ARQUIMEDES

BALTASAR RODRIGUEZ-SALINAS *

Primeras noticias

Pocos detalles quedan de la vida del más célebre matemático de la antigüedad. Una biografía hecha por su amigo Heracleides no ha llegado a nosotros. Por el mismo Arquímedes en **El arenario** (Sect. I, 9) sabemos que su padre fue el astrónomo Fidias. Arquímedes fue pariente y amigo del rey Hierón II de Siracusa, como Plutarco y Polibio indican. Al menos tenía gran intimidad con Hierón, a cuyo hijo Gelón II dedicó **El arenario.** Con casi toda seguridad Arquímedes visitó Alejandría, donde sin duda estudió con los sucesores de Euclides y jugó un importante papel en el desarrollo posterior de los discípulos de Euclides. Esta visita se puede dar como casi cierta por su costumbre de dedicar sus descubrimientos matemáticos a matemáticos que se sabe que han vivido en Alejandría, tales como Conón de Samos, Dositeo de Pelusio y Eratóstenes. En cualquier caso Arquímedes volvió a Siracusa, compuso la mayoría de sus trabajos allí, y allí murió durante su conquista por los romanos el año 212 a.C. La fecha aproximada del nacimiento de Arquímedes como el 287 a.C. se ha conjeturado en base de una observación del poeta e historiador bizantino J. Tzetzes, quien declaró (Chiliad 2, hist. 35) que Arquímedes "trabajó en geometría hasta una edad avanzada, viviendo 75 años ".

Hay relatos pintorescos sobre la muerte de Arquímedes debidos a Libio, Plutarco, Valerio Máximo y Tzetzes, que varían en los detalles pero concuerdan en que fue muerto por un soldado romano en la conquista de Siracusa. Dirigió la defensa de esta ciudad, cuando los romanos dirigidos por Marcelo, la sitiaron. Las tentativas de los romanos se estrellaron todas contra el ingenio del gran geómetra; que lanzaba piedras a grandes distancias, salvando las trincheras, y contra las murallas del enemigo. Dícese que los romanos llegaron a cobrar verdadero pavor a los inventos de Arquímedes, y muchos historiadores atestiguan que, valiéndose de varios espejos, probablemente metálicos, incendió las naves romanas, sembrando en sus huestes el espanto. No puede salvar a su ciudad natal tanto ingenio, y al fin sucumbió Siracusa. Cuando los romanos asaltaron la ciudad, Arquímedes estaba estudiando, según se dice, en la plaza pública y tenía a sus pies figuras geométricas trazadas en la arena. Un soldado romano se le acercó y le mandó que le siguiera, a lo que se negó Arquímedes. Enfurecido el soldado, le cortó la cabeza. Algunos, como Plutarco,

* Catedrático de la Universidad Complutense
Numerario de esta Real Academia.

no aceptan esta versión y creen mejor que murió víctima de la rapacidad de los soldados por sus instrumentos. Y en la mayor parte de los relatos se le describe como absorto en las matemáticas en el momento de su muerte. Plutarco nos cuenta (Marcelo, Cap. XVII) que Arquímedes pidió a sus amigos y parientes que pusieran en su tumba un cilindro circunscrito a una esfera con una inscripción alusiva al teorema que Arquímedes estableció para la razón entre los volúmenes y superficies de ambos cuerpos. Y ciertamente Cicerón (véase **Tusculan Disputation,** V, XXIII, 64–66) cuando fue **Questor** en Sicilia en 75 a.C. descubrió la tumba de Arquímedes por la figura grabada en la lápida de una esfera inscrita en un cilindro, que la cubría según la voluntad del geómetra, respetada por Marcelo. Así lo cuenta Cicerón: " ... busqué el rastro de su tumba ... y la encontré rodeada y cubierta de zarzas y matorrales; pues recordé ciertos versos sobre su tumba que había oído, según los cuales se habían colocado encima de su sepultura una esfera y un cilindro. Así pues, después de mirar cuidadosamente alrededor (pues hay un gran número de tumbas en la Puerta Agrigentina), descubrí una pequeña columna que se elevaba un poco sobre los arbustos, sobre la que había la figura de una esfera y un cilindro ... Se enviaron esclavos con hoces ... y cuando se hubo abierto paso, nos aproximamos al pedestal frente a nosotros; el epígrama fue fácil de encontrar con alrededor de la mitad de las líneas legibles, mientras que la última parte estaba completamente raída ".

Ninguno de los bustos que han llegado a nosotros puede identificarse con certeza como perteneciente a Arquímedes, aunque una efigie en una moneda siciliana (sea cual sea su fecha) es definitivamente suya. Se creyó algún tiempo que un conocido mosaico mostrando a Arquímedes delante de un tablero de cálculo con un soldado romano ante él, era un superviviente genuino de **Herculaneum** pero ahora se considera que es de origen renacentista.

Invenciones mecánicas

Aparte de su destacada colección de sus trabajos matemáticos, la reputación de Arquímedes en la antigüedad se halla en una serie de contribuciones a la mecánica. Así lo confirman las investigaciones de A. G. Drachmann. Los autores clásicos mencionan muchas de sus invenciones y Plutarco alude al desdén con que Arquímedes contemplaba sus propios ingenios susceptibles de aplicaciones prácticas y su satisfacción ante sus descubrimientos teóricos. Uno de ellos el tornillo hidráulico para sacar agua para regadío. Diodorus Siculus (Bibl. hist., V, Cap. 37) nos dice que Arquímedes lo inventó en Egipto. Posteriormente, Atheneus nos habla de un tornillo sin fin inventado por Arquímedes para botar barcos. También se le atribuye la invención de la polea compuesta. Algunos de tales inventos nos han sido contados por Plutarco en su vida de Marcelo (Cap. XIV). Cuando preguntado por Hierón sobre la forma de mover un gran peso por una pequeña fuerza, Arquímedes sentado a una cierta distancia de un mercante de la flota real, lo movió sin gran esfuerzo mediante un sistema de poleas compuestas. Esto está en conexión con la historia que Plutarco nos cuenta acerca de Arquímedes: "si hubiese otro mundo, y él pudiese ir a él, movería este otro". Una frase que es conocida en la forma más usual: "Dame un punto de apoyo y moveré la tierra" (Pappus de Alejandría, **Collectio,** Libro VIII, prop. 11).

