RECUERDO A EULER

BALTASAR RODRIGUEZ-SALINAS

Académico Numerario

Sin duda alguna los mayores matemáticos que ha habido hasta el siglo XVIII han sido Arquímedes, Newton y Euler. Por ello puedo estar contento por haber sido encargado para hablar de ellos en los ciclos de historia de la matemática que viene organizando esta Real Academia de Ciencias. Los tres coincidieron en hacer importantes aplicaciones, especialmente a la física, y reconocer al mismo tiempo la importancia primordial de la matemática pura de la que se sentían orgullosos cultivadores y constructores. De ellos se aprende que no se debe descuidar en los centros de matemática pura la enseñanza y conocimiento de la matemática aplicada, que por otra parte no puede subsistir sin la matemática pura o fundamental. Por esto es un disparate los actuales planes de estudio de matemática fundamental en los que se ha excluido la enseñanza de la física y de otras partes de la matemática aplicada.

En el anterior ciclo de historia de la matemática de 1988, dedicado a los siglos XVII y XVIII, ya hablaron algo sobre Euler los conferenciantes a los que correspondió, pero se ha juzgado que era insuficiente para lo que merece la figura de Euler. Esto justifica esta conferencia.

La vida y la obra de Euler

Desde el Renacimiento hasta el siglo XVIII el centro de actividad matemática se desplazó repetidas veces, de unas partes a otras, de Alemania a Italia, después a Francia, a Holanda, a Inglaterra, y si las persecuciones no hubiesen obligado a la familia Bernoulli a huir de Amberes, Bélgica hubiera ocupado un lugar importante, pero lo cierto es que esta familia emigró a Basilea, y como consecuencia de ello fue Suiza el lugar de nacimiento de muchas de las figuras más importantes de la matemática de finales del siglo XVII y comienzos del XVIII. No obstante la fama de los Bernoulli, y de otros como los Hermann, el matemático más importante que produjo Suiza durante esta época, e incluso en otras, fue Leonhard Euler (1707-1783).

Los ascendientes de Euler se instalaron en Basilea a finales del siglo XVI. Fueron casi todos artesanos, pero el padre de Euler, Paul Euler, fue pastor calvinista y se graduó en teología por la Universidad de Basilea, casándose con Margarete Brucker, hija de otro pastor protestante. El 15 de Abril de 1707 nació Leonhard en Basilea y en 1708 la familia se trasladó a Riehen, cerca de Basilea, donde Euler pasó su infancia.

El padre de Euler estudió matemáticas y de hecho asistió a las conferencias de Jakob Bernoulli en la Universidad y dio a su hijo una educación elemental que incluía las matemáticas. El padre de Euler esperaba, lo mismo que el padre de Jakob Bernoulli, que su hijo siguiera el camino del sagrado ministerio. Euler estudió por su cuenta el difícil libro *Algebra* de Christoff Rudolf (en la edición de Stifel, de 1553), y mientras seguía el Gymnasium recibió clases particulares de matemáticas. En 1720 ingresó Euler en la Facultad de Artes de la Universidad de Basilea. Esta Universidad era muy pequeña (¡poco más de cien estudiantes y diecinueve profesores!), en ella enseñaba la matemática elemental Johann I Bernoulli, que ocupaba la cátedra desde la muerte de su hermano Jakob en 1705. Así Euler estudió con Johann Bernoulli junto a sus hijos Nikolaus y Daniel, y en este ambiente faborable descubrió su vocación matemática. Johann Bernoulli daba, además de sus clases ordinarias, clases particulares a los alumnos interesados en la alta matemática y física. No faltó en ello la colaboración del padre de Euler a pesar de sus planes religiosos para su hijo.

Euler nos cuenta, en la breve autobiografía que dictó a su hijo mayor en 1767:

"Pronto encontré la oportunidad de ser presentado a un famoso profesor llamado Johann Bernoulli. Realmente él estaba muy ocupado y así rehusó de plano darme lecciones particulares, pero me dio en cambio consejos mucho más valiosos para comenzar a leer por mi propia cuenta libros de matemáticas más difíciles, y estudiarlos con toda la diligencia que pudiera; si me encontraba con algún obstáculo o dificultad, tenía permiso para visitarle con toda libertad los sábados por la tarde, y él me explicaba entonces amablemente todo lo que yo no consiguiera entender ... y éste es, sin duda, el mejor método para tener éxito en el estudio de temas matemáticos."

En el verano de 1722, Euler dio una charla en favor de la templanza y recibió su *prima laurea*, un grado análogo a Bachiller de Artes. En el mismo año actuó como ponente a la defensa de dos tesis - una sobre lógica, otra sobre historia del derecho -. En 1723 Euler recibió su Master en filosofía con un trabajo en el que comparaba las filosofías de Descartes y Newton. Poco tiempo antes se había incorporado al departamento de teología, cumpliendo así el deseo de su padre. Sus estudios en teología, griego y hebreo no fueron, sin embargo, satisfactorios, Euler dedicaba la mayor parte del tiempo a las matemáticas. Decidió no hacerse pastor, aunque a lo largo de toda su vida tuvo una profunda fe religiosa. También mantuvo los conocimientos de humanidades adquiridos, y dada su tremenda memoria era capaz de recitar la Eneida de Virgilio de memoria. A los setenta años era capaz de recordar la primera y la última línea de cada página de la edición que leyó cuando era jóven.

A los dieciocho años, en 1725, Euler comenzó sus investigaciones. Su primer trabajo, una pequeña nota sobre la construcción de una curva isócrona en un medio resistente, apareció en *Acta eruditorum* (1726), seguido de otro artículo en la misma revista sobre trayectorias recíprocas algebraicas (1727). Este problema había sido estudiado por Johann I Bernoulli, su hijo Nikolaus II y otros matemáticos de la época. El mismo año 1727 Euler concursó a un premio convocado por la *Academie des Sciences* de París sobre la colocación más adecuada de los mástiles de un barco. El premio fue ganado por Pierre Bouguer, y Euler sólo consiguió esta vez el *accesit,* pero entre 1738 y 1772 obtuvo doce primeros premios de dicha Academia.

En Suiza había pocas cátedras y por tanto la posibilidad de trabajo era pequeña. La valía no era motivo de colocación. Los editores por motivos financieros no se arriesgaban a publicar obras matemáticas. En ese tiempo, en 1724, Pedro el Grande aconsejado por Leibniz fundaba la Academia de Ciencias de San Petersburgo, que comenzó a funcionar y a buscar personal durante 1725. En otoño de este año, los hijos de Johann Bernoulli, fueron llamados allí y convencieron a la nueva Academia para invitar a su joven amigo.

Euler recibió, en efecto, esta invitación para trabajar en San Petersburgo como adjunto de fisiología, en el otoño de 1726, y comenzó en consecuencia a estudiar fisiología con la intención de aplicar en ella los métodos de la matemática y de la mecánica. Una vacante ocurrida en Basilea por la muerte de un profesor de física le indujo a presentar un trabajo sobre acústica, *Dissertatio physica de sono.* Las plazas vacantes se cubrían entonces por sorteo entre los candidatos, pero Euler no fue admitido a pesar de estar apoyado por Johann Bernoulli, probablemente por ser demasiado joven, ya que aún no había cumplido los 20 años.

Por fín, en Abril de 1727, Euler dejó Basilea y se fue a San Petersburgo. Desde entonces su actividad científica estuvo ligada a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, incluso cuando no trabajó físicamente en ella, y no volvería a pisar Suiza, aunque eso sí conservó toda su vida la nacionalidad suiza.

La llegada de Euler a San Petersburgo no estuvo rodeada precisamente de buenos augurios. Su amigo Nikolaus Bernoulli había muerto ahogado en el río Neva el año anterior a la edad de 30 años, y el mismo día en que llegaba Euler a San Petersburgo, el 24 de Mayo, moría la zarina Catalina I, viuda del zar Pedro el Grande, que había continuado la labor de su marido respecto a la Academia. Debido a ello, y a que los nuevos gobernantes veían con poca simpatía a los sabios extranjeros, la Academia estuvo a punto de sucumbir. Tanto es así, que Euler pensó en un principio ingresar en la marina rusa.

Afortunadamente, sin embargo, la Academia sobrevivió y Euler se vió formando parte de la sección de filosofía natural en vez de la de medicina. En 1731 fue nombrado profesor de física, y en 1733 sucedió a Daniel Bernoulli ya como profesor de matemáticas, cuando éste consiguió la cátedra de matemáticas en la Universidad de Basilea, sucediendo así a su hermano Nikolaus. A pesar de las dificultades por las que pasó la reciente Academia, floreció el genio de Euler. Se formó un excelente grupo de jóvenes científicos con los que Euler mantuvo estrecha relación: Jakob Hermann, un teórico de la mecánica, Daniel Bernoulli con quien además de unir una excelente amistad le unía un común interés en el campo de la matemática aplicada, Christian Goldbach con quien discutió numerosos temas de análisis y teoría de números, F. Maier que trabajaba en trigonometría y el astrónomo y geógrafo J.N. Delisle.

En San Petersburgo comenzó su auténtica actividad científica. No más tarde de Agosto de 1727, Euler comenzó a hacer informes para las sesiones de la Academia sobre sus investigaciones y a publicar sus trabajos desde el segundo número de la revista de la Academia, *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae.* El generoso programa de publicaciones de la Academia fue especialmente importante para Euler que estuvo extraordinariamente prolífico. Más tarde reconocía las favorables condiciones creadas en la Academia.

