LA MATEMATICA ARABE

JUAN VERNET GINES *

Hablar de la matemática árabe me resulta algo complicado, y ello se debe a una cuestión exclusivamente temporal y creo que muy comprensible: en el año 1980 esta Real Academia me encargó la organización de un curso sobre Historia de la Ciencia Arabe que fue publicado en 1981. En el mismo las profesoras María Asunción Catalá y María Victoria Villuendas trataron ya, a mi parecer, suficientemente, de este tema, y considero improcedente volver sobre él, pues, desde entonces hasta ahora, pocas novedades — sí algunas — han aparecido. Por tanto me he decidido por exponer uno de los puntos matemáticos entonces apenas rozados: el de la bibliografía y fuentes de que disponemos para el estudio de este periodo de la matemática y, de paso y en los lugares que me parezcan más idóneos, alguno de los últimos descubrimientos sobre el quehacer de nuestros antepasados realizados por el Departamento de Matemáticas de París–Orsay, especialmente por los señores Rashed y Djebbar; en Túnez por Suissi; en la Brown University por Toomer y los discípulos de Neugebauer, y en Barcelona, y solo de refilón, estudiando problemas mecánicos.

Algunos de estos puntos me han hecho reflexionar, una vez más, en lo que aconsejo — y acostumbro a practicar — a mis alumnos cuando se enfrentan con un manuscrito misceláneo, árabe o no: leerlo todo aunque parezca que no tiene interés. Verán prácticamente ustedes las consecuencias que puede tener cuando tratemos de la intersección entre cónicas y alabeadas.

El punto de partida tradicional para el estudio de la Historia de las Matemáticas es la obra dirigida por Moritz Cantor (1856–1900) en los cuatro volúmenes de sus **Vorlesungen über Geschichte der Mathematik** (Leipzig, 1900–1908) reproducida en Nueva York–Stuttgart, 1965). Conviene no confundir a Moritz con Georg Cantor (1845–1918) quien desarrolló la teoría de conjuntos. igualmente han sido reeditadas las **Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie** de Braunmühl (Leipzig, 1900–1903 = Niederwalluf bei Wiesbaden, 1971); M. Curtze: **Urkunden zur Geschichte der Mathematik und der Renaissance** (Leipzig, 1902; reproducido en Nueva York–Londres, 1968); **Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke** de Heinrich Suter (Leipzig, 1900 = Ann Arbor, 1963 y otras varias), obra que fue completada por H.P.J. Rénaud en el artículo **Additions et corrections à Suter** ... "Isis" 18 (1932), 165–183 y recogida y ampliada en

---

* Catedrático de la Universidad de Barcelona.
Correspondiente de esta Real Academia.

lo que a nuestra patria se refiere por José Augusto Sánchez Pérez en sus **Biografías de Matemáticos Arabes que florecieron en España** (Madrid, 1921 (= MRACEFN, serie 2, vol. 1), Académico que fue de esta Real de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; al mismo autor se debe el libro publicado en las Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (Serie 2,7 = 1929) con el título de **Las matemáticas en la Biblioteca de El Escorial** que se presenta bajo la forma de diccionario bibliográfico de autores; la edición y traducción del **Compendio de álgebra** del sevillano Abenbéder (Madrid, 1916); **La partición de herencias entre los musulmanes del rito malequí** (Madrid, 1914) y **La aritmética en Roma, en India** y **Arabia** (Madrid–Granada, 1949) entre otras.

En Buenos Aires, 1951, aparecía la **Historia de la matemática** de Julio Rey Pastor (1888–1962) y J. Babini (1897–1984), que dedicaba unas breves pero correctas páginas al tema que nos interesa y que, prologada por J. Vernet, está siendo reeditada en Barcelona (1984). Como en esta obra se da un resumen bien escogido de la bibliografía manejada por los autores es por lo que dejamos de enumerar algunas revistas y obras básicas fundamentales pero antiguas. Existen además los tomitos consagrados a los árabes por F. Vera en su **Historia de la Matemática en España** (Madrid, 1933) y **La Matemática en el Occidente latino–medieval** (Buenos Aires, 1956).