De dudosa autenticidad es la historia contada por Vitrubio (**De architectura,** Libro, Cap. 3) que cuenta que queriendo Hierón comprobar si una corona era de oro puro o tenía una mezcla fraudulenta se lo preguntó a Arquímedes. Mientras Arquímedes pensaba el problema, sentado en una bañera, notó que la cantidad de agua que había emergido en la bañera era igual a la cantidad de su cuerpo que estaba inmerso. Esto le sugirió un método para resolver el problema, y rápidamente salió de la bañera y corrió a su casa gritando en voz alta que había encontrado lo que buscaba, repitiendo mientras corría, eureka, eureka.

De mayor credibilidad es la afirmación de Pappus de que Arquímedes escribió un libro titulado **Composición de la esfera** o **Cómo hacer esferas,** una obra en la cual presumiblemente contaba cómo construir un planetario con los aparentes movimientos del sol, de la luna y de los planetas, y también quizás una esfera celeste con las constelaciones. Al menos, Cicerón contó (De república, I, XIV, 21–22) que Marcelo obtuvo del saqueo de Siracusa ambos tipos de instrumentos construidos por Arquímedes: "Gallus contó que otro tipo de esfera celeste, que Marcelo cogió del Templo de la Virtud y que era maciza y no contenía agujeros, y que era de muy temprana invención. La primera de este tipo fue construida por Tales de Mileto, y más tarde por Eudoxos de Cnido ... con las constelaciones y estrellas fijas en el cielo. Pero este nuevo tipo de esfera de Arquímedes, tenía grabados los movimientos del Sol y de la Luna y de los cinco planetas: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. La invención de Arquímedes mereció una admiración especial porque había descubierto cómo representar adecuadamente los movimientos mediante el giro de esferas diferentes con velocidades apropiadas".

Finalmente hay referencias de Polibio, Libio, Plutarco y otros a los fabulosos instrumentos balísticos construidos por Arquímedes para ayudar a rechazar a Marcelo. Otro mecanismo defensivo, mencionado a menudo pero de dudosa existencia consistía de un espejo o de una combinación de espejos para incendiar las naves del adversario. A ellos nos hemos ya referido.

No tenemos forma de saber a ciencia cierta la actitud de Arquímedes hacia sus inventos. Se supone que el famoso elogio de Plutarco por el desdén de Arquímedes hacia la práctica fue una invención de Plutarco y simplemente reflejaba el temor y admiración que los descubrimientos teóricos de Arquímedes producían. Plutarco (Marcelo, Cap. XVII) así decía: "Arquímedes poseía un espíritu tan alto, un alma tan profunda y tal riqueza de teoría científica que aunque sus inventos le habían dado renombre y fama de sagacidad superhumana, él no consentía dejar tras él ningún tratado sobre este tema, pero considerando el trabajo del ingeniero y toda arte dirigida a las actividades de la vida como innoble y vulgar, dedicó sus más altos esfuerzos sólo a aquellos estudios cuya sutileza y encanto no están afectados por los requerimientos de la necesidad. Estos estudios – pensaba – no pueden ser comparados con ningún otro; en ellos, el objeto del estudio compite con la demostración, el primero suministrando grandeza y belleza, y la última precisión y profundo poder. Por ello no es posible encontrar en la geometría cuestiones más profundas y difíciles tratadas en términos más puros y simples. Algunos atribuyen este éxito a sus dotes culturales; otros lo creen debido a que todo lo que él hacía era tan elaborado que parecía haber sido realizado sin esfuerzo y con facilidad. Pues nadie podría por sus propios esfuerzos descubrir la demostración y sin embargo tan pronto como se aprende de él, se cree que uno podría haberla descubierto por sí mismo, tan nuevo y rápido es el camino que nos conduce hacia la deseada conclusión ".

Trabajos matemáticos

Arquímedes no escribió con fines educativos como Euclides. Sus obras están dirigidas a los hombres de talento de su tiempo. No obstante, como hemos dicho, están escritas con la mayor claridad y con métodos sencillísimos de demostración. La mayor parte de los trabajos de Arquímedes no han llegado hasta nuestros días. Las obras estrictamente científicas de él han llegado hasta nosotros a través de tres vías distintas: el griego clásico (muchas veces por versiones arábigo-latinas), el bizantino y el estrictamente árabe. Las dos primeras tienen numerosos puntos de contacto, puesto que existen manuscritos griegos, árabes y latinos que coinciden entre sí. La última nos ha transmitido una serie de escritos cuyos originales griegos se han perdido y cuya autenticidad hay que discutir caso por caso. El orden cronológico de las obras matemáticas conservadas de Arquímedes parece ser el siguiente: 1) **Sobre el equilibrio de los planos,** Libro I. 2) **Sobre la cuadratura de la parábola.** 3) **Sobre el equilibrio de los planos,** Libro II. 4) **Sobre el Método de los teoremas mecánicos**, descubierto en 1907 por Heiberg en un palimpsesto de Estambul y que es importantísimo desde el punto de vista didáctico, ya que expone los procedimientos que ha utilizado para llegar a sus descubrimientos teóricos. 5) **Sobre la esfera y el cilindro.** 6) **Sobre las espirales.** 7) **Sobre los conoides y los esferoides** (desconocido para los árabes), en el que estudia el paraboloide de rotación, el hiperboloide de revolución de dos hojas y los elipsoides de revolución. 8) **Sobre los cuerpos flotantes,** hábilmente resumido por Lagrange. 9) **Sobre la medida del círculo.** 10) **El arenario.** 11) **El problema de los bueyes (o del ganado).** 12) **Stomachion** o **Loculus Archimedius,** cuyo texto fragmentario griego se completa con el árabe. Trata de la división de un paralelogramo en catorce partes, que deben guardar entre sí distintas relaciones. Aunque las dos últimas obras no se sabe ciertamente el lugar que ocupan.

