LA GRAVITACION UNIVERSAL Y SUS CONSECUENCIAS

JOSE M. TORROJA *

En 1687, Isaac Newton da a conocer su obra cumbre "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", sobre la que se habrían de basar en el futuro todos los estudios sobre los movimientos de los astros y sobre la forma de la Tierra. En los siglos anteriores se habían ido planteando una serie de teorías, desde Aristóteles en la antigua Grecia, con las que se trató de explicar tanto la caída de los graves sobre la superficie terrestre, como los movimientos de los astros, teorías que dieron lugar a los sistemas de Tolomeo, Copérnico y Tycho-Brahe. Estas teorías trataban de explicar los movimientos, pero sin buscar una justificación a esos movimientos, sin buscar las causas que los provocaban.

A partir de finales del siglo XVI y principios del XVII se empieza a pensar en buscar cual pueda ser la causa que provoca esos movimientos, unificando en uno los dos fenómenos citados: el movimiento de caída de los graves en la superficie terrestre y el movimiento de los astros en el espacio.

Antecedentes de la gravitación universal

Aristóteles (384-322 a C) distingue entre el mundo sublunar y el mundo de los Astros. El movimiento de éstos, constituídos por el elemento "eter", es el movimiento perfecto circular y uniforme, pero como los astros no son seres animados es necesario un motor eterno, y ese motor eterno es Dios, que determina en la materia de las esferas celestes una admiración y el deseo del movimiento y de esta admiración y este deseo surge un movimiento circular uniforme y eterno.

El mundo sublunar, por el contrario, está constituído por cuatro elementos: la tierra, el agua, el aire y el fuego, a cada uno de los cuales corresponde un determinado movimiento rectilíneo. Y así como el movimiento circular puede mantenerse indefinidamente, como ocurre con los cuerpos celestes, los movimientos en el mundo sublunar habrán de tener un fin al llegar cada elemento al lugar natural que le corresponde por su propia esencia.

---

* Académico. Prof. Emérito de la Universidad Complutense.

De los cuatro elementos citados, el elemento tierra es absolutamente pesado y su movimiento es rectilíneo hacia su lugar natural que es el centro del Mundo, con cuyo centro ha de coincidir el centro de nuestro planeta Tierra, cuya forma resulta ser esférica. El fuego es absolutamente ligero y su lugar natural está debajo de la esfera de la Luna; su movimiento natural es, por lo tanto, hacia arriba. Resulta así que el único elemento sometido a la acción de la gravedad, el único elemento "grave" es para Aristóteles el elemento tierra. Es decir los cuerpos sólidos, pesados, situados dentro de la esfera de la Luna, son los únicos afectados por la gravedad. Esta no es, por lo tanto, una cualidad universal.

Admitida la esfericidad de la Tierra, su radio será determinado un siglo más tarde por Eratóstenes (276-192 a C).

En el "Almagesto" expone Tolomeo su teoría desarrollando la iniciada por Apolonio. El planeta se mueve recorriendo, con movimiento uniforme, una circunferencia, el epiciclo, cuyo centro recorre, también con movimiento uniforme, otra circunferencia, el deferente, con centro en la Tierra. En el caso de Mercurio y Venus el planeta recorre su epiciclo con un periodo propio, mientras el centro del epiciclo recorre el deferente en un año. Por el contrario Marte, Júpiter y Saturno recorren el epiciclo en un año, mientras el centro del epiciclo recorre el deferente con un periodo característico de cada uno de ellos.

Otra obra de Tolomeo fue la "Hipótesis de los planetas", en la que expone una segunda solución, sustituyendo el sistema de deferentes y epiciclos, por esferas concéntricas girando alrededor de diversos centros, que desempeñaban el papel de los deferentes y esferas epiciclos. Resucitaba Tolomeo en esta segunda obra las esferas homocentricas de Eudoxio y Aristóteles.

Pero para conseguir encajar las observaciones en estos sistemas de circunferencias o esfera deferentes y epiciclos, fue necesario aumentar el número de estos últimos, recurrir a deferentes excéntricos, etc.

Esta creciente complicación hizo afirmar a Alfonso el Sabio, según una anécdota frecuentemente negada, que "más sencillo hubiera sido el mundo si Dios le hubiera consultado a él". A esta anécdota nos referiremos más adelante.

El sistema de Tolomeo ya lo hemos dicho, suponía la Tierra en el centro del Universo. En 1543 expone Copérnico (1473-1543) su nuevo sistema, en el que el Sol pasa a ser el centro del Universo, pero sigue manteniendo el sistema de deferentes y epiciclos, cuyo número será necesario ir aumentando para dar cuenta de las apariencias en la observación. Sigue manteniendo las esferas que, en su rotación, arrastran a los diversos planetas. La distancia de la Tierra al Sol es despreciable frente a la distancia de éste a las estrellas. En cuanto a la gravedad, en su "De revolutionibus orbium coelestium" dice: "Yo pienso que la gravedad o pesantez no es más que una cierta apetencia natural implantada en las partes por la divina providencia del Artesano universal con objeto de que se unan en su unidad y en su totalidad y lo hacen en forma de globo". Debe pensarse que este efecto está presente en el Sol, la Luna, y los otros planetas brillantes y que por ello conservan la forma esférica conque les vemos, aunque, sin embargo efectuan sus movimientos circulares de formas muy diferentes". Tycho-Brahe (1546-1601) aparte de sus numerosas y precisas observaciones, en particular de Marte, propone una nueva solución en la que la Tierra vuelve a ser el centro del Universo, a cuyo alrededor giran el Sol y la Luna, siendo a su vez el Sol el centro de las órbitas circulares descritas por los planetas. Pero ni Tolomeo ni Copérnico ni Tycho-Brahe, aparte de la referencia a la gravedad por parte de Copérnico, a que nos acabamos de referir, tratan de explicar ni de buscar la razón por la que los planetas se mueven recorriendo esas órbitas.

La solución de este problema estaba reservada a Newton al enunciar su ley de la gravitación universal, si bien en los años anteriores nos encontramos con una serie de aportaciones que van preparando el camino para llegar a aquella solución.

El año 1600 dio a conocer William Gilbert (1544-1603) los resultados de sus estudios sobre el magnetismo, en una obra "De magnete" que fue ampliamente conocida en Inglaterra y en el continente, siendo reeditada después de su muerte en 1628 y 1633. Considera la Tierra como un gigante imán que, como todo imán, aparece rodeada de una *esfera de influencia* que se extiende en todas direcciones, y cuyo alcance y fuerza depende del tamaño y de la pureza del cuerpo magnético. Otros cuerpos magnéticos situados dentro de esta *"esfera de influencia"* son atraídos, mientras que los situados fuera de esa *esfera de influencia,* no son afectados. Gilbert explica con esto, no sólo los fenómenos ya conocidos de la declinación e inclinación magnética, sino incluso la rotación de la Tierra y la precesión de los equinocios. La Luna queda dentro de la *esfera de influencia* del magnetismo terrestre lo que explica su movimiento alrededor de nuestro planeta. A su vez el efecto del magnetismo lunar provoca las mareas en los océanos.

Análogamente el hecho de que los planetas quedaran dentro de la *esfera de influencia* del Sol explicaba y justificaba el movimiento de aquellos en el sistema heliocéntrico de Copérnico.

Kepler (1571-1630) discípulo, ferviente admirador y continuador de la obra de Tycho-Brahe en su observatorio de Hveen, no admitió, sin embargo el sistema del mundo propuesto por éste, mostrándose por el contrario decidido partidario de la astronomía de Copérnico.

Entusiasta defensor, por otra parte, de la armonía del Universo (éste fue el título de una de sus obras), al tratar de las esferas de los distintos planetas recurre a los poliedros regulares, como ya lo había hecho Platón al tratar de los elementos. Y así en su "Misterium Cosmographicum" (1596), define las esferas de cada uno de los planetas, que considera circunscritas a los distintos poliedros regulares, justificando así, además, su número.

En la "Introducción" a la "Astronomía Nova" (1609) se refiere Kepler a la gravedad, con las siguientes frases:

"Luego la verdadera doctrina con relación a la gravedad se apoya sobre estos axiomas".

"Toda sustancia corporal en la medida en que es corporal debe permanecer en reposo en cualquier lugar en que se encuentra, aislada, fuera de la esfera de virtud de los cuerpos de su misma naturaleza [parientes] ".

"La gravedad es una relación corporal recíproca entre los cuerpos de la misma naturaleza [parientes] para la unión y la conjunción (en cierta forma es la facultad magnética) de forma que la Tierra atrae hacia sí a la piedra mucho más que la piedra atrae a la Tierra".

"Los graves (si colocamos precisamente la Tierra en el centro del mundo) no son atraídos hacia el centro del mundo, sino en tanto que es el centro de un cuerpo redondo de su misma naturaleza [pariente] a saber la Tierra".

"Si la Tierra no fuera redonda, los graves no serían atraídos en línea recta hacia el centro de la Tierra, sino que serían atraídos hacia puntos diferentes".

"Si la Tierra dejara de atraer a las aguas hacia sí, todas las aguas de los mares serían elevadas y fluirían hacia la Luna".

Y en la introducción al libro IV de su "Epitome de la Astronomia copernicana" (1619) dice Kepler "construyo toda mi astronomía sobre las hipótesis de Copérnico relativas al mundo, sobre las observaciones de Tycho-Brahe y finalmente sobre la filosofía del magnetismo del inglés Willian Gilbert".

Aunque Copérnico, al establecer su sistema heliocéntrico no adjudicó ninguna acción al Sol sobre los planetas, Kepler, por el contrario destacó que cuanto mayor era la distancia de los planetas al Sol, más largo era el periodo de sus revoluciones, lo que debía ser originado por una disminución en la *esfera de influencia* del astro central.

Eliminando el complicado sistema de deferentes y de epiciclos de Tolomeo y de Copérnico busca la curva en la que mejor encajen las observaciones de Marte que le había dejado Tycho-Brahe. Después de numerosos intentos a lo largo de seis años de trabajo lo logra, la curva es una elipse como anuncia en su primera ley dada a conocer en 1609 en su "Astronomía nova". Apoyándose en las teorías de Gilbert considera el Sol como un campo magnético en rotación que origina el desplazamiento de los planetas en sus órbitas respectivas bajo el efecto de una acción que sitúa en el plano de la órbita, inversamente proporcional a su distancia al Sol. Aplica esta hipótesis a la Tierra y consigue explicar su movimiento en el afelio y en el perihelio, pero no en las cuadraturas. Ante este fracaso intenta sustituir esta acción inversamente proporcional a la distancia por una nueva ley en la que el radio vector recorre áreas iguales en tiempos iguales. Con ello consigue explicar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Y comprueba que las observaciones de Marte verifican también esta ley moviéndose éste también alrededor del Sol. Puede así enunciar su segunda ley, también en su "Astronomía Nova".