Además de dirigir trabajos puramente científicos, era obligación en la Academia educar y entrenar a científicos puros y con esta idea fueron creadas una Universidad y un Gymnasium. La Academia fue encargada por el gobierno de un estudio del territorio ruso y de resolver varios problemas tecnológicos. Euler fue muy activo en estos proyectos. En particular, desde 1733, trabajó con Delisle sobre mapas en el departamento de geografía y, posteriormente, en problemas de construcción naval y de navegación, lo que fue importante para que Rusia se convirtiese en una gran potencia. Otras tareas encargadas a Euler se refirieron a investigaciones en balística, hidráulica, óptica, bombas contra incendios, sierras, ... Aparte de ello también escribió Euler libros de texto para la enseñanza de la matemática a nivel elemental.

Los mayores esfuerzos de Euler fueron no obstante en matemáticas. Durante sus cuarenta años en San Petersburgo hizo importantes descubrimientos en matemáticas, física, mecánica y teoría de números. Ya en 1741 había preparado entre ochenta y noventa trabajos para su publicación, y tenía cincuenta y cinco publicados, incluyendo dos volúmenes de *Mechanica.*

Muchas de sus ideas surgieron en su juventud, pero es imposible fecharlas porque se publicaron y se desarrollaron más tarde. Por ejemplo, los primeros esbozos de la teoría del movimiento de sólidos, acabada en 1760, fueron proyectados mucho antes. Igualmente ocurrió con la hidromecánica, cuyas importantes memorias no aparecieron hasta la mitad de los cincuenta y la comenzó a estudiar en Basilea.

Como mantenía una amplia correspondencia con muchos científicos, sus descubrimientos fueron conocidos antes de su publicación con lo cual su prestigio creció rápidamente. Prueba de esto son los elogios que Johann Bernoulli hace de él como "el más inteligente hombre de ciencia" en 1728 o "el más famoso y profundo matemático" en 1737. Más tarde, Laplace reconocería también a Euler como el maestro de los matemáticos de su época.

Tuvo dos hijos con Katharina Gsell, Johann Albrecht que nació en 1734 y Karl en 1740. Parecía que San Petersburgo era providencial para Euler, a pesar de perder en 1735 la visión del ojo derecho por una enfermedad. En 1736 publica su obra en dos volúmenes: "*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*", que es el primer tratado analítico de mecánica y donde aparecen por vez primera, por ejemplo, las fórmulas de Newton en la forma en que las conocemos.

En Noviembre de 1740 Anna Lepoldovna, madre de Ivan IV, asumió la regencia y la atmósfera se hizo irrespirable en Rusia y, según el mismo Euler, "las cosas se empezaron a poner bastante inseguras". Por el mismo tiempo, en Junio de 1740, accedía al trono de Prusia Federico el Grande y decidía reorganizar la Sociedad de Ciencias de Berlín, fundada en 1700 por consejo y con la presidencia de Leibniz, pero que había decaído durante el reinado del padre de Federico. Euler fue invitado a colaborar en ella y el 19 de Junio de 1741 se embarcaba en San Petersburgo para llegar el 25 de Julio a Berlin, donde residiría durante los siguientes veinticinco años. La familia creció con el nacimiento de un tercer hijo y de dos hijas. La energía de Euler en su mediana edad era inagotable, trabajando simultáneamente en las Academias de Berlin y San Petersburgo. Fue muy activo transformando la vieja *Societé des Sciences de Berlin* en la gran *Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin* (Federico el Grande prefería la lengua francesa a la latina y a la alemana), de la que fue director de la sección matemática, siendo Maupertuis el presidente de la Academia hasta su muerte en 1759. Euler fue también miembro del comité de dirección de la Biblioteca y publicaciones científicas. Sustituyó a Maupertuis cuando éste se ausentaba, y a su muerte siguió dirigiendo la Academia aun sin nombramiento. La amistad entre Euler y Maupertuis tuvo gran influencia en el crecimiento de la Academia y en la selección de sus miembros.

En 1745 era miembro de las Academias de San Petersburgo y de Berlin. Posteriormente, en 1749, fue nombrado miembro de la *Royal Society of London* y de la *Académie des Sciences de Paris* en 1755. Anteriormente había sido elegido Académico en Basilea en 1743.

Las actividades administrativas en la Academia de Euler eran numerosas, supervisaba el observatorio y el jardín botánico; seleccionaba el personal; revisaba asuntos financieros, dirigía la publicación de calendarios y mapas geográficos de cuya venta se obtenían importantes beneficios. Todo ello prueba lo equivocados que están algunos que piensan que los hombres de ciencia, por el mero hecho de serlo, no valen para tales tareas. El mismo rey encargó a Euler problemas prácticos como un proyecto en 1749 para corregir el nivel del Canal Finow, construido en 1744 para unir el Havel y el Oder.

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, *& Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

En 1749 y también en 1763 fue consejero del gobierno en problemas de seguros, pensiones de viudedad y de otras cuestiones sociales. Algunos trabajos de Euler sobre crecimiento demográfico surgieron de esta época. Una pregunta sobre artillería formulada por el rey le llevó a traducir *New Principles of Gunnery* de Benjamin Robins. Euler añadió contribuciones sobre balística que eran cinco veces más numerosas que el tratado original, y que forman un importante documento en la historia de la balística.

Las relaciones entre Euler y la Academia de San Petersburgo sólo se vieron interrumpidas, y no totalmente, durante la guerra de los Siete Años entre Prusia y Rusia. Mantuvo el título de miembro de la Academia de San Petersburgo aún después de su partida a Berlin. La participación en esta Academia era más que formal pues muchas veces decidió sobre las enseñanzas de los científicos rusos y revisó incluso trabajos de miembros de la Academia. Finalmente, Euler publicó la mitad de sus artículos en latín a través de la Academia de San Petersburgo y la otra mitad, en francés, en Berlín.

Durante el período de Berlín, Euler aumentó la variedad de sus investigaciones. Compitiendo con d'Alembert y Daniel Bernoulli, estudió la fundamentación de la física matemática, y teniendo como rivales a Clairaut y d'Alembert trabajó sobre la teoría lunar y el movimiento de los planetas. Simultáneamente hizo la teoría del movimiento de los sólidos, creó el aparato matemático de la hidromecánica, desarrolló la geometría diferencial de las superficies y estudió intensamente la óptica, electricidad y magnetismo, así como obtuvo resultados de ingeniería como la teoría de la rueda dentada y de los engranajes.

En este período, en Berlín, Euler escribió no menos de 380 trabajos, de los cuales 275 fueron publicados, incluyendo extensos libros: *Methodus iuveniendi lineas curvas maximi minive propietate gaudentes* (1744), que constituye el primer tratado sistemático de cálculo de variaciones; *Theoria motuum plaetarum et cometarum* sobre cálculo de órbitas (1745); un trabajo sobre artillería y balística (1745); *Introductio in analysin infinitorum,* en dos volúmenes, en 1748; un tratado de construcción naval y navegación iniciado en San Petersburgo (1749); su primera teoría sobre el movimiento lunar, *Theoria motus lunae* (1753); e *Institutiones calculi differentialis* (1955). Finalmente hay un trabajo sobre la mecánica de sólidos *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1965). Tampoco se debe olvidar la famosa *Lettres á une princesse d'Allemagne,* cuyas 234 cartas a una sobrina de Federico el Grande, sobre diversas cuestiones de física y filosofía, fueron publicadas, ya en San Petersburgo, en 1768 y 1772.

En las décadas de los cuarenta y de los cincuenta Euler tomó parte en varias discusiones científicas y filosóficas. Así entre 1745 y 1750 se produjo en Alemania una viva polémica entre los intelectuales sobre las teorías filosóficas de las mónadas de Leibniz y Christian Wolff. Los intelectuales alemanes estaban divididos. La Academia de Berlín convocó un premio en 1747 sobre exposición y crítica del sistema. Euler que estaba próximo al materialismo mecanicista cartesiano en la filosofía natural era un ardiente enemigo de la monadología como lo era Maupertuis. Debería añadirse que


ANALYSE
DES
INFINIMENT-
PETITS.
CALCUL
DIFFEREN
TIEL
TABLE
DES
SINUS
De la Monce inv.
Soubeyran Sculp.

Euler, cuyo punto de vista religioso estaba basado en la creencia de la Revelación, no podía compartir el racionamismo de Leibniz y Wolff. Creemos que hoy día se pueden conciliar ambas tendencias. Euler expuso sus objeciones, las cuales fundamentó con argumentos físicos y teológicos, en *Gedancken von den Elementen der Cörper ...* (1746). Este trabajo no fue premiado, sino otro mediocre de Justi dirigido también en contra de la teoría de las mónadas, pero provocó una dura polémica.

Otro escándalo estalló en 1751 cuando S. König publicó un trabajo criticando el principio de mínima acción de Maupertuis (1744) y citó una carta de Leibniz en donde, en la opinión de König, el principio era formulado con más precisión. Enviado a Maupertuis, la Academia de Berlín le defendió exigiendo el original de la carta de Leibniz y no la copia que König había enviado. La carta no apareció y Euler publicó con aprobación de la Academia su *Exposé concernant a l'examen de la lettre de M. de Leibniz* (1752), en donde entre otras cosas declaraba que la carta era una falsificación. El conflicto creció cuando Voltaire intervino: como racionalista y librepensador estaba muy alejado de las posiciones religiosas de Euler, y no solía desperdiciar la ocasión de tratar de poner en ridículo las opiniones filosóficas de Euler, cosa que éste aceptaba con buen humor, brillando así su carácter benévolo y comprensivo. El mismo año de 1752 publicó Voltaire su panfleto *Diatribe du docteur Akakia, médecin du pape,* defendiendo a König y ridiculizando a Euler y Maupertuis. La cosa tuvo gran repercusión y Federico el Grande se vió obligado a salir en defensa de Maupertuis, a pesar de su gran amistad con Voltaire, y ordenó que el ofensivo panfleto fuese destruido, lo que no impidió su difusión por toda Europa. De este modo la discusión sobrepasó a sus participantes y se extendió a posturas filosóficas y teológicas.