Estas obras pueden clasificarse en tres grupos. El primer grupo consiste en aquellas cuyo objeto principal ha sido la prueba de teoremas relativos a las áreas y volúmenes de figuras limitadas por curvas y superficies. En este grupo se pueden colocar las indicadas anteriormente en los lugares (2), (5), (6), (7) y (9). El segundo grupo comprende las obras relativas a problemas de estática e hidrostática. En él se debe incluir el (1), las proposiciones 1–17 de (2) que no se deben incluir en el primer grupo, (3), (4) y (8). El tercer grupo está formado por los trabajos de miscelánea matemática, que son los situados en los lugares (10), (11) y (12).

Al lado de estas doce obras, cuya autenticidad no se discute, se han conservado en textos árabes o tenemos referencia de los siguientes: 13) **Sobre los poliedros regulares,** mencionado por el matemático alejandrino Pappus, quien lo resume; trata de trece poliedros semirregulares, cuyas aristas y ángulos poliedros son todos iguales, pero las caras son polígonos no todos iguales. 14) **Sobre el heptágono** o **Sobre la división de la circunferencia en siete partes iguales,** conservado en árabe. 15) **De iis quae in humido vehuntur,** cuyo original griego, perdido, existía en la época en que Guillermo de Moerbeke (m.h. 1286) realizó esta traducción latina. 16) **El libro de los lemas** o **Liber assumptorum,** que solo se nos conserva en el texto árabe y que tiene bastantes puntos de contacto con el siguiente. 17) **Sobre los triángulos.** 18) **Sobre las rectas paralelas.** 19) **Sobre las propiedades de los triángulos rectángulos.** Los libros (17) a (19), que se conocen a través de citas árabes, parece que deben considerarse como uno solo, al que los bibliógrafos árabes medievales dieron tres títulos diferentes. 20) **Sobre las clepsidras,** conservado en árabe. 21) **De speculo comburente concavitatis parabolae,** sobre los espejos ustorios con que la tradición pretende que Arquímedes incendió la flota romana y que fue origen de una aguda polémica en los siglos XVII y XVIII, en que intervinieron Descartes, Kircher y Buffon y cuyo origen hay que remontar, como mínimo, al óptico árabe Ibn al-Haytam (m. 1039), quien cita como primeros constructores a Arquímedes y Antemio. 22) **Sobre los fundamentos de la geometría.** 23) **Sobre los círculos tangentes.** 24) **Sobre las fechas.** 25) **Libro acerca del equilibrio de las figuras en que se emplean las palancas.** 26) **Libro de los soportes.** 27) **Libro de las palancas.** 28) **Libro de la equivalencia de pesos.** Estos cuatro últimos citados por Herón. Este grupo de libros (25–28) ha podido ser analizado por A.G. Drachmann gracias a las citas de los textos árabes. 29) **Composición de la esfera,** en que describía Arquímedes un planetario y que hemos ya citado. 30) **Elementos de mecánica.**

Algunos autores clásicos como Teón de Alejandría (s. IV) y Macrobio (s.V) conservan referencias de algún que otro principio atribuído al sabio siracusano, sin que sea posible determinar si los datos que transmiten son auténticos o no.

Estos trabajos no se conservan en su forma original. Por ejemplo, **Sobre el equilibrio de los planos,** Libro I, es posible que sea un extracto de un presumiblemente más amplio **Elementos de mecánica,** mencionado antes, y es claramente distinto del Libro II, escrito más tarde. Una solución dada por Arquímedes en **Sobre la esfera y el cilindro** (Libro II, prop. 4) fue perdida en el siglo II. **Sobre la medida del círculo** está ciertamente escrito en una forma muy diferente del original conservado, sin la proposición II (ya que en caso contrario debería haber estado ésta a continuación de la proposición III que es consecuencia de ella). La palabra **parábola** que figura en **Sobre la cuadratura de la parábola** difícilmente podía haber estado en el título original, ya que esta palabra no fue usada en el trabajo de Arquímedes en el sentido ordinario. Finalmente, **Sobre la esfera y el cilindro** y **Sobre la medida del círculo** han sido completamente despojados de su original dialecto siciliano-dórico, mientras que el resto de sus trabajos han sufrido en diversos grados el mismo tipo de transformación lingüistica.

El axioma de Arquímedes

Para probar los teoremas sobre el área o el volumen de figuras limitadas por curvas o superficies, Arquímedes emplea el llamado lema o axioma de Arquímedes o algún lema similar, junto con una técnica de demostración llamada "método de exhaución", y otros artificios griegos tales como **neuseis** y otros principios tomados de la estática. Estas variadas técnicas matemáticas son acompañadas de un completo conocimiento de las obras matemáticas de sus predecesores, incluyendo las de Eudoxos, Euclides, Aristeus y otros. El axioma de Arquímedes (**Sobre la esfera y el cilindro,** axioma 5; véanse los prólogos de **Sobre la cuadratura de la parábola** y **Sobre las espirales)** supone "que dadas dos magnitudes distintas homogéneas, como longitudes, superficies o volúmenes, la mayor excede a la menor en una magnitud tal que añadida a sí misma un número conveniente de veces supera a cualquier magnitud de las que estamos considerando ". Este axioma ha sido identificado erróneamente con la definición 4 del Libro V de los **Elementos** de Euclides (corrientemente conocido por el axioma de Eudoxos): "Dos magnitudes se dice que tienen una razón entre sí cuando multiplicando una cualquiera de ellas por un entero conveniente se supera a la otra ".