Y en su ya citado "Epitome" (1621) trata de buscar la forma en que se produce el movimiento. Planteado en forma de preguntas y respuestas, se pregunta por la posibilidad de existencia de una inteligencia "con objeto de regular los movimientos de los cielos", y el mismo contesta "Admitamos que esa inteligencia está situada en el centro, ¿cómo puede lograr que el planeta, que está muy distante, recorra su órbita alrededor del centro?. Si la inteligencia tuviera al planeta sujeto por una cuerda, tal vez el planeta volaría, estando atado al centro. Tal vez la inteligencia, observando desde el centro, podría percibir — especialmente si estuviera dotada de ojos — si el planeta se movía en un círculo y si el planeta era siempre observado describiendo ángulos iguales. Pero si se saliera de su círculo, ¿de qué forma esa inteligencia le podría volver a su posición, si no ve la órbita por sí mismo?. Además ¿cómo podría la inteligencia conocer la órbita que no está marcada?. Pero, si colocamos la inteligencia fuera del centro de la órbita, su condición sería peor".

Más adelante dice: "Si no hubiera inercia en la materia de los globos celestes, no habría necesidad de una *virtud* con objeto de mover el globo". "Pero las revoluciones de los globos tienen lugar en un tiempo fijado, que es mayor para un planeta y menor para otro; de donde es evidente que la inercia de la materia no es el *motor*", pues si lo fuera todos los planetas describirían sus órbitas en el mismo tiempo".

Sigue diciendo "cualquier cuerpo colocado en cualquier lugar del mundo lejos del motor, por naturaleza quedaría en reposo, pues la materia, como tal, no tiene facultad para transportar su cuerpo de un lugar a otro".

Justifica que ese *motor* que da lugar al movimiento de los planetas está en el Sol. Dice en efecto: "Porque es evidente que mientras más alejado está un planeta del Sol que los demás, se mueve más lentamente — de modo que la razón de los periodos es igual a la razón de la potencia 3/2 de las distancias al Sol. Por lo tanto deducimos de ésto que el Sol es origen del movimiento". El Sol "es perfectamente redondo y muy grande, y es la fuente de la luz y el calor, de donde fluye toda la vida, de modo que el calor y la luz puedan considerarse como si fueran instrumentos situados en el Sol para dar lugar al movimiento de los planetas".

Señala la circunstancia de que el sentido del movimiento de los planetas es el mismo del de la rotación del Sol, y de forma que los planetas más próximos describen sus órbitas en periodos más cortos, y se pregunta "¿Es entonces la rotación del Sol lo que hace que giren los planetas?", ¿cómo puede ser esto, puesto que el Sol no tiene manos con las que pueda mantener el planeta, que está a tan gran distancia y con su rotación pueda hacer que el planeta se mueva a su alrededor?. Y contesta "En lugar de manos existe la *virtud* de su cuerpo, que es emitida en línea recta a través de todo el mundo [universo] ". Compara esta *virtud* con la atracción magnética, manifestada sin necesidad de que exista ningún contacto.

Considera la luz y el calor que emana el Sol y rechaza la posibilidad de que estos sean la causa del movimiento de los planetas, pues la luz del Sol deja de recibirse por un planeta cuando entre ambos se interpone un tercer astro, mientras que esta interposición no afecta en absoluto al movimiento. Por otra parte cita el ejemplo de la Luna, "que es movida por la Tierra, un cuerpo que es luminoso en su mínima magnitud".

Más adelante se pregunta: si la luz es atenuada en razón del cuadrado de las distancias, ¿por qué la *virtud* motor no disminuye también en razón del cuadrado de las distancias en lugar de en su razón simple?. "Parece que la virtud que emana del Sol debe aumentar o disminuir con el cuadrado o el cubo de la razón de las distancias", dice en su "Astronomía Nova".

Aunque en definitiva lo desecha, se ve que Kepler pensó en esa posibilidad que la acción de ese *motor* que originaba el movimiento de los planetas pudiera estar expresada por una ley de la forma que más tarde enunció Newton con su ley de la gravitación universal. Y sin embargo esta ley estaba ya realmente implícita en las leyes enunciadas por Kepler.

Galileo (1564-1642), aparte de su lucha en defensa del sistema de Copérnico, sienta las bases de una nueva ciencia, la Dinámica, en la que maneja los conceptos de velocidad y aceleración y establece las leyes de la caída de los graves basadas en sus propias experiencias, problema que ya había sido estudiado un siglo antes por el dominico segoviano Domingo de Soto (1494-1560). Estudia además el movimiento de un proyectil, señalando que su órbita es una parábola.

En los mismos años, Descartes (1596-1650) plantea una nueva concepción del Universo con su teoría de los torbellinos. El sistema solar es un inmenso torbellino de materia en rotación alrededor del Sol. En determinadas zonas de este torbellino se forman los planetas, que son a su vez centros de torbellinos menores en los que se forman los satélites. Para hacer su teoría compatible con las órbitas elípticas introducidas por Kepler, admite Descartes una deformación de los torbellinos por efecto de los inmediatos. Pero no consigue explicar las dos restantes leyes de Kepler. Aunque esta teoría fue rebatida por Newton en los "Principia" logró un amplio apoyo en Francia.

Huygens (1624-1695), entre otros muchos problemas que abordó a lo largo de su vida, buscó una explicación de la gravedad, para lo que se apoya en las ideas de Descartes. Admite la existencia de un gran torbellino de materia de muy pequeña densidad, que se mueve alrededor de la Tierra, a gran velocidad, de forma que da unas diecisiete vueltas por día. La fuerza centrífuga originada por esta rotación es compensada por una fuerza centrípeta que retiene las partículas, y esa fuerza centrípeta es la gravedad.

En su obra "Horologium Oscillatorium" dedica la última parte al estudio de la fuerza centrífuga en el movimiento circular, y expone los enunciados de trece "teoremas", en los que estudia cómo varía dicha fuerza centrífuga con la velocidad del móvil, con el diámetro de la circunferencia y con la gravedad. De estos teoremas se deduce que el valor de la fuerza centrífuga que compara con la gravedad, puede expresarse en la forma

$$f = \frac{m\,v^2}{r}$$

siendo m la masa del móvil, v su velocidad y r el valor del radio de la circunferencia.

Robert Hooke (1635-1703) fue uno de los científicos más prolíficos en tiempos de Newton, especialmente en Física y Biología. Fue uno de los promotores de la Royal Society, que le encargó de la preparación de experimentos para ser ejecutados ante los miembros de la Sociedad, de la que más tarde fue Secretario. De carácter atrabiliario se enfrentó con Huygens con la pretensión de que el reloj de espiral construido por éste era copia del que él había construido previamente. Se trataba de un problema de gran interés para la determinación de la longitud en el mar. Cuando Newton presentó a la Royal Society una memoria "Hipótesis de la luz" también alegó Hooke que todo lo que allí se decía había sido copiado de la obra sobre "Micrographia" que él había publicado antes. Y lo mismo ocurrió con la teoría de la gravitación universal. Las discusiones entre Hooke y Newton sobre esta cuestión han sido estudiadas por J. Lohne quien afirma que "el sistema mecánico del mundo fue en gran parte establecido sobre los principios de Hooke y construido por los métodos de Newton". Lohne ha estudiado la teoría de Hooke sobre el movimiento circular, a través de los documentos existentes en los archivos de la Royal Society. En uno de ellos dice "Pero siendo todos los cuerpos celestes cuerpos sólidos regulares que se mueven en un fluido y moviéndose en líneas circulares o elípticas, y no en líneas rectas, deben tener alguna otra causa, además del primer impulso que se les imprimió que desvie su movimiento en una curva y para la ejecución de este efecto no puedo imaginar más que una de estas dos causas. La primera puede ser por una desigual densidad del medio. Pero la segunda causa para desviar el movimiento en una curva puede ser por una propiedad atractiva del cuerpo situado en su centro, por la cual continuamente trata de atraerlo hacia sí. Pues si se admite tal principio, todos los fenómenos de los planetas parecen ser explicados por los principios comunes de la mecánica de los movimientos".

De acuerdo con la ley de la inercia dice, el movimiento de un móvil debe ser rectilíneo. Si describe una órbita circular es necesaria la intervención de una fuerza que lo retenga en su órbita, fuerza que debe estar dirigida hacia el centro de la misma, análogamente a lo que ocurre al lanzar una piedra con una honda. Y esa fuerza, según Hooke es la gravitación.

Uno de los problemas que estudió y sobre el que mantuvo correspondencia con Newton, fue el de la caída de los graves y sobre su desplazamiento hacia el este o hacia el oeste, y hacia el sur en el hemisferio norte, y sobre la curva que deberían seguir en la caída.

Otra cuestión que preocupó a Hooke, y que discutió con Newton, fue el de la extensión de la gravedad a las proximidades y en el interior de la Tierra. Kepler al estudiar el problema de la caída de una piedra, consideraba la gravedad como una propiedad inherente al Sol, los planetas y las estrellas, pero se preguntaba si esa fuerza actuaría también sobre las distintas partes de la Tierra. Hooke hizo una serie de experiencias en la Abadía de Westmister y en la catedral de San Pablo, y decía: "Si todas las partes del globo terrestre fueran magnéticas, un cuerpo a considerable profundidad en la Tierra, perdería parte de su gravedad, a causa de la atracción de las partes de la Tierra, situadas por encima" y calcula el valor numérico de esta pérdida de peso.

Al referirse a la gravedad, la considera Hooke como "una potencia, que hace que los cuerpos de la misma naturaleza se muevan uno hacia otro hasta que se unan". Pero considera que el Sol y los planetas son de la misma naturaleza, pero no los cometas, cuya materia " ... es muy enrarecida, y emiten luz, y son de una naturaleza claramente distinta, y se alejan del centro del Sol". Para Hooke, se trata pues de un fenómeno que no tiene el carácter de universal que le daría Newton.