Euler tomó parte en otras tres discusiones de mayor interés para las matemáticas: la que mantuvo con d'Alembert sobre el logaritmo de los números negativos; la discusión con d'Alembert y Daniel Bernoulli sobre la solución de la cuerda vibrante; y finalmente la polémica de Euler con Dollond sobre problemas ópticos.

Como mencionamos anteriormente, después de la muerte de Maupertuis en 1759, Euler dirigió la Academia de Berlín, pero bajo la directa supervisión del rey. Las relaciones entre Federico y Euler se habían deteriorado. La personalidad sencilla y el talante religioso de Euler no encajaban bien en la corte sofisticada e ilustrada de Federico, el cual mostraba más interés por la filosofía y la poesía que por la ciencia. En este ambiente, Euler resultaba un personaje mucho menos brillante que Voltaire. Esto llevó a que nunca el rey diese el título de presidente de la Academia a Euler. Hacia 1763 se conoció que el rey tenía la intención de nombrar presidente de ella a d'Alembert, y ante esta situación Euler comenzó a pensar en abandonar Berlín. Escribió a G.F. Müller, secretario de la Academia de San Petersburgo, el cual había intentado antes recuperarlo, y Catalina la Grande dio las órdenes oportunas para que se le invitara a regresar.

El regreso se aplazó en vista de que d'Alembert rehusó trasladarse a Berlín, pero las relaciones entre Federico y Euler empeoraron durante 1765 y 1766 debido a las constantes interferencias del rey en los asuntos financieros de la Academia. Este pensó que Euler era inexperto en la materia y delegó muchas funciones en el tesorero de la Academia. Euler solicitó el permiso real para abandonar su puesto en la Academia, pero el rey consciente de la pérdida declinó el permiso, pero al final tuvo que consentir manifestando su disconformidad con crueles críticas a Euler. Así se refería a éste como "el ciclope matemático", broma de dudoso gusto, dado que Euler era tuerto. El 9 de Junio de 1766 Euler dejó Berlín y con él sus hijos. Poco después de su llegada a San Petersburgo sufrió una breve enfermedad por la que perdió casi toda la vista del único ojo sano, el izquierdo. Una operación en 1771 le devolvió la vista temporalmente, pero al final quedó ciego. Justo antes de la operación había perdido su casa en un incendio en el que desaparecieron muchos manuscritos. En 1773 murió su mujer y tres años después se casó con una prima de ella Salomé Abigail Gsell.

La ceguera de Euler no le impidió continuar su actividad científica. Sólo el último año de su vida dejó de atender sus obligaciones académicas, incluso su obra literaria se acrecentó pues publicó más de la mitad de sus trabajos después de 1765. Naturalmente, dejó de trabajar en solitario y colaboró con otros investigadores: sus hijos Johann Albrecht y Christoph; los académicos Krafft y Lexell y dos jóvenes discípulos Fuss y Golovin. En esa época dictaba sus trabajos, por ejemplo, los dos volúmenes de *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770), que fue publicado primero en ruso.

Los científicos que ayudaban a Euler no eran meros secretarios sino que discutían las ideas, las desarrollaban, calculaban las tablas y algunas veces buscaban ejemplos. La enorme *Theoria motuum lunae* ... (1772) de 775 páginas fue completada por Johann Albrecht, Lexell y Krafft que también firmaron la obra. Krafft también ayudó a Euler en la *Dioptrica* de tres volúmenes (1769-1771). Fuss por su cuenta preparó durante siete años 250 memorias y Golovin unas setenta. Los artículos de Euler en su última época eran generalmente concisos y particulares.

Además de los trabajos comentados, durante el segundo periodo de San Petersburgo, Euler publicó tres volúmenes de *Institutiones calculi integralis* (1768-1770), de la cual la parte principal había acabado en Berlín, y una edición de *Scientia navalis-Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux* (1773). Este último fue traducido rápidamente al inglés, al italiano y al ruso, para ser utilizado como texto en las escuelas navales, y por este motivo Euler recibió grandes cantidades de dinero de los gobiernos ruso y francés.

El aparato matemático de la *Dioptrica* permaneció como conocimiento básico de los ópticos. Fuss también ayudó a Euler a preparar los *Éclaircissemens sur les etablissemens publics* ... (1776), el cual era muy importante en la teoría de seguros, de modo que muchas compañías usaron sus métodos y tablas.

Por lo que se refiere a la producción de artículos, el ritmo era tal que los iba amontonando apilados sobre su mesa de trabajo y, cuando iba a recogerlos el encargado de los *Comentarii,* se llevaba siempre los de encima, con la desagradable consecuencia de que muchos aparecieran en orden inverso a como habían sido escritos.

El 18 de Septiembre de 1783 Euler pasó la mañana dando una lección de matemáticas a uno de sus nietos, hizo unos cálculos sobre el movimiento de los globos (era reciente la noticia de la ascensión en globo de los hermanos Montgolfier en París, pocos meses antes), y más tarde estuvo comentando con Lexell y Fuss el reciente descubrimiento del planeta Urano por Herschel. Sobre las cinco de la tarde, mientras tomaba el té y jugaba con uno de sus nietos, sufrió una hemorragia cerebral que sólo le permitió decir "me estoy muriendo". Así con la tranquilidad de una vida ejemplar murió a los 76 años.

Poco después de su muerte Fuss hizo su necrología en la Academia de Ciencias de San Petersburgo y Condorcet en la de París. Fue enterrado en San Petersburgo y sus restos y monumento fue llevado a la necrópolis de Leningrado en el otoño de 1956.

Durante casi medio siglo después de su muerte continuaron apareciendo obras inéditas de Euler en las publicaciones de la Academia de San Petersburgo. Una lista bibliográfica de las obras conocidas de Euler, incluidas las últimas, contiene 886 trabajos y se calcula que sus obras completas, que se están publicando desde 1911 bajo los auspicios de la Academia de Ciencias de Suiza, alcanzarán probablemente los 100 volúmenes.

Esta es la vida y la obra, descrita de manera general, de Leonhard Euler, de un hombre admirado y respetado en su tiempo por toda Europa, tanto por su impresionante obra científica como por su carácter noble y de "hombre bueno" en el verdadero sentido de la palabra.

Ahora vamos a entrar en más detalles.

Matemáticas

Euler fue un geómetra en el sentido amplio en que dicha palabra se usaba en el siglo XVIII. Fue uno de los más grandes creadores de la ciencia matemática desde Newton. En su trabajo, las matemáticas estaban estrechamente relacionadas con las aplicaciones a otras ciencias, tecnología y problemas de la vida cotidiana. En numerosos casos elaboró métodos matemáticos para obtener soluciones directas de problemas de mecánica y astronomía, física, navegación, geografía y geodesia, hidráulica y balística, seguros y demografía. Esta tendencia práctica explica su tendencia a prologar sus investigaciones hasta que se hubiese obtenido una fórmula calculable o una solución inmediata numérica o una tabla. Constantemente Euler buscó algoritmos que fuesen lo suficientemente simples para usar en cálculos y que asegurasen una suficiente precisión en los resultados.

Pero así como su amigo Daniel Bernoulli era ante todo un físico, Euler era sobre todo un matemático. El pensamiento de Bernoulli era físico e intentaba evitar en la medida de lo posible la matemática; Euler por el contrario intentaba explicar el problema físico en términos matemáticos y cuando encontraba la solución matemática, él lo desarrollaba y generalizaba. Bernoulli no estaba especialmente atraído por los problemas matemáticos abstractos; Euler por el contrario estaba muy interesado por ellos y la teoría de números. todo esto se manifiesta en la distribución de los trabajos de Euler, veintinueve volúmenes de *Opera omnia* pertenecen a la matemática pura.

En la obra de Euler toma preponderancia el análisis porque era el que necesitaba mayor desarrollo en aquella época; diecisiete volúmenes de *Opera omnia* están dedicados a este área. Por ello, especialmente, a Euler se le puede considerar un analista. Contribuyó a muchos descubrimientos en análisis, sistematizó sus exposiciones en los manuales, a lo largo de los cuales fundamentó disciplinas como el cálculo de variaciones, la teoría de ecuaciones diferenciales, la teoría elemental de las funciones complejas y la teoría de funciones especiales.

Euler es frecuentemente clasificado como un genio del cálculo y de hecho fue imbatible en cálculos formales y transformaciones. Además creó nuevos e importantes conceptos y métodos que, en algunos casos, sólo han sido valorados e incluso entendidos un siglo o más después de su muerte. Su profunda intuición llegó a áreas no habituales para él. Sus descubrimientos pudieron ser fundamentados con el rigor exigido en los siglos XIX y XX. Estos controles no podían, en general, exigirse a los matemáticos del siglo XVIII.

Por observación Euler llegó a la deducción de leyes matemáticas y empleó métodos de inducción para llegar a través del análisis a muchos resultados. Pero muchas veces advirtió que una inducción incompleta sólo podía servir como un hecho heurístico y que era necesario probar la verdad de las suposiciones previas a tales métodos.