Del axioma de Arquímedes resulta que si hay dos magnitudes distintas capaces de tener una razón en el sentido de Euclides, entonces su diferencia tiene una razón (en el sentido de Euclides) con cualquiera otra magnitud del mismo tipo que las dos magnitudes dadas. Este axioma ha sido interpretado como excluyente de los actuales infinitésimos, de forma que "la diferencia de dos segmentos será siempre un segmento y nunca un punto, la diferencia de dos superficies será siempre una superficie y nunca una curva, y la diferencia de dos sólidos será un sólido y nunca una superficie ". El método de exhaución usa frecuentemente un lema ligeramente diferente recogido en la proposición X.1 de los **Elementos** de Euclides: "Dadas dos magnitudes **a, b** distintas, si de la mayor **a** se sustrae una magnitud mayor que su mitad y del resultado se vuelve a sustraer una magnitud mayor que su mitad, y así sucesivamente, llegará a resultar una magnitud menor que la más pequeña **b** ". Esto obviamente refleja la posterior idea de la continua divisibilidad del continuo. Se podría decir que el axioma de Arquímedes justifica esta proposición en el sentido de que no importa el modo de sustraer sino el tomar siempre una magnitud mayor que la mitad de lo que queda. La magnitud resultante en las sucesivas sustracciones será siempre capaz de tener una razón en el sentido de Euclides con la más pequeña de las magnitudes obtenidas.

El método de exhaución

El método de exhaución, ampliamente usado por Arquímedes, fue inventado posiblemente por Eudoxos, aunque también hay indicios de que pueda atribuirse su utilización a Antifón y a Demócrito. El método de exhaución fue también utilizado por Cavalieri en el siglo XVII, que él llamó **método de los indivisibles.** También fue usado ocasionalmente por Euclides en sus **Elementos** (por ejemplo, en la proposición XII. 2). Su nombre es frecuentemente discutido ya que el objeto del método es evitar suponer la completa exhaución de un área o volumen. Dijksterhuis prefiere la un poco anacrónica expresión "paso indirecto al límite". En realidad, la prueba por exhaución es una prueba indirecta por reducción al absurdo. Esto es, si el teorema es de la forma A = B, se prueba la verdad probando que si se supone que A no es igual a B se llega a una contradicción. El método tiene varias formas. Siguiendo a Dijksterhuis, señalamos los dos principales tipos: el método de compresión y el método de aproximación. El primero es el más ampliamente usado y existe en dos formas, una que consiste en tomar diferencias decrecientes y la otra que consiste en tomar razones decrecientes. El proceso fundamental de ambas formas, el de las "diferencias" y el de las "razones", comienza con la inscripción y circunscripción sucesiva de figuras regulares dentro y fuera de la figura cuya área o volumen se quiere calcular. En el método de "diferencias" el área o volumen de las figuras inscritas o circunscritas es constantemente creciente o decreciente y se finaliza cuando la diferencia entre el área o volumen buscado y el de la figura inscrita o circunscrita es menor que una magnitud prefijada. Dicho de una manera más específica si el teorema es de la forma A = B, siendo A la figura curvilínea buscada y B una figura rectilínea regular que representa a la magnitud conocida, y se supone que A es mayor que B, entonces por el proceso de exhaución y su lema básico se puede construir una figura inscrita, rectilínea y regular P tal que P es mayor que B; pero es obvio que P como figura contenida es siempre menor que B. Como P no puede ser a la vez mayor y menor que B, la hipótesis de que A es mayor que B es falsa. Análogamente, si se supone que A es menor que B, por el proceso de exhaución y el lema básico se halla una figura circunscrita P que es menor que B, dicha figura como continente es siempre mayor que B. Entonces la hipótesis de que A es menor que B debe ser también falsa. Por lo tanto, es evidente ahora que A = B. Desde un punto de vista moderno se podría objetar que la conclusión A = B pudiera no ser consistente con los axiomas de la geometría, porque podría ocurrir que A no tuviese área o volumen. Afortunadamente esto no ocurre para las figuras consideradas por Arquímedes.

Un ejemplo del método de exhaución se encuentra en **Sobre la medida del círculo,** en la proposición I, donde se halla el área del círculo. Otros ejemplos de la forma de las "diferencias" del método de exhaución se encuentran en **Sobre los conoides y esferoides** (props. 22, 26, 28 y 30), **Sobre las espirales** (props. 24, 25), y **Sobre la cuadratura de la parábola** (prop. 16). Según la proposición I citada: El área de un círculo es igual a la de un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio, y el otro a la circunferencia del círculo.

La forma de la "razón" del método de exhaución es completamente semejante a la forma de las "diferencias" excepto que en la primera parte de la prueba, donde la figura conocida se supone menor que la figura buscada, la razón del polígono circunscrito al inscrito se hace decrecer hasta que sea menor que la razón de la figura buscada a la figura conocida y, en la segunda parte, la razón del polígono circunscrito al inscrito se hace decrecer hasta que sea menor que la razón de la figura conocida a la figura buscada. En cada parte de la hipótesis se sigue una contradicción. Por consiguiente, la figura conocida debe ser igual a la figura buscada. Como ejemplos de la forma de la "razón" se pueden citar

Sobre la esfera y el cilindro (props. 13,14,33,34,42,44). Concretamente en la proposición 14 se halla así la superficie lateral del cono de revolución.

Como hemos indicado antes, además de las dos formas de compresión del método de exhaución, Arquímedes usa otra técnica que puede llamarse método de aproximación. Este es usado sólo en una ocasión, a saber, en **Sobre la cuadratura de la parábola** (props. 18–24). Este método consiste en la aproximación por abajo del área de un segmento parabólico. Arquímedes procede así llenando la parábola, construyendo primero un triángulo en el segmento con la misma base y vértice que él. Sobre cada lado del triángulo se construye otro triángulo. Este proceso se continúa indefinidamente. Entonces, si A_1 es el área del primer triángulo, tenemos una serie de triángulos inscritos cuya suma converge al área del segmento parabólico. Para probar que el área K del segmento parabólico es igual a $4/3\ A_1$, Arquímedes prueba primero en la proposición 22 que la suma de un número finito de términos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la serie es menor que el área del segmento parabólico. Y prueba en la proposición 23 que, si tenemos una serie de términos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ como antes, de modo que $A_1 = 4A_2$, $A_2 = 4A_3$, entonces

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + \frac{1}{3} A_n = \frac{4}{3} A_1$$

$$A_1 \left[1 + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] = \frac{4}{3} A_1 .$$

Con modernas técnicas de sumación de series, observando que $(1/4)^{n-1}$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, resulta que la serie entre corchetes tiende a 4/3 y, por tanto, que el segmento parabólico tiene un área igual a $4/3\ A_1$. Pero Arquímedes sigue el proceso de **reducción** de los griegos. Así demuestra que si se supone $K > 4/3\ A_1$ y se utiliza un corolario de la proposición 20, a saber, que por las sucesivas inscripciones de triángulos "es posible inscribir en el segmento parabólico un polígono de modo que la suma de los segmentos residuales es menor que cualquier área prefijada" (esto se basa en la proposición X. 1 de los **Elementos** de Euclides), de lo cual se sigue una contradicción. Semejantemente, resulta otra contradicción de la hipótesis $K < 4/3\ A_1$, con lo que termina la demostración.