Por otra parte, ¿conocía Hooke la ley que expresa la magnitud de esa atracción como inversamente proporcional al cuadrado de la distancia?. Lohne dice en el trabajo antes citado: "Posteriores citas del diario de Hooke hacen más que probable que Hooke sospechaba o conocía esta ley k/r^2 antes del verano de 1676. Tal vez se confirmó en su creencia en la ley el 15 de noviembre de 1675, después de haber leído el libro de Huygens". Y más adelante "Hasta 1680 solo Hooke tenía tal teoría. Pero su teoría no estaba perfeccionada, y parece que él era incapaz de desarrollar matemáticamente las consecuencias de su teoría. Por ello comunicó a Newton sus ideas no confirmadas, pensando que Newton tenía la habilidad matemática, la capacidad mental y el sosiego necesarios para desarrollarla y demostrarla".

Y efectivamente el 24 de noviembre de 1679 Hooke escribió a Newton exponiéndole sus ideas y pidiéndole su opinión.

Pero no era Hooke el único que por aquellos años pensaba en el problema del movimiento de los astros. Bastaba en efecto sustituir la tercera ley de Kepler en la expresión obtenida por Huygens por la fuerza centrífuga, aunque no fue éste el camino seguido por ninguno de ellos, que no consiguieron llegar a la expresión que más tarde encontró Newton en su ley de la gravitación universal. Hooke había intercambiado opiniones con Lord Brouneker, Sydenham, Mayow y especialmente con sir Christopher Wreen (1612-1723) y con Edmund Halley (1656-1742). Se intercambiaron varias cartas entre estos dos últimos y Hooke desde 1677 y discutieron el problema en una sesión celebrada por la Royal Society en el mes de enero de 1684. Reconociendo su incapacidad para lograrlo y reconociendo la autoridad de Newton pensaron que éste era el único que podía atacar con éxito el problema, y delegaron en Halley para que visitara a Newton, a quien ya Hooke había pedido su opinión en carta de 24 de noviembre de 1679, en la que le pedía también que se reincorporara a los trabajos de la Royal Society.

La ley de la gravitación universal

Efectivamente, en el mes de agosto de 1684 Halley visitó a Newton en Cambridge. Al preguntarle Halley cuál debía ser la curva descrita por un planeta sometido a la acción de una fuerza atractiva dirigida hacia el Sol, y cuya magnitud fuera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambos, Newton contestó, sin dudarlo un momento, que la curva sería una elipse. ¿Cómo lo sabe?. Porque lo he calculado, contestó. Halley preguntó a Newton si podía enseñarle los cálculos, pero éste no los pudo encontrar entre sus papeles, prometiendo que los reharía y se los enviaría tan pronto como pudiera. Y efectivamente en noviembre de aquel mismo año, Newton enviaba a Halley un opúsculo titulado *De Motu* en el que se desarrollaban los cálculos solicitados, y que era un avance de los ***"Principia"*** que había de publicar en 1687.

La rápida contestación de Newton a la pregunta de Halley parece indicar que Newton había ya resuelto el problema en el mes de agosto de 1684, y así se venía admitiendo por la generalidad de los historiadores de la Ciencia. Pero en la actualidad se viene poniendo en tela de juicio esta opinión.

Lohne dice "Creemos que Newton no poseía la solución cuando Halley le visitó, y que no fue capaz de obtenerla en los meses siguientes" (Lohne, 1968).

Bernard Cohen afirma: "Newton desarrolló el concepto de gravitación universal en los primeros meses de 1685". "Un paso decisivo en el camino hacia la gravitación universal tuvo lugar a finales de 1679 y principios de 1680 cuando Robert Hooke introdujo a Newton en un nuevo método de analizar el movimiento a lo largo de una trayectoria curva. Hooke había tenido la habilidad de ver que el movimiento de un cuerpo que gira tiene dos componentes: una inercial y otra "centrípeta", es decir "dirigida hacia el centro" ... . En una órbita estable, como la de la Luna, ambas componentes están combinadas de forma que la Luna ni se aleja siguiendo un camino tangencial, ni se acerca a la Tierra describiendo una espiral" (Cohen, 1981).

A esta opinión se suma García Doncel. "En este contexto hemos de decir algo sobre la tradicional historia de que Newton concibió la idea de la gravitación universal casi veinte años antes, durante el periodo de peste de 1665-66, que él pasó en su casa natal de Woolsthorpe. Ahí, en su vida de campo, es donde se sitúa la leyenda de su contemplación de la Luna llena y la caída de la manzana. Según acabamos de ver, eso es imposible. Su concepción de la idea de la gravitación universal precede en dos años y pico su publicación de los Principia" (García Doncel, 1983).

Pero la "tradicional historia" de la caída de la manzana procede del mismo Newton, primero a través de su sobrina Catherine Barton, casada con John Conduit, quien la incluyó en el material que fue acumulando para una biografía de Newton que estaba preparando, pero falleció antes de publicarla. Del mismo origen son los datos que incluyó Voltaire en su "Philosophie de Newton".

También Stukeley oyó la anécdota al propio Newton, y la cuenta así:

"El 15 de abril de 1726 visité a Sir Isaac. Después de la comida, siendo el tiempo caluroso, salimos al jardín para tomar el té a la sombra de unos manzanos, sólos él y yo. Entre otras cosas me contó que él estaba exactamente en el mismo lugar, cuando hacía años, se le ocurrió la idea de la gravitación. Fue con motivo de la caída de una manzana, cuando estaba sentado con ánimo contemplativo. ¿Por qué cae siempre la manzana en dirección perpendicular al suelo?, pensó para sí mismo. ¿Por qué no se desvía hacia un lado, o hacia arriba, sino siempre hacia el centro de la Tierra?. Seguramente la razón es que la Tierra la atrae. Debe haber un poder de atracción en la materia; y la suma del poder de atracción en la materia de la Tierra debe estar en el centro de la Tierra, no en cualquier lugar de la Tierra. Por eso cae la manzana perpendicularmente, o hacia el centro. Si la materia atrae así a la materia, debe ser en proporción a su cantidad. Por lo tanto la manzana atrae a la Tierra, como la Tierra atrae a la manzana. Que existe un poder, como el que aquí llamamos gravedad, que se extiende a través del Universo ..." (McKie y Beer, 1951).

La misma anécdota es también citada, entre otros, por Brewster en "The life of Sir Isaac Newton" (Londres 1831) y por Marlen Folkes, amigo personal de Newton, Vicepresidente de la Royal Society en 1722 y posteriormente su Presidente desde 1741 al 1752. Y la recogen modernos historiadores (Rosenfeld 1965).

Y en otro escrito de Newton de 1714 se lee "Al principio del año 1665 encontré el método de aproximación por series ... El mismo año en mayo encontré el método de las tangentes ... El mayo siguiente tuve entrada en el método inverso de las fluxiones. Y el mismo año empecé a pensar en la gravedad extendida hasta la órbita de la Luna y (habiendo encontrado cómo calcular la fuerza con la cual un globo girando dentro de una esfera presiona la superficie de la esfera) de la ley de Kepler, según la cual los periodos de los planetas están en proporción sesquiáltera de sus distancias al centro de sus órbitas, deduje que la fuerza que mantienen los planetas en sus órbitas debe ser recíproca al cuadrado de sus distancias a los centros alrededor de los cuales giran, y de ello comparé la fuerza requerida para mantener la Luna en su órbita con la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra, y encontré que coincidían con bastante aproximación [pretty nearly] . Todo esto fue en los dos años 1665-1666" (Cajori, 1928, pág. 160), (Westfall, 1664, pág. 143).

En relación con la anterior afirmación de Newton, según la cual, en 1666 "empezó a pensar en la gravedad extendida hasta la órbita de la Luna", afirma Cohen, que dicha afirmación era debida a la "controversia sobre cuestiones de método y prioridad en el descubrimiento". (Cohen, 1980), pues "en aquellos tiempos, Newton pensaba aún en el movimiento planetario y lunar en relación con los torbellinos de Descartes" (Whitside, 1964 y 1976).

Pero efectivamente, lo que Newton buscaba era comprobar esa coincidencia: que la ley de la gravitación universal, definida por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, que él había deducido a partir de la tercera ley de Kepler, era la que hacía caer la manzana y era también la que retenía a la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra, y para ello era imprescindible una comprobación experimental, para lo cual necesitaba conocer las dimensiones de la Tierra. Y, en efecto, en el libro III de los "Principia", Proposición 19, problema 3 bajo el título "Encontrar la proporción del eje de un planeta a los diámetros perpendiculares a él", dice:

"Nuestro compatriota Mr. Norwood, midiendo una distancia de 905.751 pies de Londres medida entre Londres y York, en 1635 y observando la diferencia de latitudes que fue de $2^{o}28'$, determinó la medida de un grado, que resultó ser de 367.196 pies de Londres, es decir 57.300 toesas de París. M. Picard, midiendo un arco de un grado y 22'55" del meridiano entre Amiens y Malvoisine, encontró que un arco de un grado equivalía a 57.060 toesas de París. M. Cassini padre, midió la distancia sobre el meridiano entre la ciudad de Collioure en el Rosellón y el Observatorio de París; y su hijo añadió la distancia del Observatorio a la ciudadela de Dunkerke. Toda esta distancia era de 486.156 1/2 toesas y la diferencia de latitudes entre Collioure y Dunkerke era de 8 grados y 31' 11 5/6". De aquí un arco de un grado resulta ser de 57.061 toesas de París. Y de estas medidas deducimos que la circunferencia de la Tierra es de 123.249.600 y su semidiámetro de 19.615.800 piés de París, en el supuesto de que la Tierra sea de figura esférica".

Pero ¿cuál fue el valor utilizado por Newton en sus primeros cálculos buscando aquella comprobación?. En los últimos años, y gracias al impulso de la Royal Society, con la publicación de la correspondencia de Newton existente en sus archivos, conocemos con gran detalle el desarrollo de sus ideas, y en particular en lo que se refiere a esta comprobación fundamental que había de dar lugar a lo que se ha venido llamando la revolución newtoniana (Rosenfeld L. (1965), Cajori F. (1928), Cohen J.B. (1980).