Pueden manejarse, en general, con provecho, los artículos que sobre matemáticos árabes van apareciendo en la segunda edición de la **Encyclopédie de l'Islam** que hoy en día, y después de unos treinta años de iniciar su publicación, está llegando a la letra **M**, y los del **Dictionary of Scientific Biography** (Nueva York, 1970–1980), ambas obras con magníficos índices: en la primera, parcial – ya he dicho que solo ha llegado a la letra **M** – y en la segunda, total. Igualmente en las revistas especializadas en matemáticas, arabismo o Historia de la Ciencia, tanto del pasado como del presente, se encontraban y encuentran artículos sobre nuestro tema, en especial en "Scripta Mathematica" (Nueva York, 1 (1932) e "Historia Mathematica" (Nueva York, 1 (1974). Esta última, fundada por el inolvidable Kenneth O. May (1915–1977), es el órgano oficial de la Comisión de Historia de las Matemáticas de la Unión Internacional de Historia de la Ciencia. Da brevísimas noticias de los trabajos que van apareciendo sobre Historia de las Matemáticas, la árabe, como es lógico, incluida.

Sin embargo, todo lo hasta aquí dicho, y que podría completarse con lo que escribí en la parte propedéutica de mi **Historia de la Ciencia Española** (Madrid, 1975), **no** constituye una verdadera **Historia de las matemáticas árabes.** Esta Historia, en el sentido en que la entiende un matemático, ha sido escrita en ruso y por un ruso. Me refiero al profesor Adolf Andrei Pavlevich Yushkevitch (1906–), la grafía de cuyo nombre fluctúa según la lengua en que se escribe: en alemán, Juschkewitsch, y en francés, Youschkevitch. La versión alemana, **Geschichte der Mathematik im Mittelalter,** tiene dos pies de imprenta: Leipzig, 1964 y Basel, 1964. Pero el texto es el mismo y esta duplicidad se debe exclusivamente a razones comerciales. El libro trata de las matemáticas en todo el mundo medieval. La versión francesa solo recoge la parte consagrada a nuestro tema: **Les mathématiques arabes (VIII^{e}– XV^{e} siècles),** publicada en París (1976). Hay que hacer notar que el autor añade a la traducción una serie de notas que alcanzan hasta el momento de su publicación. Es pues la traducción francesa la que debe servir de punto de arranque para ulteriores investigaciones.

Por otra parte los profesores Matbieskaya y Boris Rosenfeld (n. 1917) han publicado en ruso tres volúmenes (Moscú, 1983) sobre **Los matemáticos y astrónomos musulmanes de la Edad Media y su obra (siglos VIII–XVII)** que convendría traducir a alguna lengua occidental pues contiene información sobre muchos manuscritos y autores que hasta ahora han pasado desapercibidos. Es más: es en el Asia soviética musulmana donde se encuentran, incluso, manuscritos de matemáticos españoles y, si mi memoria no me es infiel, el que hace unos años estudiamos con la Profesora Asunción Catalá sobre Maslama de Madrid procede de aquellas tierras. Al mismo Rosenfeld se debe – aunque en este momento nos interese menos – una **Historia de la Geometría no euclidea. Evolución del concepto del espacio geométrico** (Moscú, 1976). En fin, quien quiera conocer la aportación de los historiadores de la ciencia rusos al campo de las ciencias exactas puede leer en español los textos que publicamos en **Estudios sobre Historia de la Ciencia Arabe** (Barcelona, 1980), 9–79.

Evidentemente la enumeración que hemos hecho quedaría coja si no diésemos noticia del repertorio más importante aparecido en los últimos años sobre nuestro tema en Occidente. Me refiero a los volúmenes V y VI de la **Geschichte des Arabisches Schriftums** de Fuat Sezgin subtitulados **Mathematik bis ca. 430 H** y **Astronomie bis ca. 430 H.** (Leiden, Brill 1974 y 1978 respectivamente). Incluir este último en una relación de obras sobre matemáticas árabes es obligatorio puesto que la trigonometría nació como ciencia auxiliar de la astronomía y solo a principios del siglo XI encontramos el primer tratado autónomo de esta nueva rama de las matemáticas: el de Ibn Mu^{c}āḏ de Jaén (edición, traducción y estudio de M.V. Villuendas: **La trigonometría europea en el siglo XI** (Barcelona, 1971).