La construcción "neusis"

En las observaciones iniciales sobre los métodos básicos de Arquímedes, se hizo notar que éste usó a veces la técnica de una construcción **neusis** ("aproximante"). Pappus definió una construcción neusis como: "Dadas dos líneas en cierta posición, colocar entre ellas un segmento de longitud dada, cuya recta soporte pase por un punto fijo".

La construcción neusis puede pensarse como si se realizase mecánicamente marcando los extremos del segmento en una regla y desplazando ésta hasta que dichos extremos estén ambos sobre las líneas dadas, mientras que la regla pasa por un punto fijo dado, que se suele llamar punto límite. La mayoría de las neuseis griegas requieren una solución por medio de intersecciones de cónicas u otras curvas superiores. Las construcciones neuseis son indicadas por Arquímedes en **Sobre las espirales** (props. 5–9). El caso más simple puede ser ilustrado por dicha proposición 5, que lleva a la construcción de un segmento de longitud dada cuyos extremos estén en una circunferencia y en uno de sus diámetros, de modo que su recta soporte pase por un punto fijo.

Algunos teoremas

Con los diversos métodos que han sido descritos y otros, Arquímedes fue capaz de demostrar una multitud de teoremas básicos de la geometría. Entre ellos los siguientes: 1) "La superficie de una esfera es igual a cuatro veces su círculo máximo " (**Sobre la esfera y el cilindro,** prop. 23). 2) "El volumen de una esfera es igual a cuatro veces el volumen del cono que tiene por base el círculo máximo de la esfera y su altura igual al radio de la esfera (**ibid.**, prop. 34). 3) El corolario de que "el cilindro cuya base es el círculo máximo de la esfera y cuya altura es igual al diámetro de la esfera tiene un volumen que es 3/2 del volumen de la esfera y una superficie total que es también 3/2 de la superficie de la esfera ". Esta proposición es la que ha sido grabada sobre la tumba de Arquímedes, como ya hemos contado. 4) " Todo segmento recto u oblicuo de un paraboloide de revolución es tres veces la mitad del cono que tiene la misma base y el mismo eje " (**Sobre los conoides y esferoides,** props. 21–22). 5) Arquímedes fue también capaz de extender sus investigaciones a las ahora conocidas por espirales de Arquímedes, hallando no sólo sus cuadraturas (**Sobre las espirales,** props. 24–28) y preparando con ello el camino para hallar la rectificación de la circunferencia. Esto permite la construcción de un triángulo rectángulo de área igual a la del círculo como se realiza en **Sobre la medida del círculo** (prop. I). Esta rectificación se halla en **Sobre las espirales** (prop. 18) así: "Si se traza la tangente a una espiral en el punto extremo de un radio vector, descrito en una rotación completa, y si del punto origen de la espiral se levanta una perpendicular a dicho radio vector, dicha perpendicular corta a la tangente de forma que el segmento interceptado entre la tangente y el origen de la espiral es igual a la circunferencia del círculo que tiene por radio dicho radio vector ".

Así pues, Arquímedes halló la cuadratura del círculo y la rectificación de la circunferencia. El llamado problema de la cuadratura del círculo consiste en una cosa muy distinta y es construir un cuadrado, que tenga el mismo área del círculo, mediante un múmero finito de operaciones con la regla y el compás. Esto, como se sabe, es imposible ya que, según demostró K.L.F. Lindemann, el número π es trascendente, esto es, no es solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros, no todos nulos.

Métodos mecánicos

Ha sido hecho notar que Arquímedes emplea procedimientos de la estática en la solución de problemas geométricos y en la demostración de teoremas. Estos procedimientos están claramente puestos de manifiesto en **Sobre la cuadratura de la parábola** (props. 6–16) y también en **Sobre el Método.** Ya hemos visto que en la última parte de **Sobre la cuadratura de la parábola** Arquímedes obtiene la cuadratura por medios puramente geométricos. En la primera parte, él obtiene la misma cosa por medios de la estática. Por el uso de la ley de la palanca y por el conocimiento de los centros de gravedad de triángulos y trapecios acoplados con un proceso de **reducción** se obtiene la cuadratura. En **Sobre el Método** los mismos procedimientos de la estática son usados; pero, en adición, una hipótesis enteramente nueva es utilizada con ellos, a saber, que una figura plana puede ser considerada como la sumación de sus segmentos (presumiblemente infinitos en número) y que una figura sólida o volumétrica puede ser considerada como la suma de sus secciones planas. La importancia del punto de vista de este trabajo es que él proporciona una rara perspicacia en los procedimientos de Arquímedes para descubrir los teoremas después probados por él. Los procedimientos indirectos que aparecen en las demostraciones de gran número de los trabajos de Arquímedes dicen poco sobre los teoremas probados y descubiertos. Pero él no duda en probar algunas veces teoremas que había heredado de sus antecesores (como tal vez el caso del teorema sobre el área del círculo que él prueba simple y elegantemente en **Sobre la medida del círculo,** prop. I). Pero frecuentemente se encuentran dificultades para distinguir sus propios descubrimientos y su relación con los de sus predecesores, como por ejemplo los de Eudoxos. En el prólogo del Libro I de **Sobre la esfera y el cilindro,** él indica sus descubrimientos comparándolos con algunos teoremas establecidos por Eudoxos.