Para efectuar la comparación entre la fuerza que hacía caer la manzana y la que retenía a la Luna en su órbita alrededor de la Tierra, necesitaba conocer el periodo de la revolución de la Luna, el cociente entre el radio de dicha órbita y el de la Tierra y, además, el valor de este último radio. Del estudio de los papeles de Newton, Cajori llega a la conclusión de que el valor utilizado en este primer cálculo pudo ser el adoptado por Galileo en su "Diálogo". Pero sea el que fuere el valor utilizado, el resultado fue que no se verificaba la coincidencia que Newton buscaba, lo que le hizo pensar en otra causa, además de la gravitación, que actuara sobre el movimiento de la Luna, tal vez los torbellinos de Descartes.

Ante este fracaso, Newton abandonó su idea sobre la gravitación, dedicando su atención a otros problemas, hasta que en Londres se tuvo conocimiento de la nueva medida de un arco de meridiano, mediante una triangulación efectuada en Francia por Picard entre 1669 y 1671. La importancia que se dio en Inglaterra, y más concretamente en la Royal Society, a esta operación se deduce del hecho de que en las Philosophical Transactions, de dicha Royal Society (vol. X, 1675) se publicara un artículo titulado " A Breviate of Monsieur Picarts Account of the Measure of the Earth", que se inicia con una nota introductoria, que dice:

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

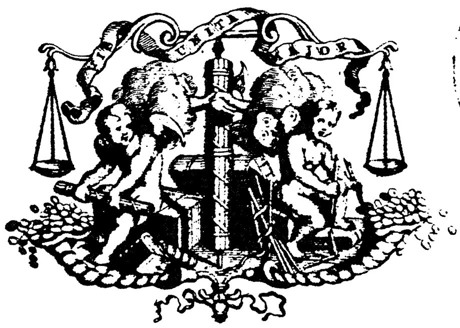
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Portada de la primera edición de los "Principia"

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
AUCTORE
ISAACO NEWTONO,
EQUITE AURATO.
EDITIO ULTIMA
AUCTIOR ET EMENDATIOR.



AMSTÆLODAMI
SUMPTIBUS SOCIETATIS,
MDCCXIV.

Donado por el Sr. Conde de Gimeno

Portada de la segunda edición

"This Account hath been printed about two years since, in *French;* but very few Copies of it being come abroad, (for what reasons is hard to divine;) it will be no wonder, that all this while we have been silent of it. Having at length met with an Extract thereof, and been often desired to impart it to the Curious; we shall no longer resist those desires, but faithfully commumicate in this Tract what we have received upon this Argument from a good hand".

Al conocer Newton esta nueva medida de un arco de meridiano repitió los cálculos o mejor dicho los hizo repetir, pues según parece el nerviosismo que le invadió no le permitió hacerlos él personalmente. Con ello consiguió la confirmación buscada: La fuerza que hacía caer la manzana era efectivamente la misma que sostenía a la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra; la ley de la gravitación universal era una realidad.

Philosophiae Naturalis Principia Mathematica

La promesa hecha por Newton a Halley en la visita de éste en el mes de agosto de 1684, la cumplió enviándole en el mes de noviembre de aquel año un opúsculo de nueve páginas titulado *De motu corporum in gyrum.* Después de leerlo, Halley visitó de nuevo a Newton para solicitar su consentimiento para darlo a conocer en la Royal Society y publicarlo. La magnífica impresión causada por este folleto tanto en Halley como en la Royal Society animó a Newton a desarrollar su contenido preparando lo que habría de ser, no sólo su obra cumbre, sino la obra cumbre de la ciencia en el siglo XVII, su "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", que fue presentada en la Royal Society el 5 de julio de 1686 y cuya primera edición, con una tirada de 350 ejemplares, apareció en Londres en 1687, con un prefacio fechado el 8 de mayo de 1686. Halley se encargó de preparar el texto y revisar las pruebas, y, ante las dificultades económicas de la Royal Society, cargó con los gastos de la edición.

La segunda edición, aparecida en 1714, en Amsterdam, está precedida por una presentación de Halley, y un prefacio de Newton y otro de los editores fechado en Cambridge el 12 de mayo de 1713 y formado por Rogerus Cotes, profesor del Trinity College de aquella Universidad. En dicho prefacio, y en su página XV se lee:

"Tan claramente se muestra ante nuestros ojos la elegantísima estructura del sistema del mundo, que si el rey Alfonso viviera aún, no se quejaría por falta de las virtudes de sencillez y armonía", en clara alusión a la anécdota de Alfonso el Sabio, a que más arriba nos referimos, que como vemos era conocida y tomada en consideración en Inglaterra casi cinco siglos más tarde.

La tercera edición, última publicada en vida de Newton apareció en 1726, a cargo de Pemberton. Entre los textos de estas tres ediciones existen notables diferencias, con las que Newton fue mejorando su obra. Newton falleció en 1727.

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

TOMUS PRIMUS.

GENEVÆ,

Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.

MDCCXXXIX.

Portada de la cuarta edición

En 1739 aparece una cuarta edición, en tres tomos, editada por los PP. La Seur y Jacquier, del Convento de la Stma. Trinidad de Roma.

En 1782 vuelven a aparecer los "Principia", incluida entre sus obras completas editadas en Londres.

Un estudio crítico de los *"Principia"* ha sido realizado con gran autoridad por García Doncel en una conferencia incluída en el curso sobre "Historia de la Física hasta el siglo XIX", publicado por esta Academia (García Doncel-1983). Aquí nos limitaremos a reseñar los distintos problemas tratados por Newton en ambas obras: *De Motu* y los *Principia.*

De Motu fue un adelanto preparado por Newton en pocos meses de lo que habría de ser la obra completa. Es natural que en esta última aparezcan cuestiones no tratadas en De Motu o que estén tratadas con mayor amplitud.

La obra "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" está dividida en tres libros. El primero trata de "El movimiento de los cuerpos", con catorce secciones. El libro II trata del "Movimiento de cuerpos en medios resistentes" con nueve secciones y el tercero lleva por título "El sistema del mundo, tratado matemáticamente". (*)

El libro primero empieza con una serie de definiciones: cantidad de materia (masa), cantidad de movimiento, fuerza (vis insita), fuerza centrípeta, fuerza absoluta, aceleración y cantidad de movimiento. Siguen las definiciones de tiempo y espacio absolutos, continúa con las leyes del movimiento, generalmente conocidas como leyes de Newton. Estudia a continuación una serie de cuestiones relacionadas con lo que hoy conocemos como problema de los dos cuerpos, entre ellas las siguientes: "Movimiento de cuerpos en secciones cónicas excéntricas", "Encontrar las órbitas elípticas, parabólicas, o hiperbólicas a partir de fuerzas dadas", "Como han de determinarse las órbitas cuando no se conoce ninguno de los focos", "Cómo puede determinarse el movimiento en órbitas dadas", "Determinación de las órbitas en que se moverán los cuerpos, bajo la acción de alguna clase de fuerza centrípeta", "Movimiento de cuerpos en órbitas móviles, y el movimiento de los apsides", "Movimiento de cuerpos atraídos entre sí por fuerzas centrípetas", "Fuerzas atractivas de cuerpos esféricos", "Movimiento de cuerpos muy pequeños sometidos a la acción de fuerzas centrípetas que provienen de las distintas partes de un cuerpo muy grande".

Al principio del libro tercero, dedicado al sistema del mundo, aparecen unas "Reglas para el razonamiento filosófico", que son las siguientes:

(*) La información que damos a continuación está tomada de la traducción inglesa publicada en la colección "Great books of the Western World" de la Enciclopedia Británica (1980).

Regla I.– "No debemos admitir más causas para los fenómenos naturales que las que sean ciertas y suficientes para explicar las apariencias".

Regla II.– "Por lo tanto a los mismos fenómenos naturales debemos, en lo posible, asignar las mismas causas".

Regla III.– "Las cualidades de los cuerpos, que no admiten aumento ni disminución en su magnitud, y que se refieren a todos los cuerpos al alcance de nuestras experiencias, han de extenderse como cualidades (propiedades) universales de todos los cuerpos".

Regla IV.– "A partir de fenómenos observados podemos deducir proposiciones exactas o aproximadas. Sin embargo pueden presentarse nuevos fenómenos que sean excepciones de la proposición anterior, y que obliguen a sustituirla por otra más exacta".

Reseña a continuación una serie de hechos de observación, que llama "Fenómenos".

Fenómeno I.– "Que en los planetas circunjovianos (satélites de Júpiter), los radios trazados desde el centro de Júpiter describen áreas proporcionales a los tiempos, y sus periodos, consideradas las estrellas en reposo son como las potencias 3/2 de sus distancias al centro".

Fenómeno II.– "Que en los planetas circunsaturnianos, los radios trazados desde el centro de Saturno describen áreas proporcionales a los tiempos, y sus periodos, consideradas las estrellas en reposo, son como las potencias 3/2 de sus distancias al centro".

Fenómeno III.– "Que los planetas primarios, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, con sus respectivas órbitas, acompañan al Sol".

Fenómeno IV.– "Que supuestas en reposo las estrellas, los periodos de los cinco planetas primarios y de la Tierra alrededor del Sol, son como las potencias 3/2 de sus distancias medias al Sol".

Fenómeno V.– "Que los planetas primarios, ... las áreas que describen los radios desde el Sol son proporcionales a los tiempos".

Fenómeno VI.– "Que el radio de la Luna al centro de la Tierra describe áreas proporcionales a los tiempos".

Siguen las siguientes "Proposiciones", de las que sólo daremos los enunciados.

Prop. 1. teor. 1: "Que las fuerzas por las cuales los planetas circunjovianos son continuamente separados de su movimiento rectilíneo, y retenidos en sus propias órbitas, tienden hacia el centro de Júpiter y son inversamente proporcionales a los cuadrados de sus distancias al planeta".

Prop. 2. teor. 2: "Que las fuerzas por las cuales los planetas primarios son continuamente separados del movimiento rectilíneo y retenidos en sus propias órbitas, tienden hacia el Sol y son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias de los planetas al Sol".

Prop. 3. teor. 3: "Que la fuerza por la cual la Luna es retenida en órbita tiende hacia la Tierra y es inversamente proporcional al cuadrado de las distancias de sus posiciones al centro de la Tierra".

Prop. 4. teor. 4: "Que la Luna gravita hacia la Tierra, y por la fuerza de la gravedad es continuamente separada del movimiento rectilíneo, y mantenida en su órbita."

Prop. 5. teor. 5: "Que los planetas circunjovianos gravitan hacia Júpiter; los circunsaturnianos hacia Saturno; los circunsolares hacia el Sol; y por las fuerzas de su gravedad son separados del movimiento rectilíneo y mantenidos en sus órbitas".