Euler introdujo muchas de las actuales notaciones: "e" para representar la base de los logaritmos naturales (1727, publicado en 1736); la consagración definitiva del uso de la letra griega π para representar la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro se debe en buena parte a él, aunque ya se había utilizado el año antes de su nacimiento; el símbolo i para $\sqrt{-1}$ es otra de las notaciones introducidas por Euler, aunque en este caso lo adoptó hacia finales de su vida en 1777. Probablemente este retraso se debe a que en sus obras anteriores había utilizado la letra i para representar un "número infinito", en un sentido análogo (pero no idéntico) al del ∞ de Wallis; así Euler escribía

$$e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$$

en lugar de

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n .$$

De hecho, aunque Euler utilizó i para denotar $\sqrt{-1}$ en un manuscrito fechado en 1777, tal manuscrito no se publicó hasta 1794, de manera que la adopción de dicho símbolo por Gauss en su obra clásica *Disquisitiones aritmeticae,* de 1801 fue la que le aseguró un puesto definitivo en la historia de las notaciones matemáticas. Los tres símbolos, e, π, i se relacionan con los dos enteros 0 y 1, por medio de la famosa igualdad $e^{\pi i} + 1 = 0$ en la que figuran los cinco números más importantes de toda la matemática. Una fórmula equivalente a éste aparece en la más famosa de las obras de Euler *Introductio in analysin infinitorum,* publicada en 1748.

Euler también introdujo el uso de la letra f y del paréntesis para denotar una función f ([x/a] + c) (1734, publicado en 1740); los signos modernos para las funciones trigonométricas (1748); la notación $\int n$ para la suma de los divisores de un número n (1750); las notaciones para las diferencias finitas Δ y, Δ^2 y, ... y para la suma Σ (1755). Pero el nombre de Euler no aparece asociado a ninguno de los símbolos que intervienen en esta relación, sino que está reservado a la llamada "constante de Euler", que se suele representar por la letra griega γ o por C, y que es el número definido por

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}- \ln n\right),$$

número bien conocido y que se ha calculado con cientos de decimales, de los que los diez primeros son 0,5772156649 ...

Como en otras partes de las matemáticas, también en geometría, nos encontramos en cada momento con el uso de los símbolos, terminología e ideas debidos a Euler. el uso de las letras minúsculas a, b, c para designar los lados de un triángulo y de las correspondientes letras mayúsculas A, B, C para los ángulos respectivamente opuestos a ellos proviene de Euler, así como el uso de las letras r,R y s para los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita y el semiperímetro del triángulo, respectivamente. La bella fórmula 4rRs = abc que relaciona esas seis longitudes es también uno de los muchos resultados elementales que se le atribuyen, aunque pueden encontrarse fórmulas equivalentes en la geometría antigua.

Euler fue también el primero que escribió las ecuaciones diferenciales del movimiento, en 1735, en la forma

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{X}{M}, \frac{ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M}, \frac{ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M},$$

siendo z, y, z las coordenadas del punto móvil, M su masa y Z, Y, Z las componentes de la fuerza motriz.

Euler tenía sólo unos pocos discípulos y ninguno fue un científico de primera línea. Pero según Laplace fue el maestro de todos los matemáticos de su tiempo. En matemáticas el siglo XVIII podría ser llamado la Edad de Euler, pero su influencia y estela se extendió mucho más de este periodo. Muchas ramas matemáticas del siglo XIX parten de los trabajos de Euler.

Euler fue especialmente importante en el desarrollo de la ciencia en Rusia. Sus discípulos formaron la primera escuela científica del país y contribuyeron al crecimiento de la educación matemática.

Teoria de números

Los problemas de la teoría de números habían atraído ya a los matemáticos antes de Euler. Fermat, por ejemplo, estableció varios teoremas aritméticos pero no dejó casi ninguna demostración. Euler estableció el fundamento de la teoría de números como una ciencia auténtica.

Una gran parte de los trabajos de Euler está conectada con la teoría de la divisibilidad, así probó por tres métodos el teorema menor de Fermat (1741, 1761, 1763); sugirió con la tercera demostración una importante generalización del teorema introduciendo el indicador o función de Euler φ (n), que como se sabe es el número de enteros positivos menores que n, primas con n: la diferencia $a^{\varphi(n)} - 1$ es divisible por n si a es primo con n. Elaborando ideas relacionadas con ello llegó a la teoría de los resíduos n-icos (1760). Aquí su gran descubrimiento fue la ley de reciprocidad cuadrática (1783), la cual, sin embargo, no pudo probar. El descubrimiento permaneció desconocido para sus contemporáneos y la ley fue descubierta por A.M. Legendre (1788) con una demostración incompleta. A éste le fue atribuída hasta que Chebyshev la reivindicó para Euler en 1849. La demostración completa fue dada por Gauss (1801). Gauss, Kummer, Hilbert, Artin y otros extendieron la ley de reciprocidad a varios cuerpos de números algebraicos; la más general parece ser debida a I.R. Shafarevich (1950).

Otro grupo de trabajos de Euler, en los cuales extendió los estudios de Fermat, trata sobre la representación de números primos por sumas de la forma $mx^2 + ny^2$, donde m, n, x, y son enteros positivos, lo que le llevó a descubrir un método eficaz para determinar si un número grande es primo o no. Estos trabajos forman la base de la teoría aritmética general de las formas cuadráticas desarrollada por Lagrange y Gauss.

Euler también contribuyó al denominado análisis diofántico, es decir, a la solución en números enteros o racionales de ecuaciones con coeficientes enteros. Entonces, por medio de fracciones continuas, que había estudiado previamente (1744), dio en 1767 un método de cálculo de la más pequeña solución de la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$ (siendo d un entero positivo, no cuadrado perfecto). Esto había sido estudiado por Fermat y Wallis e incluso por matemáticos de la India y de la Grecia antigua. Una completa investigación del problema fue pronto realizada por Lagrange. En 1753 Euler probó la imposibilidad de resolver $x^3 + y^3 = z^3$, donde x, y, z son enteros no nulos (un caso particular del último teorema de Fermat); su demostración basada en el método de descensión infinita y usando números complejos de la forma $a + b\sqrt{-3}$ se describe en su *Vollständige Anleitung zur Algebra,* cuyo segundo volumen (1769) tiene una enorme sección dedicada al análisis diofántico.

Fermat había afirmado que todo número de la forma $2^{2^k} + 1$ es primo. Pero Euler, poniendo en juego su sorprendente habilidad de cálculo, refutó esta afirmación al descubrir que $2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ se puede factorizar como producto de 641 y 6700417. De la misma manera que Euler derribó esta conjetura por medio de un contraejemplo, el siglo XX ha venido a refutar una conjetura formulada por Euler: Euler creía que si $n > 2$ entonces son necesarias al menos n potencias n-ésimas para obtener sumándolas otra potencia n-ésima; pero en 1966 se demostró que la suma de sólo cuatro quintas potencias puede dar como resultado otra quinta potencia, como ocurre con $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$. Además dicha conjetura de Fermat está tan desprestigiada que los matemáticos se inclinan más bien por la opinión contraria de que $2^{2^k} + 1$ no es primo para $k > 4$.

En todos estos casos Euler usó métodos aritméticos y algebraicos, pero también fue el primero en utilizar métodos analíticos en la teoría de números. Para resolver el problema de la partición propuesto por P. Naudé en 1740, concerniente al número de formas en que un número positivo n se puede expresar como suna de enteros positivos $m < n$, Euler usó los desarrollos de ciertos productos infinitos en series de potencias cuyos coeficientes dan la solución (1748). En particular, en el desarrollo

$$\prod_{r=1}^{\infty} (1 - x^r) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{(3k^2-k)/2} \quad ,$$

la serie de la derecha es una función theta, introducida por C. Jacobi en su teoría de funciones elípticas. Antes, en1737, Euler había obtenido la famosa identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad ,$$

donde el producto se extiende sobre todos los números primos p (1744). El miembro de la izquierda es precisamente la función zeta ζ (s) de Riemann.

Mediante la sumación de series divergentes y la inducción, Euler descubrió en 1749 (1768) una ecuación funcional relacionando ζ (s), ζ (1-s) y Γ (s), que fue redescubierta por Riemann, quien definió por primera vez la función zeta incluso para valores complejos. Esta función se convirtió en uno de los principales objetivos de la teoría analítica de números, particularmente en los estudios sobre las leyes de distribución de los números primos de Dirichlet, Chebyshev, Riemann, Hadamard, de la Vallée-Poussin, y otros.

Finalmente, Euler estudió constantes matemáticas y formuló importantes problemas de la teoría de números transcendentes. Su expresión del número e en forma de fracción continua (1744) fue usada por J.H. Lambert (1768) en su demostración de la irracionalidad de los números e y π. F. Lindemann empleó la fórmula de Euler ln(-1) = πi (descubierta antes de 1728) para probar que π es transcendente (1882). La hipótesis de la transcendencia de a^b, donde a es un número algebraico $\neq$ 0,1 y b es un número algebraico irracional, formulada por Hilbert en 1900 y probada por A. Gelfond en 1934, presenta una generalización de la correspondiente hipótesis de Euler sobre los logaritmos de números racionales con base racional.

Algebra

Cuando los matemáticos del siglo XVII formularon el teorema fundamental de que una ecuación algebraica de grado n con coeficientes reales tiene n raíces, que podían ser imaginarias, todavía permaneció desconocido que el dominio de las raíces imaginarias se restringía a raíces de la forma a + bi, llamadas números complejos por Gauss. Muchos matemáticos pensaban que existían números o cantidades imaginarias de otro tipo. En su carta a Nikolaus Bernoulli y a Goldbach (fechada en 1742), Euler establece por primera vez el teorema de que cada polinomio de grado n con coeficientes reales podía ser resuelto en factores reales lineales o cuadráticos, esto es, poseía n raíces de la forma a + bi. El teorema, atribuido a A. Girard, fue probado por d'Alembert (1748) y por Euler (1751). Ambas demostraciones, muy diferentes en ideas, tenían omisiones que se resolvieron en el siglo XIX.