La estructuración del volumen V es la habitual de esta obra enciclopédica de Sezgin: Estado de la cuestión y una visión de conjunto sobre las matemáticas árabes; las fuentes que conocieron de la Antigüedad enumerando por orden cronológico autor tras autor e intercalando los manuscritos anónimos en el lugar que, a su juicio, le corresponde. No hay que sorprenderse si se encuentran citados como matemáticos Homero o Sócrates: solo significa que algún autor árabe posterior los citó como tales o les atribuyó algún teorema. Dentro ya de la rúbrica correspondiente aparece la biografía del interesado, sus aportaciones, la bibliografía sobre el mismo y luego, obra tras obra, los manuscritos que la conservan y, si es posible, breve resumen del contenido y la influencia de éste en el mundo y los autores contemporáneos que se han ocupado de la obra y, con frecuencia, unas palabras sobre sus opiniones. A veces, si no hay más datos, es sumamente conciso pero basta. Por ejemplo, para probar que el tratado matemático árabe español más antiguo está esperando aún alguien que lo estudie: el **Mujtasar fī–l–misāḥa** de Muḥammad b. Abdūn (311/923–360/970) que se conserva en los folios 1–23 del manuscrito 5311 de París.

Cierra el libro la bibliografía, índice de abreviaturas de las bibliotecas que contienen manuscritos árabes y otros autores, títulos, etc.

Esta obra — ¿qué obra no lo es? — ha sido criticada más que por el material que contiene o por algún que otro desliz en la colocación del mismo, por motivos ideológicos, es decir, por el afán de los que ven en Sezgin a un filoislamista a ultranza dispuesto a demostrar que gran parte de los descubrimientos modernos tienen su origen en el medioevo árabe.

Si Moscú es un centro de investigación sobre las matemáticas árabes, lo mismo puede decirse de Frankfurt con E.S. Kennedy, Sezgin y King; de París Sur con Rušdī Rāšid y Ŷabbār — al cual puede añadirse el tunecino Suissi — y de la Universidad de Brown y otras, de los Estados Unidos de Norteamérica cuyas cátedras están ocupadas generalmente por discípulos de Neugebauer y Toomer. Lo único triste y lamentable es que haya estallado una especie de guerra civil como la que se vivió en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Matemáticas de Madrid a principios de siglo o en la de Ciencias y Bellas Artes de Barcelona — pero por motivos distintos — en la misma época. Estas guerras, que en unos casos se inician por problemas de prioridades (no siempre ni mucho menos) me hacen recordar las opiniones al respecto de mi llorado amigo D.J.S. Price (1922—1983) y de Miguel Asín.

Ejemplo de estas polémicas es la que gira entre Rashed y Sesiano (Brown) acerca de la edición y estudio del manuscrito árabe que contiene parte de los libros perdidos de Diofanto y que fue descubierto por F. Sezgin (Cf. GAS 5 (1974), 179; "Historia Mathematica" 12, 1 (1985), 82—85) y que lleva a los críticos a emplear, prácticamente, la técnica de los esquemas literarios.

Prescindiendo de estas cuestiones colaterales desearía hacerme eco de los trabajos de la escuela de París, pues afectan a un punto muy discutido en España: la carencia, a lo largo de su historia, de matemáticos (**no** de astrónomos) de valía. Sigo a continuación a Ŷabbar quien tiene la amabilidad de enviarme sus publicaciones ciclostiladas. La última que he recibido (1985) se titula **Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e^ siècle: al—Mu'taman et Ibn Sayyid.** En lo que sigue entrecomillaremos las palabras que traducimos del texto francés.