Prop. 6. teor. 6: "Que todos los cuerpos gravitan hacia cualquier planeta, y los pesos de los cuerpos hacia cualquier planeta, a iguales distancias del centro del planeta, son proporcionales a las cantidades de materia que ellos contienen."

Prop. 7. teor. 7: "Que hay un poder de gravedad perteneciente a todos los cuerpos, proporcional a las diversas cantidades de materia que contienen".

Prop. 8. teor. 8: "En dos esferas gravitando cada una hacia la otra, si la materia en todos los lugares equidistantes del centro es la misma, el peso de cada esfera hacia la otra será inverso a los cuadrados de las distancias entre sus centros".

Prop. 9. teor. 9: "Que la fuerza de gravedad considerada hacia el interior de la superficie de los planetas, disminuye casi en la proporción de las distancias al centro de los planetas".

Prop. 10. teor. 10: "Que los movimientos de los planetas en el espacio (en los cielos) puede subsistir por un tiempo excesivamente largo".

Prop. 11. teor. 11: "Que el centro de gravedad común de la Tierra, el Sol y todos los planetas permanece inmóvil".

Prop. 12. teor. 12: "Que el Sol oscila continuamente, pero nunca se desplaza mucho del centro de gravedad de todos los planetas".

Prop. 13. teor. 13: "Los planetas se mueven en elipses que tienen un foco común en el centro del Sol, y los radios trazados desde el centro describen areas proporcionales a los tiempos".

Prop. 14. teor. 14: "Los afelios y los nodos de los planetas son fijos".

Prop. 15. problema 1: "Encontrar los diámetros principales de las órbitas de los planetas".

Prop. 16. problema 2: "Encontrar las excentricidades y los afelios de los planetas".

Prop. 17. teor. 15: "Que los movimientos diurnos de los planetas son uniformes, y que la libración de la Luna proviene de su movimiento diurno".

Todas estas proposiciones son convenientemente desarrolladas y razonadas con más o menos extensión.

Otro de los temas tratados por Newton en los "Principia" es el de la forma de los planetas y en particular de la Tierra.

Prop. 18. teor. 16: "Que los ejes de los planetas son menores que los diámetros perpendiculares a los ejes".

Prop. 19. problema 3: "Encontrar la proporción de los ejes de un planeta a los diámetros perpendiculares a él". Empieza recordando las determinaciones de las dimensiones de la Tierra, supuesta esférica, efectuadas por Norwood, Picard y los Cassini, a que nos hemos referido al tratar del radio de la Tierra que utilizó Newton para comparar el valor de la gravedad en la superficie terrestre con la fuerza que retiene a la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra. Hace una serie de consideraciones sobre la variación con la latitud de la fuerza centrífuga debida a la rotación de la Tierra, y dice "Por lo tanto ... la figura de la Tierra ya no es esférica, sino engendrada por la rotación de una elipse alrededor de su eje menor".

Sigue tratando temas relacionados con la Tierra en el prop. 20, prob. 4. "Encontrar y comparar los pesos en diferentes regiones de la Tierra" y prop. 24, prob. 19 "Que el flujo y reflujo de los mares se debe a las acciones del Sol y de la Luna".

Inició también el estudio de la teoría de la Luna.

Prop. 22. teor. 18: "Que todos los movimientos de la Luna y todas las desigualdades de esos movimientos, se siguen de los principios que hemos establecido".

Prop. 25. prob. 6: "Encontrar las fuerzas con las que el Sol perturba el movimiento de la Luna".

Prop. 29. prob. 10: "Encontrar la variación de la Luna".

Prop. 30. prob. 11: "Encontrar el movimiento horario de los nodos de la Luna en una órbita circular".

Prop. 35. prob. 16: "Encontrar, para un instante dado, la inclinación de la órbita de la Luna con relación al plano de la eclíptica".

Prop. 38. prob. 19: "Encontrar la figura de la Luna".

Al determinar (prop. 45, prob. 31) el movimiento de la línea de los apsides de la Luna obtiene el valor 1°31'28" y dice a continuación: "El apside de la Luna es unas dos veces más rápido". Esta diferencia constituyó un problema que tardaría en resolverse y que puso en peligro la ley de Newton.

En los primeros días del mes de noviembre de 1680 se observa un cometa a la salida del Sol que fue visible a lo largo de todo el mes. Quince días más tarde se repite el fenómeno al anochecer, observándose otro cometa que a lo largo del mes se fue alejando del Sol y aumentando su cola hasta alcanzar los diecisiete grados de longitud. Naturalmente el fenómeno interesó a Newton, que lo observó hasta su desaparición en el mes de marzo del año siguiente. Las primeras observaciones las hizo con una lente. Pero deseoso de mejorar sus observaciones a fines de enero sustituyó la lente por un pequeño telescopio de tres pies, y éste a su vez por otro de siete pies dotado de un micrómetro, con lo que continuó sus observaciones durante la primera decena de marzo. Estas observaciones despertaron su interés por el problema de la construcción de nuevos telescopios, recurriendo al reflector y construyendo dos telescopios de este tipo, que lleva su nombre, el segundo de cuatro pies de focal y ciento cincuenta aumentos, sustituyendo los espejos metálicos por espejos esféricos de vidrio con su cara posterior plateada. Por otra parte la observación le permitió notar la descomposición de la luz, lo que le llevó a nuevos estudios sobre la aparición de los colores, que fueron incluídos en el libro II, parte IV de su *Optica* titulado "Observaciones en relación con la reflexión de los colores por gruesas placas transparentes pulimentadas".

La opinión general en aquellos tiempos era que, a diferencia de los planetas, los cometas eran visitantes, extraños al sistema solar, que eventualmente se acercaban, recorriendo órbitas rectilíneas.

Flamisteed lanzó una nueva teoría según la cual los dos cometas observados eran uno solo que recorría una órbita curvilínea alrededor del Sol. El Sol y el cometa eran sendos imanes. El cometa se acercaba al Sol que atraía uno de los polos del cometa, y luego se alejaba al ser repelido su otro polo por el Sol.

Hooke y Halley no admitían la posibilidad de ningún tipo de atracción entre el Sol y el cometa. Y lo mismo hizo Newton que rechazó la teoría de Flamisteed. Pero más tarde cambió de opinión, si bien seguía rechazando la idea de Flamisteed sobre la atracción magnética como causa del movimiento de los cometas, y terminó extendiendo a ellos su gravitación universal. Efectivamente Newton no se limitó a observar personalmente el cometa de 1680-1681, sino que recogió todas las observaciones existentes, incluídas las que le envió desde Maryland (EE.UU) su antiguo compañero de estudios Arthur Storer. Estudió además las observaciones de un nuevo cometa descubierto en 1682 por Halley, el célebre "cometa Halley", y comprobó que la solución más apropiada no era la trayectoria rectilínea, sino una parábola.

Con este nuevo punto de vista dedica Newton la última parte del libro III de los "Principia" al estudio de los cometas, incluyendo el cálculo de la órbita del cometa de 1680-81 y del de 1682. Los títulos de los apartados dedicados a ello son los siguientes:

Prop. 39.- Lema 4.— "Los cometas están más alejados que la Luna, y están en la región de los planetas".

Prop. 40. teor. 20: "Que los cometas se mueven en alguna de las secciones cónicas, teniendo sus focos en el centro del Sol, y los radios trazados hacia el Sol describen áreas proporcionales a los tiempos.

Prop. 40. Lema 5: "Encontrar una curva de naturaleza parabólica que pase a través de cualquier número de puntos".

Lema 6: "Dadas un cierto número de posiciones observadas de un cometa, encontrar la posición de un instante intermedio".

Prop. 41. prob. 21: "A partir de tres observaciones determinar la órbita de un cometa moviéndose en una parábola".

y como ejemplo calcula la órbita del cometa de 1680, e inicia el problema de la rectificación de órbitas en la Prop. 42. teor. 22: "Corregir la órbita de un cometa determinado como se indica arriba".

En la Proposición 66. Teorema 26 hay una referencia al problema de los tres cuerpos que dice:

> "Si tres cuerpos cuyas fuerzas decrecen como los cuadrados de sus distancias, se atraen mutuamente; y las aceleraciones atractivas de dos cualesquiera de ellas al tercero son inversamente proporcionales a las distancias; y los dos menores giran alrededor del mayor: Yo digo que para el interior de los dos cuerpos en movimiento, los radios tratados desde el interior y mayor, describirán alrededor de dicho cuerpo areas aproximadamente proporcionales a los tiempos" ...

Con lo aquí expuesto vemos que Newton en sus "Principia" no sólo resuelve el problema que le planteó Halley en su visita, sino que va mucho más allá. Resuelve el problema de los dos cuerpos, demostrando la posibilidad de existencia de órbitas elípticas, hiperbólicas o parabólicas, dependiendo de las condiciones iniciales, y que no es posible ninguna otra órbita. Deduce las tres leyes de Kepler a partir de la ley de la gravitación universal. Plantea el problema de los tres cuerpos iniciando el desarrollo de la teoría de perturbaciones, señalando que el movimiento de un planeta es debido a la acción combinada de todos los demás, y que los "cálculos convenientes exceden, a menos que yo esté equivocado, las posibilidades de la inteligencia humana" (Herivel, 1965). Inicia la teoría de la Luna, deduciendo los valores numéricos de las principales perturbaciones en su movimiento. Y por último plantea la nueva teoría sobre la figura de la Tierra, y de los planetas.

Como resultado del planteamiento de la gravitación universal, nacen dos nuevas ciencias que habrían de alcanzar un gran desarrollo a lo largo de los siglos siguientes: la Mecánica Celeste, y la Geodesia.

Hay un hecho que consideramos conveniente señalar. A pesar de ser Newton el inventor, o el coinventor, del cálculo diferencial, no aparece para nada su teoría de las fluxiones en los Principia. Su exposición es literaria, con numerosas demostraciones geométricas, hasta el extremo de que ni una sola vez aparece la fórmula:

$$F = G \frac{m\, m'}{r^2}$$

universalmente conocida como ley de la gravitación universal o ley de Newton, si bien constántemente habla de una "fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia".

Esto hace enormemente complicado el seguir los razonamientos de Newton, y asombroso que pueda haber llegado a obtener valores numéricos con una notable aproximación. Como ejemplo puede seguirle el estudio más arriba citado, que le permite llegar al valor del movimiento de la línea de los apsides de la Luna (prop. 45, prob. 31 del libro I).