Euler también aspiró - ciertamente en vano - a encontrar soluciones mediante radicales de las ecuaciones de grado mayor que cuatro (1738, 1764). Elaboró métodos numéricos de solución de ecuaciones numéricas (1748) y estudió el problema de la eliminación. De hecho, dio la primera demostración del teorema conocido por Newton de que dos curvas algebraicas planas de grados m,n se cortan en mn puntos (1748, 1750). Pero la primera demostración satisfactoria de él se debe a E. Bézout en 1771.

CAPUT IV.

De explicatione Functionum per series infinitas.

59. Cum Functiones fractæ atque irrationales ipsius z non in forma integra $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. continentur, ita ut terminorum numerus sit finitus, quæri solent hujusmodi expressiones in infinitum excurrentes, quæ valorem cujusvis Functionis sive fractæ sive irrationalis exhibeant. Quin etiam natura Functionum transcendentium melius intelligi censetur, si per ejusmodi formam, etsi infinitam, exprimantur. Cum enim natura Functionis integræ optime perspiciatur, si secundum diversas potestates ipsius z explicetur, atque adeo ad formam $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. reducatur, ita eadem forma aptissima videtur ad reliquarum Functionum omnium indolem menti repræsentandam, etiamsi terminorum numerus sit revera infinitus. Perspicuum autem est nullam Functionem non integram ipsius z per numerum hujusmodi terminorum $A + Bz + Cz^2 +$ &c. finitum exponi posse; eo ipso enim Functio foret integra; num vero per hujusmodi terminorum seriem infinitam exhiberi possit, si quis dubitet, hoc dubium per ipsam evolutionem cujusque Functionis tolletur. Quo autem hæc explicatio latius pateat, præter potestates ipsius z exponentes integros affirmativos habentes, admitti debent potestates quæcunque. Sic dubium erit nullum quin omnis Functio ipsius z in hujusmodi expressionem infinitam transmutari possit: $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} +$ &c. denotantibus exponentibus α, β, γ, δ, &c. numeros quoscunque.

60. *Per divisionem autem continuam intelligitur fractionem* $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ *resolvi in hanc seriem infinitam* $\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} -$ *&c., quæ, cum quilibet terminus ad sequentem habeat rationem constantem* $1 : \frac{\beta z}{\alpha}$, *vocatur series geometrica.*

Potest vero quoque hæc series ita inveniri, ut ipsa initio pro incognita habeatur: ponatur enim $\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ &c. atque ad æqualitatem producendam quærantur coëfficientes A, B, C, D, &c. Erit ergo $a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c.$)$, & multiplicatione actu peracta fiet

$$\begin{aligned} a = \alpha A &+ \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{\&c.} \\ &+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{\&c.} \end{aligned}$$

Quamobrem esse debet $a = \alpha A$, ideoque $A = \frac{a}{\alpha}$, & coëfficientium uniuscujusque potestatis ipsius z summa nihilo æqualis est ponenda: unde prodibunt hæ æquationes,

$$\begin{aligned} \alpha B + \beta A &= 0 \\ \alpha C + \beta B &= 0 \\ \alpha D + \beta C &= 0 \\ \alpha E + \beta D &= 0 \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

cognito ergo quovis coëfficiente facile reperitur sequens; si enim fuerit coëfficiens termini cujusque $= P$ & sequens $= Q$ erit $\alpha Q + \beta P = 0$ sive $Q = -\frac{\beta P}{\alpha}$.

Cum

Series infinitas

En los trabajos de Euler, las series infinitas, que le habían servido como auxiliares para resolver problemas, fueron objeto de estudio. Por ejemplo, la función zeta. Su punto de partida fue la suma de los recíprocos de los cuadrados de los enteros

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) ,$$

la cual había sido intentada sin éxito por Leibniz, los hermanos Bernoulli, Stirling y otros matemáticos sobresalientes. Como muestra del atrevimiento de Euler vamos a contar cómo resolvió este problema, planteado por Oldenburg a Leibniz en una carta de 1673. Euler partió de la conocida serie

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

considerando la ecuación sin z = 0 como una ecuación polinómica infinita. Entonces como las raíces de la ecuación

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \ldots$$

son π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, ..., la suma de los inversos de las raíces es igual al coeficiente del término de primer grado cambiado de signo, en este caso 1/3!. Por tanto,

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ldots$$

y

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots .$$

Euler resolvió en 1735 otro problema más general y demostró que para todo entero par 2k > 0,

$$\zeta\,(2k) = a_{2k}\pi^{2k} ,$$

donde los a_{2k} son números racionales (1740), expresados por los coeficientes de la fórmula sumatoria de Euler-Maclaurin (1750) y, por tanto, mediante los números de Bernoulli (1755). El problema de la naturaleza aritmética de $\zeta\,(2k+1)$ permanece aún sin resolver. El problema general de la sumación de las series convergentes cuyo término u_n es función racional de n fue tratado y resuelto por nosotros en el Bachillerato y publicado en 1951. Para ello empleamos la función meromorfa $\Gamma'(z) / \Gamma(z)$.

La fórmula de sumación fue descubierta por Euler no después de 1732 (1738) y demostrada en 1735 (1741). Fue también descubierta por Maclaurin no más tarde de 1738 (1742). La fórmula, una de las más importantes en el cálculo de diferencias finitas, representa la suma parcial $\sum_{n=1}^{m} u(n)$ de una serie por otra serie infinita en donde figuran la integral y las derivadas del término general u(n). Más tarde Euler expresó los coeficientes mediante los números de Bernoulli (1755). Euler sabía que aunque esta serie infinita en general diverge, sus sumas parciales bajo ciertas condiciones pueden servir como un método espectacular de aproximación de cálculos, empleado por James Stirling (1730) en el caso particular de

$$\sum_{n=1}^{m} \log(n\,!)\,.$$

Por medio de la fórmula de sumación, Euler calculó en 1735 (1741) dieciseis cifras decimales de la citada constante de Euler γ, que aparece en la fórmula asintótica

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \ln(m) + \gamma + o(1)\,,$$

que había descubierto en 1731 (1738).

Como anécdota contamos que siendo alumno del Instituto de Alcalá de Henares encontramos dicha fórmula de sumación de Euler-Maclaurin. El artículo correspondiente, con un método original y aplicaciones, fue publicado en la Revista Euclides (1943) y juzgado por el Prof. Puig Adam mereció el Primer Premio de Matemáticas del concurso convocado el mismo año entre los Institutos de Enseñanza Media.

Las funciones que se estudiaron en el siglo XVIII eran, salvo casos raros, analíticas y Euler hizo uso de las series de potencias. Su especial mérito fue la introducción de un tipo nuevo y extremadamente importante de series de Fourier trigonométricas. En una carta a Goldbach (1744), él expresó por vez primera una función algebraica por una tal serie (1755),

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\,,$$

Más tarde encontró otros desarrollos (1760), deduciendo en 1777 una fórmula para el desarrollo de una función en serie de cosenos en el intervalo $(0,\pi)$, y puntualizando que la serie de senos podía ser obtenida de forma análoga. Fourier dedujo de forma independiente las mismas fórmulas en 1807. Pero por su parte, Euler no sabía que los coeficientes del desarrollo en serie de cosenos había sido dado por Clairaut en 1759.

Euler también introdujo el desarrollo de funciones en productos infinitos y como suma de fracciones elementales, los cuales adquirieron gran importancia en la teoría general de funciones analíticas. Numerosos métodos de transformación de series infinitas, productos infinitos y fracciones continuas se debieron a él.

Los matemáticos del siglo XVIII distinguían entre series convergentes y divergentes, pero aún faltaba la teoría de la convergencia. Las operaciones algebraicas y analíticas con series infinitas se hacían de forma análoga que con los usuales polinomios, sin ninguna restricción. No obstante, sobre las series divergentes las opiniones diferían. Muchos matemáticos eran totalmente contrarios a su empleo. Euler, seguro de que podían llegarse a resultados correctos mediante las series divergentes, intentó formalizar su utilización para legitimarlas. con este propósito, sugirió un nuevo y más amplio concepto de suma de una serie, que coincide con la tradicional definición si la serie converge. Además propuso dos métodos de sumación (1755). Su labor hizo posible el crecimiento de dicha teoría en los siglos XIX y XX.

La serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

ya considerada por Jakob Bernoulli y Leibniz, dio lugar, desde Euler a Cauchy, a numerosas discusiones. Cauchy la da como ejemplo del empleo ilegítimo de series divergentes. Euler considera a 1/2 como su suma y esta afirmación tiene para él la significación siguiente: si por un cálculo cualquiera se suma dicha serie, el resultado de este cálculo es ciertamente 1/2. Así presentada y tomada a la letra la proposición de Euler es ciertamente inexacta pues si se hace $x = 1$ (o $x \to 1$) en

$$\frac{1-x^{m}}{1-x^{n}} = 1 - x^{m} + x^{n} - x^{m+n} + \ldots$$

se obtiene

$$\frac{m}{n} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$

Leibniz había ya considerado la serie $1 - 1 + 1 - \ldots$ en el cálculo de probabilidades dando como valor de su suma más probable 1/2. Por otra parte, Lagrange hizo observar que la objeción no era esencial porque en el caso $m = 3$, $n = 5$ se debía escribir

$$\frac{3}{5} = 1 + 0 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 + 0 - 1 - 0 + 1 + \ldots$$

y no

$$\frac{3}{5} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$

El límite generalizado de Banach sobre las sucesiones acotadas resuelve el problema de Euler, precisado por H. Borel en su libro de series divergentes. En efecto, cualquiera que sea el límite generalizado de Banach que se aplique sobre las sumas parciales de dicha serie se obtiene 1/2 como suma de ella. Sin embargo, si se utiliza el límite según un ultrafiltro resultan 0 o 1 como sumas de dicha serie, pero entonces no vale la ley formal $\lim_{n} x_{n+1} = \lim_{n} x_n$.