Algunos de los circundantes misterios de los métodos de Arquímedes de investigación han sido disipados por el descubrimiento y publicación de **Sobre el Método de teoremas mecánicos.** Por ejemplo, se puede ver en la proposición 2 que Arquímedes descubre por el "método" los teoremas relativos al área y volumen de una esfera, que prueba más tarde por métodos estrictamente geométricos en **Sobre la esfera y el cilindro.** Debe observarse respecto a esto que el teorema sobre el volumen fue descubierto antes que el teorema de la superficie, aunque en su formal presentación en esta obra el teorema para la superficie es probado primero. Usando el "método" Arquímedes da también otra "prueba" de la cuadratura de la parábola – ya probada dos veces en **Sobre la cuadratura de la parábola** – y observa en el prólogo que él descubrió originalmente este teorema por el método. Finalmente, en conexión con **Sobre el Método,** conviene hacer notar que Arquímedes consideró el método inadecuado para demostraciones formales, y por ello procuró otras pruebas más rigurosas. La hipótesis adicional en la que se considera las figuras como la suma de sus elementos infinitesimales provocó una actitud cautelosa de Arquímedes, que expone con lucidez en sus observaciones introductorias a Eratóstenes.

Métodos numéricos

Aunque las investigaciones de Arquímedes son principalmente sobre geometría y mecánica, reducida ésta a geometría, él hace algunas importantes excursiones al cálculo numérico con métodos que no tienen un significado claro. En **Sobre la medida del círculo** (prop. 3), él calcula la razón de la circunferencia al diámetro (no llamado π hasta tiempos más modernos) como menor que 22/7 y mayor que 223/71. En el curso de esta prueba Arquímedes demuestra que conocía un método preciso de aproximación de raíces de grandes números. Es también de interés conocer que él dio una aproximación para $\sqrt{3}$, a saber, $1351/780 > \sqrt{3} > 265/153$. La forma como él obtuvo esto ha sido muy discutida. En **El arenario,** Arquímedes expone un sistema para representar grandes números, un sistema que le permitió expresar un número P^{10^8}, donde P es asimismo x^x con $x = 10^8$. El inventó este sistema para expresar números que, en sus palabras, "exceden no sólo al número de granos de arena de una masa igual en magnitud a la tierra ..., sino también de una masa igual en magnitud que el universo". Realmente, el número de granos de arena hallado aproximadamente por Arquímedes para rellenar el universo sería simplemente 10^{63}, y entonces no sería necesario recurrir a los altos órdenes descritos en este sistema. Como curiosidad recordamos que los métodos modernos dan, aproximadamente, como 10^{10} años luz para el universo visible hoy. Incidentalmente, en **El arenario** es donde tenemos una de las más antiguas rererencias al sistema heliocéntrico de Aristarco de Samos.

Visión geométrica de la mecánica

En el desarrollo de las ciencias físicas, Arquímedes es celebrado como el primero que aplicó la geometría a la estática y a la hidrostática con éxito. En **Sobre el equilibrio de los planos** (Libro I, props. 6–7), él prueba la ley de la palanca de una manera puramente geométrica. Los pesos los convierte en magnitudes geométricas vectoriales que actúan perpendicularmente al brazo de la palanca, que a su vez se concibe como una línea geométrica sin peso. Su hipótesis básica fue el caso especial de equilibrio de la balanza de brazos iguales en los que hay pesos iguales. Este caso aunque puede basarse en último término en la experiencia, en el contexto de una demostración matemática aparece como una exigencia básica de la simetría geométrica. En la demostración de la proposición 6, "magnitudes conmensurables están en equilibrio a distancias inversamente proporcionales a sus pesos", su principal objetivo fue reducir el caso general de pesos desiguales a distancias inversamente proporcionales al caso particular de pesos iguales a distancias iguales. Esto se hizo convirtiendo la balanza de brazos desiguales en otra de brazos iguales, y distribuyendo los pesos desiguales, descompuestos en componentes uniformemente distribuidos sobre la balanza, de modo que el problema quede reducido al caso de pesos iguales a distancias iguales. En la demostración se utilizaba proposiciones relativas a centros de gravedad (que en parte parecen haber sido probadas en algún otro lugar por Arquímedes) para demostrar que el caso de pesos desiguales uniformemente distribuidos sobre todo el brazo se reduce al caso de pesos concentrados en brazos de longitudes desiguales. Además, en la proposición 7 se demuestra que si el teorema es cierto para magnitudes racionales también lo es para magnitudes irracionales (aunque la validez de esta prueba ha sido muy discutida). La más severa crítica de la prueba de la proposición 6 es, por supuesto, la clásica discusión de Ernst Mach en su obra **La ciencia de la mecánica,** en la cual hace hincapié en dos puntos generales: 1) la experiencia debe haber desempeñado un papel predominante en la demostración y sus postulados a pesar de la forma deductiva matemática; 2) cualquier intento de pasar desde el caso especial al caso general reemplazando pesos distribuidos sobre la balanza por un peso concentrado en su centro de gravedad hace suponer que había sido probado el principio del momento estático. Esta crítica ha dado origen a una extensa literatura estimulando una defensa con éxito de Arquímedes. Esta literatura ha sido analizada agudamente por E. J. Dijksterhuis (**Arquímedes,** 289–304). Posteriormente ha sido señalado, con cierta justificación, que la proposición 6 y su demostración, incluso su espíritu, solamente establecen que la proporcionalidad inversa de los pesos y las longitudes de los brazos es una condición suficiente para el equilibrio de una balanza apoyada en su centro de gravedad con dos pesos sobre cada lado del fiel. Es evidente que Arquímedes debió también haber demostrado que la condición es necesaria, ya que repetidamente él aplica la proporcionalidad inversa como una condición necesaria de equilibrio. Como esto es fácil probar, pudo pensarla Arquímedes trivial. Las proposiciones siguientes en el Libro I de **Sobre el equilibrio de los planos** prueban que Arquímedes concebía esta parte del trabajo como preparación a su uso en la estática y a sus investigaciones en geometría de una forma como hemos descrito antes en **Sobre la cuadratura de la parábola** y en **Sobre el Método.**

En **Sobre los cuerpos flotantes,** el énfasis en el análisis geométrico es todavía mayor. En el Libro I, se presenta un concepto algo obscuro de presión hidrostática como su postulado básico: "Consideremos que el fluido es de tal naturaleza que de las partes de él que están al mismo nivel y son adyacentes entre sí, la que es presionada menos es empujada por la que es presionada más y cada una de ellas es empujada por el fluido que está encima en su vertical, todo ello siempre que el fluido no esté comprimido por otra cosa".