Nos ha parecido interesante añadir, y lo hacemos como apéndice, la recensión de la obra de Newton aparecida en *Philosophical Transactions,* (Volume 16, enero a marzo de 1687).

La difusión de los "Principia"

La difusión de los "Principia" tropezó con dificultades, debido a la aceptación que habían alcanzado las teorías de Descartes, que incluso eran explicadas en Inglaterra en la Universidad de Cambridge, pero fue naturalmente en Francia donde la filosofía cartesiana había logrado una mayor aceptación, en particular por parte de la Academia de Ciencias de París, que a lo largo del primer tercio del siglo XVIII premió una serie de memorias destinadas a desarrollar el estudio del movimiento de los planetas en dicha teoría de los torbellinos de Descartes.

Voltaire, a su regreso de una estancia en Londres, que le permitió conocer las ideas de

Newton, publicó en 1734 unas *Cartas escritas desde Londres sobre los ingleses* en las que expuso y defendió la nueva teoría de la gravitación universal. Se ocupó además de impulsar la publicación de una traducción francesa de los "Principia" efectuada en 1759 por la Marquesa de Châstelet, en cuya preparación colaboró muy eficazmente Clairant, y para la que el mismo Voltaire redactó el prólogo.

Ya indicamos que uno de los temas tocados por Newton en los "Principia" era el de la forma de la Tierra, llegando a la conclusión de que como resultado de la acción de la gravitación y de la rotación del planeta, su forma debería ser la de un elipsoide de revolución achatado en el sentido de su eje de rotación.

Este problema de la figura de la Tierra venía preocupando a los Académicos franceses que ya habían encargado la medida de varios arcos de meridiano a Picard y a los Cassini, padre e hijo, a cuyas medidas se refiere el propio Newton en la Proposición XIX, problema III, del libro III de los "Principia". Como resultado de la comparación de estas medidas se llegó a la conclusión de que, en contra de lo afirmado por Newton, la Tierra era un elipsoide de revolución, pero alargado en el sentido de su eje de rotación. Newton sugirió que el problema estaba en que los arcos de meridiano utilizados eran demasiado cortos.

Pero en 1720 la propia Academia de Ciencias premió una Memoria de Louville basada en las ideas de Newton, y en 1736 acordó resolver el problema de la figura de la Tierra midiendo los arcos de meridiano uno próximo al polo y otro próximo al ecuador, para lo cual organizó dos expediciones. La primera midió un arco en Laponia entre 1736 y 1737, de cuya expedición formaron parte Maupertius, Clairant y Celsius. La segunda expedición trabajó en Perú entre 1736 y 1744 y de ella formaron parte Bouguer, la Condamine y Godin y los españoles Jorge Juan y Antonio de Ulloa (*).

El resultado de estas nuevas mediciones dio la razón a Newton, lo que hizo afirmar a Voltaire que los Académicos que intervinieron en estas operaciones aplastaron a la Tierra y a los Cassini.

Un problema que venía ocupando la atención de los astrónomos desde más de un siglo antes de la aparición de los "Principia" era el de la determinación de la longitud en el mar hasta el punto de que Felipe II en 1576 y Felipe III en 1598 anunciaron sendos premios para quien encontrara una solución al problema. El ejemplo del premio anunciado por España fue seguido por Holanda, Francia e Inglaterra, pero con retrasos que fueron entre casi medio siglo por Holanda y más de un siglo en los casos de Francia e Inglaterra. Uno de los métodos propuesto fue el llamado de distancias lunares, para cuya aplicación

---

(*) Esta cuestión ha sido estudiada en un curso de conferencias, organizado por esta Academia bajo el título "Conmemoración del CCL aniversario de la medición del arco de meridiano".

era necesario conocer la posición de la Luna con la máxima precisión posible. Esto hizo aumentar el interés por un mejor conocimiento de la teoría de la Luna, ya iniciada por Newton, lo que se dejaría notar en trabajos posteriores.

La Mecánica celeste

Newton, en sus "Principia" había iniciado la mecánica celeste, la teoría de la Luna y el estudio de la forma de la Tierra, pero siempre siguiendo métodos geométricos, sin recurrir en ningún momento al método de las "fluxiones" que él mismo había de introducir.

Cuando Newton murió en 1727 ya vivían los que habían de ser grandes matemáticos continuadores de su obra en el desarrollo de la Astronomía recurriendo a la poderosa herramienta del cálculo matemático: Leonard Euler (1707-1783), Alexio Claude Clairant (1713-1765) y Jean-le Rond D'Alembert (1717-1783).

Euler fue el primero que escribió las ecuaciones diferenciales del movimiento. En una Memoria titulada "Recherches sur le mouvement des corps celestes en general" se plantea el siguiente problema: "Si un cuerpo en M es solicitado por fuerzas cualesquiera, determinar el cambio instantáneo que estas fuerzas producen en el movimiento del cuerpo".

Define un sistema de ejes cartesianos ortogonales. Llama x, y, z a las coordenadas del punto de masa M; X, Y, Z, las "fuerzas absolutas o motrices" y escribe las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$2\frac{d\,dx}{dt^2} = \frac{X}{M} \; ; \quad 2\frac{d\,dy}{dt^2} = \frac{Y}{M} \; ; \quad 2\frac{d\,dz}{dt^2} = \frac{Z}{M}$$

Pero Euler fue no solo el introductor del método analítico en la Mecánica celeste. Treinta años más tarde (1765) publica su nueva obra "Theoria motus corporum solidorum" en la que establece que el movimiento de un sólido puede estudiarse como la composición de un movimiento de traslación de su centro de gravedad y un movimiento de rotación instantánea alrededor de un eje que pasa por dicho centro de gravedad. Establece las fórmulas que dan las proyecciones de la velocidad de rotación instantánea sobre los ejes principales de inercia (en función de los ángulos que llevan su nombre), plantea e integra las ecuaciones diferenciales del movimiento, y extiende el problema al estudio de la precesión y la nutación.

Otros estudios suyos versaron sobre cálculo de órbitas de planetas y cometas y cálculo de perturbaciones siguiendo su nuevo método de variación de los elementos, premiado por la Academia de Ciencias en 1756 y publicado en 1771. En el caso de no existir más que el Sol y un planeta, éste se movería recorriendo indefinidamente una elipse, que quedaría determinada por seis elementos: el semieje y la excentricidad que define la forma y dimensiones; la longitud del nodo y la inclinación que definen la posición del plano de la elipse; la posición del eje mayor de la órbita en su plano, y en el instante correspondiente a uno de los pasos del planeta por el perihelio. Conocidos estos seis elementos, que serían constantes, puede conocerse la posición del planeta en el espacio en un instante cualquiera. En el caso de existir más planetas, define Euler el movimiento perturbado suponiendo que el planeta considerado se moverá recorriendo en cada instante un arco infinitamente pequeño de una elipse, pero cuyos elementos no serán, como antes, constantes, sino funciones del tiempo. Conocida la forma en que estos elementos varían en función del tiempo, las mismas fórmulas que antes nos permitían conocer la posición del planeta a partir de los elementos, constantes, nos permitirán ahora conocer su posición en función de los mismos elementos, que ahora son variables con el tiempo.

Clairaut tomó parte en la expedición enviada por la Academia de París a Laponia para tratar de dilucidar la discusión planteada entre Newton y Cassini sobre la forma de la Tierra, tema sobre el que publicó una obra en 1743.

D'Alembert publicó en el mismo año 1743 otra obra titulada "Traité de Dynamique" en la que estableció el "principio" desde entonces conocido con su nombre. En 1749 publicó "Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre" estableciendo una relación entre la retrogradación de los nodos de la órbita lunar y la nutación. Dio la primera teoría completa de la rotación de la Tierra bajo los efectos de las perturbaciones causadas por la presencia del Sol y de la Luna. Otra serie de temas de Mecánica Celeste son estudiados en su obra "Recherches sur différents points importants du système du monde" (1754).

Euler, Clairaut y D'Alembert, además de los trabajos acabados de citar, dedicaron su atención al estudio del problema de los tres cuerpos, en particular a la teoría lunar, siendo notable la rivalidad entre los dos últimos, llevada a extremos inconcebibles por parte de D'Alembert, que criticó duramente los trabajos de Clairaut, en particular el estudio que hizo del movimiento del cometa Halley bajo la acción perturbadora de Júpiter y Saturno, que ocasionaron un retraso en el paso del cometa en 1759. El cometa fue, efectivamente, observado con sólo una diferencia de un mes con relación a la fecha calculada por Clairaut.

En 1746 publicó Euler unas tablas de la Luna, a partir de su teoría sobre el movimiento de nuestro satélite. El año siguiente Clairaut y D'Alembert presentaron sendas Memorias a la Academia francesa con sus soluciones al mismo problema. Los tres se encontraron con la misma dificultad con la que ya se había enfrentado Newton: el periodo de la revolución del perigeo lunar era de 18 años, mientras que el valor dado por la observación era de sólo nueve años. Ello les llevó a pensar en introducir en la ley de la gravitación un nuevo término inversamente proporcional al cubo de la distancia. A propuesta del propio Euler, la Academia de San Petersburgo anunció un premio para quien resolviera esta cuestión, premio que fue concedido a Clairaut en 1752, quien demostró que la diferencia era debida a términos de segundo orden que habían sido despreciados en una primera aproximación. Euler y D'Alembert llegaron más tarde al mismo resultado, y más de un siglo después, en 1872, se encontró entre los papeles de Newton un estudio incluyendo estas perturbaciones de segundo orden, llegando a un valor coincidente con los datos de observación.

En 1753 publicó Euler su primera teoría de la Luna con el título "Theoria inaequalitates" que fue utilizada por Tobías Mayer para calcular unas tablas de nuestro satélite. En 1765 publica Clairaut una obra más completa con el título "Theorie de la Lune" y en 1772 Euler una segunda teoría en una obra aparecida con el nombre de "Theoria motum lunae, nova methodo per tractata" que habría de ser utilizada posteriormente por G.W. Hill.

Un problema con el que se enfrentaron sin éxito Euler y D'Alembert fue el de la aceleración secular de la Luna. La solución la encontrarían más tarde Laplace y Delaunay.

La labor de Clairaut y D'Alembert fue continuada por José Luis Lagrange (1736-1813) y Pedro S. Laplace (1749-1827).