El primer autor es el rey de Zaragoza que pertenecía a la familia de los Banū Hūd y que reinó entre el 1081 y 1085, es decir, que fue contemporáneo del Cid. Normalmente los historiadores españoles escriben su nombre como al—Mu'tamin. Para el tema que aquí nos interesa este problema ortográfico carece de trascendencia. En cambio sí que hay que tener en cuenta que en 1068 el cadí Ṣāᶜid de Toledo le citaba en su libro **Tabaqāt al—umam** como un joven que prometía en el campo de las matemáticas. Sea como fuere el hecho es que sabíamos que había escrito un tratado sobre la materia, el **Kitāb al—istikmāl (Libro del perfeccionamiento;** otras veces se ha traducido como **Enciclopedia de las ciencias**, sobre el cual cabe la duda de si fue objeto de sucesivas ampliaciones y de si llegó a terminarse. En todo caso esa obra llegó a ser conocida total o parcialmente, en Oriente en el siglo XIII, lo cual permite abrigar la esperanza de que algún día aparezca. Igualmente, según al–Maqqari (**Analectes** 1, 288) habría escrito también otras obras científicas y, entre éstas, un tratado de Optica. Para Ŷabbar no cabe duda de que con el **Kitāb al–istikmāl** "quería llenar una laguna en la enseñanza superior de las matemáticas. Se trataba de poner a disposición de los estudiantes un tratado similar a los de la colección de los libros designados como "intermedios" (**mutawassiṭāt**) que permitiera avanzar más allá de los libros básicos griegos en los campos de la geometría, la astronomía y la teoría de números. Muchos datos confirman esta hipótesis. En su libro **La medicina de las almas** el filósofo y astrónomo (judío) Yosef b. Yehudá al–Sabtí (de Ceuta), generalmente llamado Ibn ᶜAqnīn, aconseja estudiar su obra al mismo tiempo que los **Elementos** de Euclides, el **Almagesto** de Tolomeo y otros libros intermedios. Cuando este autor abandona Fez y llega a El Cairo ... inicia el estudio de la obra de al–Mu'taman bajo la dirección de Maimónides".

Como es Ibn Qiftī el transmisor de esta noticia, tenemos la seguridad de que el manuscrito – completo o incompleto – se encontraba ya en el Próximo Oriente a principios del siglo XIII. Los comentarios y revisiones de Maimónides parecen haber dado lugar a una nueva redacción de esta obra, con el título de **Kitāb al–ikmāl** por Muḥammad al–Marāgī, anterior al 728/1327. El análisis de las alusiones conocidas al contenido de la obra de al–Mu'taman llevan a Ŷabbar a establecer que el zaragozano desarrolló la teoría de los números amigos con mayor amplitud que Ṯābit b. Qurra (m. 901); trataba también de geometría en que, aparte de seguir a Euclides, entraba en el análisis "de la proposición I de la **Medida del Círculo** de Arquímedes, del teorema de Herón sobre el área del triángulo en función del perímetro ... de figuras rectilíneas y curvilíneas que, probablemente, venían seguidas de otras relativas a las secciones cónicas y a la geometría del espacio ...".

Esta parte debió quedar incompleta puesto que Ibn al–Akfānī en su manual enciclopédico **Iršād al–Qāṣid** "enumera las obras que tratan de los distintos aspectos de esta disciplina pero añade: "Hasta ahora no he visto un libro que englobe estas diez partes. Pero si el **Kitāb al–istikmāl** de al–Mu'taman b. Hūd ... se hubiera terminado, habría sido suficiente". En el siglo XIII el magrebí Ibn Munᶜim dirá que para entender su propia obra, el **Fiqh al–hisāb,** no basta con conocer los **Elementos** de Euclides sino que es necesario haber estudiado también la obra de al–Mu'taman.

Muchas veces, al leer textos astronómicos orientales, en los que se utilizaba como sistema de demostración el del análisis y la síntesis, he pensado lo útil que sería una tesis sobre este procedimiento llamado en árabe **al–tarkīb wa–l–taḥlīl,** método que también fue conocido por al–Mu'taman. Hoy, en fin, creo que ya se ha hecho – no tengo a mano mis papeletas – en un estudio sobre la obra de Alhacén que lleva ese título.

El segundo autor que estudia Ŷabbar es el valenciano Ibn Sayyid, repartidor de herencias, que aún estudiaba esta ciencia en Játiva en el 1063. Tuvo un discípulo de excepción, Avempace, gracias al cual se puede intuir alguno de sus descubrimientos en el campo de la geometría que debió explicar – parece ser que dejó poco o nada escrito – a sus alumnos entre el 1087 y el 1096. Algunos de estos datos se encuentran en tres folios de un manuscrito (972, 6 fols. 33 a–34 b) cuya reproducción tengo en casa desde hace años dado que contiene varios opúsculos sobre el astrolabio, por lo que sí me he interesado dejando, en cambio, al paso esos tres folios de letra endemoniada. Por eso he dicho al principio que un manuscrito misceláneo debe ser examinado por completo. Estos folios – y otras fuentes – son los que han permitido a Ŷabbar establecer que Ibn Sayyid se preocupó de la teoría de números que debió tener su origen en la obra de Nicómaco de Gerasa y Ṯābit b. Qurra. En Geometría estudió las **Cónicas** de Apolonio dando definiciones equivalentes, pero no iguales, a las de éste. Según Avempace, en este campo Ibn Sayyid habría ido mucho más allá que los autores clásicos. Parece haberse preocupado de "las intersecciones entre cónicas y no cónicas, descubriendo, según Avempace, que aquéllas no se encontraban contenidas en un mismo plano". Al parecer las curvas alabeadas fueron para él un instrumento para el estudio de las curvas planas. Como de costumbre, en los textos aludidos aparecen tecnicismos difíciles de traducir dada la falta de fijación de un léxico naciente.