El concepto de función.

Fundamentación del análisis.

Los descubrimientos en el campo del análisis realizados en la mitad del siglo XVIII (muchos de ellos suyos) fueron recopilados por Euler en la trilogía *Introduction in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768-1770). Puede decirse con justicia que Euler hizo por el análisis infinitesimal de Newton y Leibniz lo que Euclides había hecho por la geometría griega y, en particular, de Eudoxo, o lo que Viète había hecho por el álgebra de Al-Khowarizmi y de Cardano. Euler tomó el cálculo diferencial y el cálculo de fluxiones y los integró en una rama más general de la matemática que ha recibido desde entonces el nombre de "análisis", que trata de los procesos infinitos. Si podemos considerar los *Elementos* como la piedra angular de la geometría, y a la *Al-jabr wa'l muqābalah* como la piedra fundamental del álgebra, entonces a la *Introductio in analysin infinitorum* de Euler la podemos considerar, con igual razón, como la piedra angular del nuevo análisis.

En *Introductio* Euler presenta la idea de que el análisis matemático es la ciencia de las funciones, y también un agudo estudio sobre el concepto de función. Definiendo la función como una expresión analítica compuesta de variables y constantes - siguiendo en este aspecto a Johann Bernouilli - Euler precisó el término "expresión analítica" como las funciones obtenidas por medio de operaciones algebraicas y también de otras operaciones elementales y trascendentes entre las que figura la integración. Aquí la clasificiación de funciones entonces vigente es todavía conservada; Euler habla de funciones paramétricas e implícitas. Más adelante establece sobre estas ideas que todas las expresiones analíticas pueden expresarse como series de potencias enteras o con exponentes racionales, positivos o negativos. Por tanto, las funciones así estudiadas son analíticas con algunos puntos singulares aislados. La puntualización de Euler de que los valores de las variables independientes de las funciones podían ser imaginarios es muy importante.

Incluso en aquel tiempo, la clase de las funciones analíticas era insuficiente para los requerimientos del análisis y sus aplicaciones, particularmente para el problema de la cuerda vibrante. Aquí Euler encontró funciones "arbitrarias" geométricamente representadas a trozos por curvas de forma arbitraria, funciones que generalmente no son analíticas (1749). El problema de la amplitud de la clase de funciones utilizadas en física matemática y, en general, en análisis y el problema estrechamente relacionado de la posibilidad de expresiones analíticas de funciones no analíticas llevó a una larga polémica en la que intervinieron Euler, d'Alembert y D. Bernoulli. Uno de los resultados de la controversia sobre el problema de la cuerda vibrante fue una definición aritmética general de una función como una cantidad cuyos valores cambian con la variación de las variables independientes. La definición fue dada por Euler en *Institutiones calculi differentialis,* aunque ya se puede vislumbrar en *Introductio*.

Funciones elementales

La mayor parte del primer volumen de *Introductio* se dedica a la teoría de funciones elementales, que es desarrollada por medio del álgebra y de las series y productos infinitos. Se usan conceptos de infinitésimo e infinito, aunque no los del cálculo diferencial e integral. Entre otras cosas, Euler describe aquí por primera vez la teoría analítica de las funciones trigonométricas y da una notable y simple, aunque no rigurosa, deducción de la fórmula de Moivre

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x .$$

Esta había sido dada por R. Cotes (1716) con una formulación diferente, pero solamente fue utilizada por Euler. La función logaritmica fue considerada por Euler en *Introductio* sólo para valores positivos de la variable independiente. Pronto publicó en 1751 su teoría completa de logaritmos de números complejos, la cual algún tiempo antes había sido anunciada en la correspondencia entre Johann Bernoulli y Leibniz y entre d'Alembert y Euler (1747-1748). Pero es mucho antes (1727-1728) cuando, en la correspondencia con Johann Bernoulli, discute el problema de la gráfica de la función $y = (-1)^x$ y llega a la fórmula $\ln(-1) = \pi i$.

Funciones de variable compleja

El estudio de las funciones elementales llevó a d'Alembert (1747-1748) y a Euler (1751) a la conclusión de que el dominio de los números complejos era cerrado (en términos modernos) respecto de todas las operaciones algebraicas y transcendentes. Ambos hicieron también avances pioneros en la teoría general de las funciones analíticas. En 1752 d'Alembert estudiando problemas de hidrodinámica descubrió las ecuaciones que relacionan la parte real e imaginaria de una función analítica $u(x,y) + iv(x,y)$. En 1777 Euler dedujo las mismas ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

desde consideraciones analíticas generales, desarrollando un nuevo método para calcular integrales definidas $\int f(z)dz$ por medio de una sustitución imaginaria $z = x+iy$ (1793, 1797). Descubrió también (1794) que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Euler también usó funciones analíticas de una variable compleja tanto en el estudio de las trayectorias ortogonales por medio de aplicaciones conformes (1770) como en sus trabajos de cartografía (1778). Todas estas ideas fueron desarrolladas con profundidad en la elaboración de la teoría general de las funciones analíticas por Cauchy (1825) y Riemann (1854) quienes dieron nombre a las ecuaciones anteriormente citadas.

Cálculo diferencial e integral

Ambas ramas del análisis infinitesimal fueron enriquecidas por varios descubrimientos de Euler. Entre otras cosas, en *Institutiones calculi differentialis*, elaboró fórmulas de diferenciación para la sustitución de variables; revisó su teorema para funciones homogéneas $f(x,y)$ establecido antes de 1726; probó el teorema de Nikolaus I Bernoulli (1721) según el cual

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \delta y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

era una condición necesaria para la diferencial exacta $dz = Pdx + Qdy$ de $z = f(x,y)$; aplicó la fórmula de Taylor para hallar los extremos de $f(x)$; e investigó los extremos de $f(x,y)$, formulando incorrectamente, sin embargo, condiciones suficientes.

Los dos primeros capítulos de *Institutiones* se dedican al cálculo en diferencias finitas. Euler consideró el cálculo diferencial como un caso límite del método de diferencias cuando la variable independiente tiende a cero.

Durante el siglo XVIII era frecuente decir contra el cálculo diferencial que todas sus fórmulas eran incorrectas porque las deducciones se habían hecho con el principio de anulación de sumandos infinitamente pequeños, e.d., sobre igualdades de la forma $a+\alpha = a$ con α un infinitésimo respecto de a. Euler pensaba que tales críticas podían ser obviadas suponiendo los infinitésimos y las diferenciales iguales a cero. Este concepto, aunque no contradictorio en sí mismo, no duró porque era insatisfactorio en muchos problemas. Una estricta fundamentación del análisis fue lograda cuando los infinitésimos fueron interpretados como variables tendiendo a cero. Por otra parte, el análisis no estándar ha venido a justificar el empleo "actual" de los infinitésimos y de las diferenciales.

Los métodos de integración indefinida en *Institutiones calculi integralis* (I, 1768) fueron descritos por Euler en una forma bastante moderna y con un detalle tal que practicamente resuelve los casos en los cuales el resultado de la integración es expresable mediante funciones elementales. Euler inventó muchos de los métodos; la expresión "sustitución de Euler" (para racionalizar ciertas diferenciales irracionales) sirve como un recuerdo del hecho. Euler calculó muchas integrales definidas, estableciendo los fundamentos de la teoría de funciones especiales. En 1729 estudió la interpolación de la sucesión 1!, 2!, ... , n!, ... , e introdujo las integrales eulerianas de primera y segunda especie (términos de Legendre), hoy llamadas funciones beta y gamma (1738). Más tarde descubrió muchas de sus propiedades.

Casos particulares de la función beta fueron ya considerados por Wallis en 1656. Las funciones B y Γ, junto con la función zeta y las funciones de Bessel están entre las más importantes de las funciones transcendentes. La mayor contribución de Euler a la teoría de las funciones elípticas fue su descubrimiento del teorema de adición general (1768).

Finalmente, la teoría de las integrales múltiples fue también tratada por Euler, que introdujo las integrales dobles y estableció la regla de sustitución (1770).

Ecuaciones diferenciales

En *Institutiones calculi integralis* se exhiben numerosos descubrimientos de Euler en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, las cuales son especialmente útiles en mecánica.

Euler elaboró muchos problemas en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias; un método clásico para resolver ecuaciones lineales reducidas con coeficientes constantes, en el cual él distinguió entre la integral particular y general (1743); trabajos sobre sistemas lineales, realizados simultáneamente con d'Alembert (1750); solución de la ecuación lineal general de orden n con coeficientes constantes por reducción a una ecuación de la misma forma y orden n-1 (1753). Después de 1738 aplicó con éxito a ecuaciones lineales de segundo orden un método profusamente utilizado en el siglo XIX; éste consistía en la expresión de soluciones particulares en series de potencias generalizadas.

Otro logro euleriano, el de la expresión de soluciones por integrales definidas dependientes de un parámetro (1763); fue extendido por Laplace a ecuaciones en derivadas parciales (1777).