Después de analizar sus proposiciones vemos que Arquímedes mantenía un concepto aristotélico de fuerza dirigida hacia el centro de la tierra, que se concebía como el centro del mundo. De hecho él fue más allá imaginando la tierra en movimiento de forma que entonces se presentan los fluidos como una parte de una esfera fluida, cuyas partes ejercen fuerzas convergentes hacia el centro de la esfera. La superficie de la esfera se imagina entonces dividida en un número de partes que son las bases de sectores cónicos con vértice en el centro de la esfera. Y el agua en cada sector ejerce una fuerza hacia el centro. Entonces si se añade un sólido a un sector, aumentando la presión sobre él, la presión se transmite hacia abajo, hacia el centro de la esfera, y después a un sector adyacente de modo que el fluido en dicho sector es empujado hacia arriba igualando el nivel de los sectores adyacentes. La influencia en los sectores no adyacentes se ignora. Es probable que Arquímedes no tuviese el concepto de paradoja hidrostática formulado por Stevin, que sostenía que en cualquier punto dado del fluido la presión es una magnitud constante que actúa perpendicularmente sobre cualquier plano que pasa por el punto. Pero con sus métodos Arquímedes pudo formular proposiciones referentes a la inmersión relativa en un fluido de sólidos menos densos, igualmente densos y más densos que el fluido en el que se sumergen. La proposición 7 sobre los sólidos más densos que el fluido expresa el llamado "principio de Arquímedes" en esta forma: "Sólidos más densos que el fluido, cuando se arrojan al fluido se sumergirán tan rápidamente como pueden hundirse, y se aligeran (cuando se pesan) en el fluido en una cantidad igual al peso de la parte de fluido que tiene el mismo volumen que el sólido". Usualmente, esto se expresa abreviadamente diciendo que tales sólidos pierden un peso en el fluido igual al peso del fluido desalojado. En el Libro II, que investiga las diferentes posiciones en las que un segmento recto de un paraboloide puede flotar en un fluido, Arquímedes vuelve a la hipótesis básica que se encuentra en **Sobre el equilibrio de los planos, Sobre la cuadratura de la parábola** y **Sobre el Método,** a saber, que los pesos verticales deben concebirse como paralelos más que como convergentes al centro de una esfera fluida.

Investigaciones históricas sobre Arquímedes

A diferencia de los **Elementos** de Euclides, los trabajos de Arquímedes no fueron muy conocidos en la antigüedad. Nuestro actual conocimiento de sus trabajos depende en gran parte del interés que despertaron desde el siglo sexto al décimo en Constantinopla. Es cierto que antes de ese tiempo algunos trabajos de Arquímedes fueron estudiados en Alejandría, ya que Arquímedes fue citado frecuentemente por tres eminentes matemáticos de esa ciudad: Herón, Pappus y Theón. Pero es con la contribución de Eutocius de Ascalón, que nació hacia el final del siglo quinto y estudió en Alejandría, cuando realmente empieza la historia textual de la recopilación de los trabajos de Arquímedes. Eutocius compuso unos comentarios sobre los trabajos de Arquímedes: **Sobre la esfera y el cilindro, Sobre la medida del círculo** y **Sobre el equilibrio de los planos.** Estos eran sin duda los trabajos más populares de Arquímedes en aquel tiempo. El **Comentario sobre la esfera y el cilindro** es un importante trabajo para referencias históricas de la geometría griega. **El comentario sobre la medida del círculo** es de interés por su detallado desarrollo del cálculo de π por Arquímedes. Los trabajos de Arquímedes y los comentarios de Eutocius fueron estudiados y enseñados por Isidoro de Mileto y Antemio de Tralles, arquitectos de Justiniano, que construyeron Santa Sofía en Constantinopla. Al parecer, fue Isidoro el editor de la primera edición conjunta de al menos los tres libros comentados por Eutocius, así como sus comentarios. Posteriormente, los autores bizantinos parece que fueron añadiendo gradualmente otros trabajos a esta primera recopilación hasta el siglo noveno, cuando el reformador de la educación León de Tesalónica produjo el compendio representado por el manuscrito griego A (adoptando la designación del editor, J. L. Heiberg). El manuscrito A contenía todos los trabajos que ahora conocemos, excepto **Sobre los cuerpos flotantes, Sobre el Método, Stomachion** y **El problema de los bueyes.** Este fue uno de los manuscritos a los que tuvo acceso Guillermo de Moerbeke cuando hizo su traducción latina en 1269. Y que fue el origen, directa o indirectamente de todas las copias de Arquímedes durante el Renacimiento. Un segundo manuscrito bizantino, designado como B, incluía sólo las obras de mecánica: **Sobre el equilibrio de los planos, Sobre la cuadratura de la parábola** y **Sobre los cuerpos flotantes** y, posiblemente, **Sobre las espirales.** También a él tuvo acceso Moerbeke. Pero desapareció después de una referencia a principios del siglo XIV. Finalmente, podemos mencionar un tercer manuscrito bizantino, C, un palimpsesto cuyas partes sobre Arquímedes son del siglo X. No fue accesible al occidente latino en la Edad Media, ni incluso en la época moderna hasta su identificación por Heiberg en 1906 en Constantinopla, a donde había sido llevado desde Jerusalen. Contiene grandes porciones de **Sobre la esfera y el cilindro,** casi todo de **Sobre las espirales,** algunas partes de **Sobre la medida del círculo** y **Sobre el equilibrio de los planos** y una parte del **Stomachion.** Y lo que es más importante, contiene la mayor parte del texto griego de **Sobre los cuerpos flotantes** (un texto que no era asequible en griego desde la desaparición del manuscrito B), y una gran parte de **Sobre el Método de los teoremas mecánicos,** hasta entonces sólo conocido por referencias. (Hero lo menciona en su **Métrica,** y el lexicografo bizantino Suidas declara que Teodosio escribió un comentario sobre él).