La transmisión de estos conocimientos a Oriente queda clara si se piensa que Avempace fue, además de filósofo, un excelente matemático y un innovador en el campo de las hipótesis astronómicas y que la sucesión de maestros y discípulos está asegurada hasta su llegada a Persia un siglo más tarde.

Prescindiendo de tratar del uso de las fracciones decimales que son utilizadas por ejemplo, por al–Uqlidisī (siglo X) y al–Kāšī (siglo XV), querría volver sobre las aportaciones rusas a este campo de estudios y en especial a la edición del texto hebreo y traducción rusa, acompañadas de un comentario matemático, este último debido a Boris Rosenfeld, del tratado de un Alfonso titulado **Mĕyyaššer ᶜĀqāb (Rectificación de curvas),** Moscú, 1983 que conocemos a través del manuscrito único del British Museum (Add. 26984 fols. 93 b–128 a) y sobre el cual ya llamó la atención a S. Luria (1891–1964) en **Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten** (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik (2,2 (1932), 106–185). El autor parece que puede ser identificado con rabí Abner de Burgos quien se convirtió al cristianismo y llegó a ser obispo de Burgos con el nombre de Alfonso de Valladolid (1270–1350). La lectura del texto nos demuestra – contra lo que nosotros mismos creíamos hasta ahora y no sabíamos explicar – que en la Castilla del siglo XIV se trabajó paralelamente a como los sabios árabes orientales en estos temas. En el capítulo primero hace la historia de las soluciones dadas al problema de la cuadratura del círculo citando las soluciones, hasta ahora desconocidas, de Averroes y Avicena; el problema del infinito, intentos para probar el quinto postulado en donde cita a los autores árabes orientales y a un tal Mošé ha–Leví de Sevilla (?), teoremas sobre cuadraturas y cubaturas; demuestra conocer la hipocicloide con la diferencia de que la figura que explica cómo se engendra la recta a partir de los dos movimientos circulares no me parece que coincida con la de Nasīr al–Dīn–Copérnico, lo cual no me extraña puesto que en un próximo artículo esperamos demostrar que esa curva ya era conocida por los mecánicos andalusíes del siglo XI. Por otra parte los intentos de cuadraturas y cubaturas le llevan a formular un caso particular del principio de Cavalieri (cf. DSB 3 (1971), 150**b**. Como la terminología técnica empleada es semejante a la de Leví ben Gerson de Banyuls (1288–1344) y ambas muestran un claro influjo del árabe, hay que concluir – contra lo que creíamos hasta hace poco – que al menos este tipo de cuestiones también fue tratado por los judíos de Occidente partiendo de premisas árabes. En cambio, y hasta ahora, no hemos encontrado, que yo sepa, ningún caso de un matemático cristiano–hispánico que se preocupara por estos problemas.

Hace apenas un mes, el Profesor Goldstein,de la Universidad de Pittsburg, dio una conferencia en Barcelona sobre la Astronomía en la **genizá** de El Cairo, conferencia que fue acompañada de una nutrida serie de diapositivas de tablas astronómicas en algunas de las cuales los valores numéricos venían dados a la vez en notación árabe y hebraica. Lo que más me interesó fue ver que la figura del cero en los textos hebreos presentaba una forma distinta a todas las que yo conocía, hasta el punto de hacerme pensar que la difusión de esta cifra se debió fundamentalmente a la transmisión oral de unos a otros de la utilidad de un signo cualquiera que representara la idea de ausencia de cantidad en un sistema de base diez, cuyos nueve primeros números tenían ya forma relativamente fija transmitida por difusión cultural.