El interés principal de ambos estuvo en la Mecánica Celeste, dejándonos sendas obras fundamentales. Lagrange publicó en 1788 su "Mecanique Analytique" en dos volúmenes y Laplace entre 1799 y 1825 su "Mecánica Céleste" en cuatro.

Gracias a los trabajos de Lagrange y Laplace, la astronomía progresó enormemente haciendo posible el calcular las posiciones, con una precisión creciente, de la Luna y de los planetas en el pasado y en el futuro, conocer las masas de planetas y satélites ... y, no sólo ésto, sino incluso, como veremos más adelante, descubrir, por el cálculo, la existencia de un planeta.

Considerando el conjunto del sistema solar la existencia de perturbaciones seculares en los semiejes podría poner en peligro la supervivencia del mismo y, más aún, la posibilidad de permanencia de la vida en la Tierra. Laplace demostró en una memoria publicada en 1773 que teniendo en cuenta las perturbaciones de primer orden con relación a las masas los semiejes no presentan perturbaciones seculares.

Lagrange, por su parte, en 1774, demostró que lo mismo ocurría con las inclinaciones, estudiando en particular los casos de Júpiter y Saturno y de Venus, la Tierra y Marte. Tampoco las excentricidades ni las inclinaciones presentan variaciones seculares, sino solamente periódicas según demostró Laplace en 1776.

El problema de los tres cuerpos preocupó también a Lagrange quien, en una memoria publicada en 1772, estudió una serie de casos particulares que tienen solución rigurosa. Dadas dos masas m_1 y m_2 existen cinco puntos llamados puntos de libración; los tres primeros están en la línea recta definida por las posiciones de las dos masas y situadas una entre ellas y otra a cada lado de ambas y a distancias que dependen de la relación $m_1 : m_2$. Los otros dos puntos forman dos triángulos equiláteros con m_1 y m_2. Supuesta situada una tercera masa en uno de los puntos de libración, cada una de las tres masas se moverá describiendo cónicas semejantes manteniéndose indefinidamente sus posiciones relativas. Lagrange estudió este problema como una mera curiosidad matemática, sin la pretensión de que tal caso se diera en la realidad. Pero posteriores observaciones han puesto de manifiesto que el caso se da realmente con los asteroides llamados "troyanos".

En cuanto a la teoría de la Luna, la aportación de Lagrange fue poco importante. En cambio Laplace desarrolló una teoría de la Luna en el tercer volumen de su Mecánica celeste, que fue utilizada para el cálculo de tablas de nuestro satélite.

Un hecho puesto de manifiesto por la observación es el de que la Luna nos presenta siempre la misma cara. Newton había dado ya una explicación suponiendo que al enfriarse nuestro satélite había adquirido una forma no esférica, presentando el eje más alargado en la dirección hacia la Tierra. La Academia de Ciencias de París, una vez más, anunció un premio para quien encontrara una solución a este problema. Y el premio fue, una vez más, para Lagrange con su teoría sobre la libración de la Luna. (1780).

Otro problema clásico relacionado con el movimiento de nuestro satélite fue el de la llamada aceleración secular de la Luna, puesta de manifiesto como consecuencia de una diferencia sistemática entre las fechas calculadas para eclipses en la antigüedad y los instantes en que, según los historiadores, tuvo realmente lugar cada uno de esos fenómenos. Este problema fue planteado en 1693 por Halley a la Royal Society de Londres.

Lagrange fracasó al intentar buscar una explicación y supuso que el fenómeno no existía, sino que se trataba de falta de precisión en las observaciones antiguas.

Laplace pensó primero que era debido al hecho de que la gravitación no actuaba instantáneamente, sino que, como la luz, se transmitía con una cierta velocidad, más tarde (1787) encontró la explicación como un efecto de la disminución de la excentricidad de la órbita terrestre ocasionada por la acción de los planetas. Los valores encontrados por Laplace parecían coincidir con los datos de observación, pero más tarde se vió que la explicación era incompleta. La explicación encontrada por Laplace puso de manifiesto la existencia de otras desigualdades que fueron comprobadas por los eclipses antiguos. Casi un siglo más tarde Delaunay, siguiendo una sugerencia de Kant, volvió sobre el tema, considerando el efecto de las mareas que producen una fricción sobre la Tierra sólida que tiende a frenar la rotación terrestre, a alargar la duración del día, unidad de tiempo, lo que a su vez produce una aparente aceleración en todos los movimientos medidos con esa unidad de tiempo.

El estudio de la forma de la Tierra constituye otro tema de estudio en la Mecánica Celeste de Laplace, en un capítulo titulado "De la figure des corps célestes", llegando en esta cuestión, así como en el estudio de la precesión y nutación, más allá de lo que habían logrado Clairaut y D'Alembert.

También estudió Laplace en su "Mecanique Celeste" el movimiento de rotación de los cuerpos celestes y las mareas.

Lagrange analizó y completó los métodos de cálculo de órbitas desarrollados por Lambert y Euler. Publicó, además, una memoria en "La Connaisance des Temps" sobre el origen de los cometas.

Laplace, por su parte, se ocupó del origen, no de los cometas, sino de todo el sistema solar, en una obra que fue tal vez la que le dió más fama en su tiempo, la "Exposition du système du monde".

* * *

La ley de la gravitación universal, tal como Newton la expresó, permitió el desarrollo de una de las ramas de la Astronomía que, gracias a las aportaciones del propio Newton, y de Euler, Clairaut, D'Alembert, Lagrange y Laplace, permitió encontrar una explicación de los movimientos y de las formas de los astros del sistema solar, mucho más sencilla y más elegante que las que habían tratado de dar los sistemas que a lo largo de los siglos se fueron desarrollando apoyándose en las ideas de Aristóteles y demás filósofos griegos sobre la base de movimientos circulares uniformes.

Durante un par de siglos la teoría de perturbaciones logró explicar los movimientos observados de los planetas conocidos, pero logró algo más: permitió el descubrimiento de un nuevo planeta por el cálculo, y la observación confirmó su existencia, lo que supuso el gran triunfo de la Mecánica Celeste.

Cuando Herschell se dedicaba a hacer un estudio sistemático de la esfera celeste, se encontró, en 1781, con que una de las estrellas que figuraban en sus listas, cambiaba de posición: se trataba de un planeta. Y, buscando datos de observaciones anteriores resultó que ya había sido observado desde 1690 por Flamsteed, Bradley, Mayer, Messier y Le Monnier, disponiéndose así de un total de veinte observaciones del nuevo planeta al que se le dio el nombre de Urano.

Oriani, en 1785, calculó una órbita que le permitió disponer de efemérides para su posterior observación. Pero pronto se vio que las nuevas observaciones no encajaban en la órbita calculada. ¿Podría encontrarse la explicación en la existencia de un planeta desconocido, cuyas perturbaciones sobre Urano fueron la causa de las diferencias encontradas?.

Esta fue efectivamente la solución del problema, resuelto simultáneamente en el siglo siguiente por Adams en Inglaterra y por Leverrier en Francia, quienes aplicando los principios y los métodos de cálculo de la Mecánica Celeste, lograron encontrar el planeta Neptuno, que perturbaba el movimiento de Urano. Este fue el gran éxito de la Mecánica Celeste que permitió a Leverrier afirmar, que para descubrir un planeta no necesitaba recurrir al telescopio; le bastaba con el papel y la pluma.

Numb 186

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS

For the Months of *January*, *February* and *March*, 1687.

The CONTENTS.

 I. *Historia*

I. *Hiſtoria Plantarum, ſpecies hactenus editas aliaſque inſuper multas noviter inventas & deſcriptas complectens, &c. Autore* Joanne Rajo *e* Societate Regia. *Tomus primus.* Londini, 1686. Fol. *Apud* Henricum Faithorne *R. S. Typographum* ; *ad Inſigne Roſæ in Cœmeterio D.* Pauli.

II. *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica, Autore* Iſ. Newton, Trin. Coll. Cantab. *Soc. Matheſeos Profeſſore* Lucaſiano *& Societatis Regalis* Sodali. Londini. 4*to.* *Proſtat apud plures Bibliopolas*

II. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, Autore* Is. Newton Trin. Coll. Cantab. *Soc. Matheseos Professore* Lucasiano, & *Societatis Regalis Sodali.* 4to. Londini. *Prostat apud plures Bibliopolas.*

THis incomparable Author having at length been prevailed upon to appear in publick, has in this Treatise given a most notable instance of the extent of the powers of the Mind; and has at once shewn what are the Principles of Natural Philosophy, and so far derived from them their consequences, that he seems to have exhausted his Argument, and left little to be done by those that shall succeed him. His great skill in the old and new Geometry, helped by his own improvements of the latter, (I mean his method of *infinite Series*) has enabled him to master those Problems, which for their difficulty would have still lain unresolved, had one less qualified than himself attempted them.

This Treatise is divided into three Books, whereof the two first are entituled *de Motu Corporum*, the third *de Systemate Mundi.*

The first begins with definitions of the Terms made use of, and distinguishes *Time, Space, Place* and *Motion* into absolute and relative, real and apparent, Mathematical and vulgar: shewing the necessity of such distinction. To these definitions are subjoyned, the Laws of Motion, with several Corollaries therefrom; as concerning the composition and resolution of any direct force out of, or into any oblique forces, (whereby the powers of all sorts of Mechanical Engines are demonstrated:) the Laws of the reflection of Bodies in Motion after their Collision: and the like