Se puede remontar a Euler (1741) y a Daniel Bernoulli el método de variación de constantes, posteriormente elaborado por Lagrange (1777). El método del factor integrante también fue desarrollado por Euler aplicándolo a numerosas ecuaciones diferenciales de primer orden (1768) y extendido a ecuaciones de orden superior (1770). Dedicó varios artículos a la ecuación de Riccati, demostrando su relación con las fracciones continuas (1744). Euler fue el primero en llamar la atención sobre el hecho de que si se conoce una solución particular $v = f(x)$, entonces la sustitución $y = v + 1/z$ transforma la ecuación de Riccati en y, en una ecuación lineal en z, de manera que se puede hallar una solución general. Euler hizo también notar

(1760-1763) que si se conocen dos soluciones particulares, entonces se puede obtener la solución general por medio de una cuadratura. En conexión con sus trabajos sobre el movimiento lunar, Euler creó un instrumento muy usado para aproximar la solución de la ecuación $dy/dx = f(x,y)$ para los valores iniciales $x = x_o$, $y = y_o$ (1768), y extendido a ecuaciones de segundo orden (1769). Este método de líneas poligonales fue usado por Cauchy en 1820-30 para demostrar el teorema de existencia de las ecuaciones citadas. Finalmente, Euler descubrió métodos para obtener soluciones singulares de las ecuaciones de primer orden (1768).

En la larga lista de trabajos de Euler de ecuaciones en derivadas parciales que comenzó alrededor de 1735 con el estudio de las ecuaciones de primer orden, que había encontrado en geometría (1740), los más importantes son los estudios sobre las ecuaciones de segundo orden lineales, a los cuales se reducen muchos problemas de física matemática. Primero fue el problema de la cuerda vibrante, la ecuación de ondas originalmente resuelta por d'Alembert con el llamado método de las características. Dada una solución general mediante la suma de dos funciones arbitrarias, las condiciones iniciales y las de frontera permitieron llegar a la solución en casos concretos (1749). Inmediatamente, Euler estudió el método de d'Alembert y lo elaboró eliminando innecesarias restricciones impuestas por d'Alembert sobre la posición inicial y la velocidad de la cuerda (1749). Ambos matemáticos discutieron sobre la cuestión y la discusión aumentó cuando Daniel Bernoulli aseguró que cualquier solución de la ecuación de ondas podía expresarse por una serie trigonométrica (1755). D'Alembert y Euler coincidían en que dicha solución podía no ser lo suficientemente general. La discusión recogida por Lagrange, Laplace y otros matemáticos de gran reputación duró más de medio siglo. Sólo hasta que llegó Fourier (1807, 1822) fue hallada la forma correcta de formulación y solución del problema. Euler también desarrolló el método de las características.

Euler encontró ecuaciones en otras áreas de la física matemática: en hidrodinámica; en el problema de la vibración de membranas, el cual redujo a la ecuación de Bessel y resolvió en 1766 por medio de las funciones de Bessel $J_n(x)$; y en el problema del movimiento del aire en tubos (1772). Alguna de las ecuaciones estudiadas por Euler sobre la velocidad del sonido son todavía vigentes en la moderna aerodinámica.

Cálculo de variaciones

Comenzando por varios problemas resueltos por Johann y Jakob Bernoulli, Euler fue el primero en formular los principales problemas del cálculo de variaciones y en crear métodos para resolverlos. *En Methodus inveniendi lineas curvas* ... desarrolló sus descubrimientos de los años 1730-39 (1739, 1741). El introdujo, usando diferente terminología, los conceptos de función y variación y distinguió entre los problemas de extremos absolutos y relativos. El problema de los extremos absolutos de la integral

$$\int_a^b F(x,y,y')dx,$$

donde F está dada e y(x) es la deseada función minimizante o maximizante, es tratado como problema límite para los extremos ordinarios de la función

$$S_n(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \Delta x,$$

donde $x_k = a + k\Delta x$, $\Delta x = (b-a)/n$, $k = 0,1, \ldots, n$ $(n \to \infty)$. Entonces Euler dedujo la ecuación diferencial a la cual y(x) debía satisfacer. Esta condición necesaria fue generalizada para el caso que figuren las derivadas y', y'', ... , $y^{(n)}$ en la función F. En este caso la solución del problema del cálculo de variaciones era siempre reducido a la integración de una ecuación diferencial. Siglo y medio después cambió la situación. El método directo imaginado por Euler y que había empleado sólo para obtener su ecuación diferencial adquirió su propia importancia por su rigor y por aproximar las soluciones de los problemas variacionales y las correspondientes ecuaciones diferenciales.

A mediados de los años 1750-59, después de que Lagrange crease nuevos algoritmos y notaciones para el cálculo de variaciones, Euler abandonó la primera exposición y dio en su lugar una exposición detallada y elegante del método de Lagrange, introduciendo un nuevo cálculo que él llamó variacional (1766). Y aplicó el cálculo de variaciones a problemas de extremos de integrales dobles con límites fijos en el volumen III de las *Institutiones calculi integralis* (1770). Pronto sugirió otra forma de exposición de cálculo, que hoy es ampliamente usada.

Geometría y topología

La mayor parte de los descubrimientos de geometría de Euler fueron hechos como aplicación de los métodos de álgebra y análisis. Dio dos formas diferentes para la exposición analítica de la trigonometría esférica (1755, 1782). Probó cómo la trigonometría de las superficies esferoidales podía aplicarse a la geodesia (1755). En el volumen II de *Introductio* sobrepasó a sus contemporáneos dando un desarrollo algebraico consistente de la teoría de curvas de segundo orden a partir de su ecuación general (1748). También estudió la teoría de las curvas de tercer orden por analogía. Pero el mayor logro fue que por primera vez estudió la ecuación general de las superficies de segundo orden, aplicando los ángulos de Euler a las correspondientes transformaciones.

Los estudios de Euler de las líneas geodésicas de una superficie son fundamentales en geometría diferencial; el problema había sido propuesto por Johann Bernoulli (1732, 1736 y posteriormente). Pero todavía más importantes son sus investigaciones pioneras en la teoría de superficies; en particular, expresó la curvatura de una sección normal arbitraria por las curvaturas principales (1767).

Estudió las superficies desarrollables, introduciendo las coordenadas de Gauss (1772), que fueron muy usadas en el siglo XIX. En una nota escrita alrededor de 1770, pero no publicada hasta 1862, Euler descubrió la condición necesaria para la aplicabilidad de superficies, independientemente establecida por Gauss (1828). En 1775 renovó la elaboración de la teoría general de curvas alabeadas (1786), en el lugar donde la dejó Clairaut en 1731.

Euler también fue autor de los primeros estudios sobre topología. En 1735 dio solución al problema de los siete puentes de Königsberg. En una carta a Goldbach (1750), cita numerosas propiedades de los poliedros, entre ellas la famosa igualdad

$$\text{Caras} + \text{Vértices} - \text{Aristas} = 2,$$

aunque un siglo más tarde se supo que ya Descartes la conocía. La característica de Euler C+V-A y su generalización para complejos multidimensionales, dada por H. Poincaré es uno de los principales invariantes de la moderna topología.

Mecánica

En una introducción a la *Mechanica* (1738), Euler plantea un largo programa de estudios relacionando varias ramas de la ciencia. Antes de Euler los métodos de la mecánica habían sido sintéticos y geométricos, y eran poco generales de modo que en cada problema había que emplear uno particular. Euler fue el primero en advertir la necesidad de introducir métodos analíticos uniformes en mecánica y de esta forma llegar a soluciones claras y directas. Esta concepción de Euler se manifiesta en la introducción e incluso en el título del libro *Mechanica sive motus scientia analytice exposita.*

Esta primera obra se dedica a la cinemática y dinámica de una manera puntual. En el primer volumen estudia el movimiento libre de un punto material en el vacío y en un medio resistente; la sección correspondiente al movimiento de una masa puntual bajo una fuerza central es una brillante reelaboración de la correspondiente sección de los *Principia* de Newton y, en cierto modo, fue una introducción de Euler a posteriores trabajos sobre mecánica celeste. Euler estudió el movimiento de un punto material proyectándolo sobre el triedro formado por la tangente, la normal y la binormal. El movimiento en el plano es considerado análogamente. En el capítulo sobre el movimiento de una partícula sobre una superficie, Euler resolvió problemas de la geometría diferencial de superficies y de la teoría de geodésicas.

La *Theoria motus corporum solidorum*, publicada casi treinta años después (1765), está relacionada con la Mechanica. En la introducción de esta obra, Euler dio una nueva exposición de la mecánica puntual y siguiendo el ejemplo de Maclaurin (1742) proyectó las fuerzas sobre los ejes coordenados fijos. Estableciendo que el movimiento instantáneo de un cuerpo sólido podía considerarse como resultado de una traslación y de una rotación instantánea, Euler dedicó especial atención al movimiento de rotación. Entonces, él dio fórmulas para las proyecciones de la velocidad angular instantánea sobre los ejes coordenados (con aplicación de los ángulos de Euler) y obtuvo las ecuaciones diferenciales de la dinámica referidas a los ejes principales de inercia, lo que determinaba el movimiento. Especial mención merece el problema del movimiento de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo, que resolvió Euler en el caso de que el centro de gravedad coincida con el punto fijo. La ley del movimiento en tal caso está expresada en su caso general por medio de integrales elípticas. Euler redujo a este problema el estudio de la precesión de los equinoccios y de la nutación del eje terrestre (1751). Otros casos en los que las ecuaciones diferenciales de este problema pueden integrarse han sido descubiertas por Lagrange (1788) y S.V. Kovalevskaya (1888). Euler consideró estos problemas de la mecánica de cuerpos sólidos al principio y al final del periodo de San Petersburgo.

