteszi con introducción, comentarios y adiciones. North Holland, Amsterdam, 1987.

[12] LAMBERT, JOHANN HEINRICH, 1766: *Theorie der Parallellinien,* publicado en 1786. Publicado en Stäckel, 1895.

[13] LOBACHEVSKI, NICOLAI IVANOVICH, 1840:Nicolai Ivanovich, 1840, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien,* Fincke, Berlín, 1840.

[14] SACCHERI, GIOVANNI GIROLAMO, 1733: *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur Prima ipsa universae Geometriae Principia.* Milan, 1733.

[15] SCHWEIKART, FERDINAND KARL, 1824: Carta a (su sobrino) F.A. Taurinus de 18 Noviembre 1824. En Stäckel, 1895, pp. 245–246.

[16] STÄCKEL, PAUL, MIT FRIEDRICH ENGEL, 1895: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, einer Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichtteuklidischen Geometrie.* Editado por S. Stäckel. Leipzig, Teubner, 1895.

[17] TAURINUS, FRANZ ADOLPH, 1825: *Theorie der Parallellinien.* Parcialmente editado por Stäckel, 1895. Pueden verse también los textos filosóficos más importantes en O. Becker, *Grundlagen der Mathematik,* Verlag Karl Albert Freiburg, München, 1964 (2^a ed.). Pags. 183–185.

[18] TAURINUS, FRANZ ADOLPH, 1826: *Geometriae prima elementa.* Parcialmente traducido al alemán y publicado en Stäckel, 1895.

[19] TILLING, LAURA: Véase GRAY.