These necessary *Præcognita* being delivered, our Author proceeds to consider the Curves generated by the composition of a direct impressed motion with a gravitation or tendency towards a Center: and having demonstrated that in all cases the Areas at the Center, described by a revolving Body, are proportional to the Times; he shews how from the Curve described, to find the Law or Rule of the decrease or increase of the Tendency or Centripetal forces (as he calls it) in differing distances from the Center. Of this there are several examples: as if the Curve described be a Circle passing through the Center of tendency; then the force or tendency towards that Center is in all points as the fift power or squared-cube of the distance therefrom reciprocally. If in the proportional Spiral, reciprocally as the cube of the distance. If in an Ellipse about the Center thereof directly as the distance. If in any of the *Conick* Sections about the *Focus* thereof; then he demonstrates that the *Vis Centripeta*, or tendency towards that *Focus*, is in all places reciprocally as the square of the distance therefrom; and that according to the Velocity of the impressed Motion, the Curve described is an *Hyperbola*; if the Body moved be swift to a certain degree than a *Parabola*; if slower an *Ellipse* or Circle in one case. From this sort of tendency or gravitation it follows likewise that the squares of the Times of the periodical Revolutions are as the Cubes of the Radii or *transverse Axes* of the *Ellipses*. All which being found to agree with the *Phænomena* of the Celestial Motions, as discovered by the great Sagacity and Diligence of *Kepler*, our Author extends himself upon the consequences of this sort of *Vis centripeta*; shewing how to find the *Conick* Section which a Bodie shall describe when cast with any velocity in a given Line, supposing the quantity of the said force known: and laying down several neat constructions to determine

termine the Orbs,either from the *Focus* given and two points or Tangents; or without it by five points or Tangents or any number of Points and Tangents making together five. Then he ſhews how from the Time given to find the Point in a given Orb anſwering thereto; which he performs accurately in the *Parabola*,and by conciſe approximations comes as near as he pleaſes in the *Ellipſe* and *Hyperbola*: all which are Problems of the higheſt concern in Aſtronomy. Next he lays down the Rules of the perpendicular deſcent of Bodies towards the Center, particularly in the caſe where the tendency thereto is reciprocally as the ſquare of the diſtance; and generally in all other caſes, ſuppoſing a general quadrature of Curve lines: upon which ſuppoſition likewiſe he delivers a general method of diſcovering the Orbs deſcribed by a Body moving in ſuch a tendency towards a Center, increaſing or decreaſing in any given relation to the diſtance from the Center; and then with great ſubtilty he determines in all caſes the Motion of the *Apſides* (or of the Points of greateſt diſtance from the Center in all theſe *Curves*, in ſuch Orbs as are nearly Circular. Shewing the *Apſides* fixt, if the tendency be reciprocally as the ſquare of the diſtance; direct in Motion in any *Ratio* between the Square and the Cube and retrograde; if under the Square: which Motion he determines exactly from the Rule of the increaſe or decreaſe of the *Vis Centripeta*.

Next the Motion of bodies in given Surfaces is conſidered,as likewiſe the Oſcillatory Motion of Pendules, where is ſhewn how to make a *Pendulum* Vibrate always in equal times, tho' the center or point of tendency be never ſo near; to which, the Demonſtration of Mr. *Hugens de Cycloide* is but a *Corollary*. And in another Propoſition is ſhewn the Velocity in each Point, and the time ſpent in each part of the Arch deſcribed by the Vibrating Body. After this the Effects of two or more Bodies, towards each of which there is a tendency, is conſidered; and 'tis made out that two Bodies, ſo drawing or attracting each other, deſcribe about the common center of Gravity, Curve Lines, like to thoſe they ſeem to deſcribe about one another. And of three Bodies, attracting each other, reciprocally as the Square of the diſtance between their Centers, the various Conſequences are conſidered and laid down, in ſeveral *Corollarys* of great uſe in explicating the *Phenomena* of the *Moons* Motions, the Flux and Reflux of the Sea, the Preceſſion of the *Equinoctial* Points; and the like.

This done our Author with his uſual Acuteneſs proceeds to examine into the Cauſes of this Tendency or centripetal Force, which from undoubted Arguments is ſhown to be in all the great Bodies of the Univerſe. Here he finds that if a Sphere be compoſed of an infinity of Atoms, each of which have a *Conatus accedendi ad invicem*, which decreaſes in duplicate Proportion of the Diſtance between them; then the whole *Congeries* ſhall have the like tendency towards its Center, decreaſing, in Spaces without it, in duplicate Proportion of the Diſtances from the Center; and decreaſing, within its Surface, as the diſtance from the Center directly; ſo as to be greateſt on the Surface, and nothing at the Center: and tho' this might ſuffice, yet to compleat the Argument, there is laid down a Method to determine the forces of Globes compoſed of Particles whoſe Tendencies to each other do decreaſe in any other *Ratio* of the Diſtances: Which Speculation is carryed on likewiſe to other Bodies not Spherical, whether finite or indeterminate. Laſtly is propoſed a Method of explaining the Refractions and Reflections of tranſparent Bodies from the ſame Principles; and ſeveral Problems ſolved of the greateſt Concern in the Art of *Dioptricks*.

Hitherto our Author has conſidered the Effects of compound Motions *in Mediis non reſiſtentibus*, or wherein a Body once in Motion would move equably in a direct Line, if not diverted by a ſupervening Attraction or tendency toward ſome other Body. Here is demonſtrated what would

would be the consequence of a resistence from a *Medium*, either in the simple or duplicate *Ratio* of the Velocity, or else between both: and to compleat this Argument is laid down a general Method of determining the density of the *Medium* in all places, which, with a uniform Gravity tending perpendicularly to the plain of the *Horizon*, shall make a *Project* move in any curve Line assigned; which is the 10*th. Prop. Lib.* II. Then the circular Motion of Bodies in resisting *Media* is determined, and 'tis shown under what Laws of decrease of Density, the Circle will become a proportional Spiral. Next the density and compression of Fluids is considered, and the Doctrine of *Hydrostaticks* demonstrated; and here 'tis proposed to the Contemplation of Natural Philosophers, whether the surprizing *Phenomena* of the Elasticity of the Air and some other Fluids may not arise from their being composed of Particles which flie each other; which being rather a Physical than Mathematical Inquiry, our Author forbears to Discuss.

Next the Opposition of the *Medium* and its Effects on the Vibrations of the *Pendulum* is considered, which is followed by an Inquiry into the Rules of the Opposition to Bodies, as their Bulk, Shape, or Density may be varyed: Here with great exactness is an Account given of several Experiments tried with *Pendula*, in order to verify the aforegoing Speculation, and to determine the quantity of the Airs Opposition to Bodies moving in it.

From hence is proceeded to the undulation of Fluids, the Laws whereof are here laid down, and by them the Motion and Propagation of Light and Sound are explained. The last *Section* of this Book is concerning the Circular Motion of Fluids, wherein the Nature of their *Vortical* Motions is considered, and from thence the *Cartesian* Doctrine of the *Vortices* of the Celestial Matter carrying with them the Planets about the *Sun*, is proved to be alltogether impossible.

The

The III. and laſt Book is entituled *de Syſtemate Mundi*, wherein the Demonſtrations of the two former Books are applyed to the Explication of the principal *Phenomena* of Nature: Here the verity of the *Hypotheſis* of *Kepler* is demonſtrated; and a full Reſolution given to all the difficulties that occur in the *Aſtronomical* Science; they being nothing elſe but the neceſſary conſequences of the *Sun, Earth, Moon*, and *Planets*, having all of them a gravitation or tendency towards their Centers proportionate to the Quantity of Matter in each of them, and whoſe Force abates in duplicate proportion of the Diſtance reciprocally. Here likewiſe are indiſputably ſolved the Appearances of the Tides, or Flux and Reflux of the Sea; and the Spheroidical Figure of the *Earth* and *Jupiter* determined, (from which the preceſſion of the Equinoxes, or rotation of the Earths Axis is made out,) together with the retroceſſion of the *Moons* Nodes, the Quantity and inequalities of whoſe Motion are here exactly ſtated *a priore*: Laſtly the Theory of the Motion of Comets is attempted with ſuch ſucceſs, that in an Example of the great Comet which appeared in 168$\frac{0}{1}$, the Motion thereof is computed as exactly as we can pretend to give the places of the primary Planets; and a general Method is here laid down to ſtate and determine the *Trajectoriæ* of Comets, by an eaſy Geometrical Conſtruction; upon ſuppoſition that thoſe Curves are *Parabolic*, or ſo near it that the *Parabola* may ſerve without ſenſible Error; tho' it be more probable, ſaith our Author, that theſe Orbs are *Elliptical*, and that after long periods Comets may return again. But ſuch *Ellipſes* are by Reaſon of the immenſe diſtance of the *Foci*, and ſmallneſs of the *Latus Rectum*, in the Parts near the Sun where Comets appear, not eaſily diſtinguiſhed from the Curve of the *Parabola*: as is proved by the Example produced.

The whole Book is interſperſed with *Lemma's* of General uſe in *Geometry*, and ſeveral new Methods applyed, which

which are well worth the confidering; and it may be juftly faid, that fo many and fo Valuable *Philofophical Truths*, as are herein difcovered and put paft Difpute, were never yet owing to the Capacity and Induftry of any one Man.

ADVERTISEMENT;

Whereas the Publication of thefe Tranfactions *has for fome Months laft paft been interrupted; The Reader is defired to take notice that the care of the Edition of this Book of Mr.* Newton *having lain wholly upon the Publifher (wherein he conceives he hath been more ferviceable to the Commonwealth of Learning) and for fome other preffing reafons, they could not be got ready in due time; but now they will again be continued as formerly, and come out regularly, either of three fheets, or five with a Cutt; according as Materials fhall occur.*

LONDON,

Printed by *J. Streater*, and are to be fold by *Samuel Smith* at the *Princes Arms* in St. *Paul's* Church-yard.

BIBLIOGRAFIA

The correspondence of Sir Isaac Newton. 3 vols. Cambridge University Press. 1959-61.

CAJORI, F. (1965). *Sir Isaac Newton.*- Baltimore. Williams and Wilkins. 1928.

COHEN, B. *The newtonian revolution* (Cambridge Univ. Press.), 1980.

COHEN, B. (1981). *El descubrimiento newtoniano de la gravitación.* Investigación y Ciencia 56.- Mayo 1981.

EULER, L. *Recherches sur le mouvement des corps celestes en general.*- Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1747.

GARCIA DONCEL, M. (1983).- *Los Princia de Newton.* R.A.C.- Historia de la Física hasta el siglo XIX.

HERIVEL, J.V. *The background to Newton's Principia Oxford.* Clarendon Press (1965).

J. LOHNE (1960). *Hooke versus Newton.*- Centaurus 1960, vol. 7, nº1, pp. 6-52.

McKIE y BEER, (1961). *Newton's Apple.*- Notes and Records of the Royal Society. vol. 9, nº1 (1951).

ROSENFELD, L. (1965). *Newton and the law of gravitation* Archive for History of Exact Sciences. vol. 2, 1962-66.

WHITESIDE, D.T. *Newton's early thrughts on planetary motion* (British Journ for the History of Science, vol. 2), pág. 117-137.

WHITESIDE, D.T. *Newton's lunar theory* (Vistas in Astronomy vol. 19), pág. 317-328.

WESTFALL, R. *Never at Rest.*- Cambridge University Press. 1986.

Encyclopedia Britannica. Great Books of the Western World, vol. 34, I. Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy,* 1952.