En uno de los apéndices al *Methodus*... Euler sugiere una formulación del principio de la mínima acción para el caso del movimiento de un punto solicitado por una fuerza central: la trayectoria descrita por el punto minimiza la integral $\int$ mvds. Maupertuis había establecido por el mismo tiempo el principio de la mínima acción en una forma mucho más particular. Euler dio el fundamento matemático de los numerosos estudios sobre los principios variacionales de mecánica y física que fueron continuados después de él.

En el otro apéndice al *Methodus,* Euler, ante la insistencia de D. Bernoulli, aplicó el cálculo de variaciones a algunos problemas de la teoría de la elasticidad, que habían sido intensivamente elaborados desde 1727. En este apéndice, que es de hecho la primera obra general sobre la teoría matemática de la elasticidad, Euler estudió la flexión y vibraciones de bandas elásticas para condiciones diferentes, deduciendo la famosa fórmula de Euler, usada para determinar la resistencia de una columna.

Astronomía y mecánica celeste

Euler estudió en astronomía una gran variedad de problemas: determinación de las órbitas de cometas y planetas con pocas observaciones, métodos de cálculo de la paralaje del Sol, la teoría de refracción, consideraciones sobre la naturaleza física de cometas y el problema del retraso de los movimientos planetarios por la acción del éter cósmico. Los más sobresalientes trabajos, por los que fue premiado por la Academia de Ciencias de París, se refieren a la mecánica celeste, que especialmente atraía a los hombres de ciencia de aquel tiempo.

Los movimientos observados de los planetas, particularmente de Jupiter y Saturno, como también de la Luna, eran evidentemente diferentes a los cálculos del movimiento basados en la teoría de la gravitación de Newton. Entonces, los cálculos de Clairaut y d'Alembert (1745) dieron el valor de dieciocho años para el periodo de revolución del perigeo lunar, mientras que las observaciones probaban que era de nueve años. Esto ponía en duda la validez general de la teoría de Newton e hizo pensar a Euler y a estos hombres de ciencia que la ley de gravitación necesitaba algunos retoques, durante un largo tiempo. En 1749 Clairaut estableció que la diferencia entre la teoría y las observaciones era debido al hecho de que se había resuelto la correspondiente ecuación diferencial en una primera aproximación. Cuando él calculó la segunda aproximación se obtuvo un resultado en concordancia con las observaciones hechas. Euler no se dio por satisfecho. A propuesta del mismo Euler, la Academia de San Petersburgo creó un premio para quien resolviera esta cuestión, premio que fue concedido a Clairaut en 1752. En 1751 Euler había escrito su *Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates* (publicada en 1753), en la que elabora su original método de solución aproximada del problema de los tres cuerpos, llamada primeramente por Euler teoría lunar. En el apéndice él describe otro método que es la primitiva forma del método general de variación de los elementos. Los resultados numéricos de Euler estaban de acuerdo con la teoría de la gravitación de Newton. Mucho más tarde, en 1872, se encontró entre los papeles de Newton un estudio incluyendo las aproximaciones o perturbaciones de segundo orden, llegando a un valor coincidente con las observaciones.

La primera teoría lunar de Euler tuvo una importante consecuencia práctica: T. Mayer, un astrónomo de Göttingen, construyó de acuerdo con sus fórmulas unas tablas lunares (1755).

Desde 1770 a 1772 Euler elaboró su segunda teoría del movimiento lunar expuesta en *Theoria motuum lunae, nova methodo pertracta* (1772). Por varias razones, los méritos del nuevo método sólo pudieron ser apreciados mucho más tarde por G.W. Hill que los desarrolló brilantemente en 1877-1888.

Euler dedicó numerosos trabajos al cálculo de perturbaciones de órbitas planetarias causadas por la mutua atracción de Jupiter y Saturno (1749, 1769) como también de la Tierra y otros planetas (1771). Estos estudios fueron continuados hasta su muerte.

Hidromecánica

La primera gran obra de Euler sobre la mecánica de fluidos es *Scientia navalis.* El primer volumen contiene la teoría general de equilibrio de cuerpos flotantes incluyendo una original elaboración de problemas de estabilidad y de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio. El segundo volumen aplica la teoría general al caso de un barco.

De 1753 a 1755 Euler elabora en detalle la teoría analítica de la mecánica de fluidos en tres clásicas memorias: *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides, Principes généraux du mouvement des fluides* y *Continuation des recherches sur la théorie* *du mouvement des fluides*; todos ellos publicados en 1757. Algo antes (1752) fue escrita *Principia motus fluidorum*, aunque no fue publicada hasta 1761. En ella se elabora un sistema de fórmulas principales de hidrostática e hidrodinámica, que comprende la ecuación de continuidad para liquidos homogéneos, la ecuación del potencial de velocidades y las ecuaciones generales de Euler para el movimiento de un fluido incomprensible. como en otras partes de física matemática la mayor innovación consistía en la aplicación de las ecuaciones en derivadas parciales a los problemas.

Euler también investigó problemas concretos sobre el movimiento de liquidos y gases en tubos, sobre la vibración de aire en tubos, y sobre la propagación del sonido. Especialmente se debe destacar el perfeccionamiento introducido por él en el invento de una máquina hidráulica, debido a Segner (1749), y la teoría de turbinas hidráulicas que él creó de acuerdo con el principio de la acción y reacción (1752-1761).

Optica

Los trabajos de Euler sobre la óptica eran ampliamente conocidos por su importancia por los físicos del siglo XVIII. Abandonando la dominante teoría corpuscular de la luz, él construye su propia teoría en la *Nova theoria lucis et colorum* (1746) que explica algunos, pero no todos, de los fenómenos. Procediendo de una manera, que más tarde se vió que era incorrecta, Euler concluye que la eliminación de la aberración cromática de lentes ópticas era posible (1747). Esto fue objetado por el óptico inglés Dollond que, siguiendo a Newton, afirmaba que esa dispersión era inevitable. El resultado de esta polémica, en la que ambas partes tenían su parte de razón, fue la construcción por Dollond del telescopio acromático (1957), tan importante en la tecnología óptica. Por su parte, Euler, en su *Dioptrica,* pone los fundamentos del cálculo de sistemas ópticos.

BIBLIOGRAFIA

[1] BELL, E.T.: *Men of Mathematics.* Dover, New York, 1937.
[2] BOYER, C.B.: *History of Analytic Geometry.* New York, 1956.
[3] BOYER, C.B.: A. *History of Mathematics.* New York, 1968.
[4] CANTOR, M.: *Vorlesungen über Geschicte der Mathematik, III-IV.* Leipzig, 1898-1908.
[5] MARQUIS DE CONDORCET: *Éloge de M. Euler. Histoire de l'Académie royale des sciences pour l'année 1783.* Paris, 1786.
[6] COOLIDGE, J.L.: *A History of Geometrical Methods.* Oxford, 1940.
[7] DICKSON, L.E. : *History of the Theory of Numbers,* 3 vols. Washington, 1934.

[8] DOU, A.: *Orígenes del cálculo de variaciones. Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII,* 113-152. Real Acad. de Ciencias. Madrid, 1988.

[9] DU PASQUIER, G.: *Léonard Euler et ses amis.* Paris, 1927

[10] EDWARDS, C.H.: *The historical development of the Calculus.* Springer, New York, 1982.

[11] EULER, L.: *Introductio in analysin infinitorum.* Lausanne, 1748.

[12] EULER, L.: *Opera omnia.* (Opera mathematica. Opera mechanica et astronomica. Opera physica. Miscellanea. Epistolae). Berlin-Göttingen-Leipzig-Heidelberg, 1911-.

[13] EULER, L.: *Opera minora collecta.* New York, 1960.

[14] FUSS, P.H. (ed.): *Correspondance mathématique et physique de quelques célêbres géomètres du XVIIIe siècle,* 2 vols. (St. Petersburg, 1843). New York, 1968.

[15] FUSS, N.: Éloge de M. Léonard Euler (St. Petersburg). En [13].

[16] HARDY, G.H.: *Divergent Series.* Oxford, 1949.

[17] HOFMANN, J.E.: *Geschicte der Mathematik.* Berlin, 1957.

[18] HOPPE, E.: *Die Philosophie Leonhard Eulers.* Gotha, 1904.

[19] KLINE, M.: *Mathematical thought from ancien to modern times.* Osford, 1972.

[20] LINÉS, E.: *Teoría de números en el siglo XVIII. Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII,* 179-205. Real Acad. Ciencias. Madrid, 1988.

[21] MARAVALL, D.: *Desarrollo de la mecánica y de la física matemática en los siglos XVIII. Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII,* 153-178. Real Acad. Ciencias. Madrid, 1988.

[22] MARKUSCHEVITSCH, A.I.: *Skizzen zur Geschicte der analytischen Funktionen.* Berlin, 1955.

[23] MARTINEZ, M.: *Euler doscientos años después: La "Introductio in analysin infinitorum".* Seminario de Historia de la Matemática. Madrid, 1983-84.

[24] STRUIK, D.J.: *A Concise History of Mathematics,* 2 vols. London, 1956.

[25] TATON, R. (ed.): *Histoire génèrale des sciences,* II. Paris, 1972.

[26] TORROJA, J.M.: *La gravitación universal y sus consecuencias. Historia de la Matemática en los siglos XVII y XVIII,* 75-112. Real Acad. Ciencias. Madrid, 1988.

[27] YOUSCHKEVITCH, A.P.: *Leonhard Euler.* Dictionary of Scientific Biography, vol. 4, 467-484. Scribner, New York.

[28] YOUSCHKEVITCH, A.P.: *Leonhard Euler: 1707-1783: Beiträge zu leben und werk.* Birkhauser, Basel, 1983.