Aproximadamente al mismo tiempo que Arquímedes era estudiado en la Bizancio del siglo IX, también era considerado por los árabes. El Arquímedes de los árabes ha sido estudiado sólo de forma preliminar, pero parece improbable que los árabes poseyeran ningún manuscrito de sus trabajos tan completo como el manuscrito A. Con todo, a menudo explotaron brillantemente los métodos de Arquímedes y utilizaron su buen conocimiento de las secciones cónicas en los problemas de Arquímedes. El Arquímedes de los árabes consistía en los siguientes trabajos: 1) **Sobre la esfera y el cilindro** y al menos una parte del comentario de Eutocius sobre él. Parece que este trabajo existía en una pobre traducción del siglo IX, revisada a finales del mismo, primero por Ishāq ibn Hunayn y después por Thābit ibn Qurra. Fue reeditada por Nasīr ad-Dīn al-Tūsī en el siglo XIII y fue en varias ocasiones parafraseada y comentada por otros autores árabes. 2) **Sobre la medida del círculo,** traducido por Thābit ibn Qurra y reeditado por al-Tūsi. Quizás los comentarios de Eutocius sobre él fueron también traducidos, pues el extenso cálculo de π que se encuentra en los tratados geométricos de los matemáticos árabes del siglo IX, Banū Mūsā, guarda cierto parecido al presentado en el comentario de Eutocius. 3) Un fragmento de **Sobre los cuerpos flotantes,** formado por una definición de gravedad específica que no aparece en el texto griego, por una versión del postulado básico (descrito anteriormente) mejor que la que existe en el texto griego, y los enunciados sin demostraciones de siete de las nueve proposiciones del Libro I y la primera proposición del Libro II. 4) Quizás **Sobre la cuadratura de la parábola.** Al menos este problema recibió la atención de Thābit ibn Qurra. 5) Algún material indirecto de **Sobre el equilibrio de los planos** descubierto en otros trabajos de mecánica traducidos al árabe (tales como la **Mecánica** de Hero, el llamado tratado de Euclides **Sobre la balanza,** el **Liber karastonis,** etc.). 6) Además, hay otros varios trabajos atribuidos a Arquímedes por los árabes y de los que no hay texto griego, como ya hemos citado. De los trabajos adicionales podemos destacar el **Libro de los lemas** o **Lemmata (Liber assumptorum),** pues, aunque no puede proceder directamente de Arquímedes en su forma actual, en opinión de los expertos varias de sus proposiciones son del tipo de Arquímedes. Una de tales proposiciones es la proposición 8 que emplea una construcción **neusis** como la usada por Arquímedes. De este modo se demuestra la equivalencia de una **neusis** con el problema de la trisección del arco, pero sin resolver la **neusis** (que podría resolverse por la construcción de una concoide con base circular).

Debería hacerse mención especial también del **Libro sobre la división del círculo en siete partes iguales,** atribuido a Arquímedes por los árabes, por ser destacable construcción del heptágono regular. Este trabajo estimuló toda una serie de estudios árabes sobre este problema incluyendo uno del famoso Ibn al-Haytham (Alhazen). Las proposiciones 16 y 17 son las que proporcionan tal construcción. La clave de todo el proceso es, desde luego, la **neusis** presentada en la proposición 16. No se sabe la forma en que fue resuelta esta **neusis** por Arquímedes (o quienquiera que fuese el autor de este trabajo). Ibn al-Haytham, en su tratamiento posterior del heptágono, menciona la **neusis** de Arquímedes y demuestra que en la proposición 17 pueden encontrarse dos puntos básicos como intersección de una parábola y una hipérbola. Merece destacarse que excepto dos, todas las proposiciones 1 a 13 de este tratado se refieren a triángulos rectángulos, y las dos restantes son necesarias para proposiciones sobre ellos. Parece probable, por tanto, que las proposiciones 1 a 13 comprendan el llamado **Sobre las propiedades del triángulo rectángulo** atribuido en el **Fihrist** a Arquímedes (aunque al menos alguna de estas proposiciones son adiciones árabes). Como consecuencia de dichas proposiciones se obtiene la fórmula de Herón para el triángulo rectángulo. Es interesante hacer notar que el estudioso árabe al-Bīrūnī atribuye la fórmula general de Herón a Arquímedes. Las proposiciones 14 y 15 del tratado no hacen referencia a las proposiciones 1 a 13 y conciernen a cuerdas. Cada una de ellas conduce a una formulación en términos de cuerdas de sen $A/2 = \sqrt{(1 - \cos A)/2}$. Así pues, las proposiciones 14—15 parecen ser de otro trabajo (y al menos la proposición 15 es un añadido árabe). Si la proposición 14 estaba en el texto griego traducido por Thābit ibn Qurra y se debe a Arquímedes, tendríamos que concluir que esta fórmula fue descubierta por Arquímedes en lugar de Ptolomeo como se cree corrientemente.

El occidente latino recibió su conocimiento de Arquímedes por medio de las dos fuentes descritas: Bizancio y el Islam. No hay rastro de las traducciones anteriores atribuidas por Cassiodoro a Boecio. El conocimiento que se tenía en Occidente antes del siglo XII consistía en alguna información bastante general sobre hidrostática que indirectamente podía haber tenido su origen en Arquímedes. Fue en el siglo XII cuando empezó la traducción de los textos de Arquímedes del árabe. El pequeño tratado **Sobre la medida del círculo** fue traducido dos veces del árabe. La primera traducción, realizada por Platón de Tivoli, fue bastante deficiente. Hay muchos errores numéricos en las copias que de ella existen, y la segunda mitad de la proposición 3 falta. La segunda traducción fue hecha con casi toda seguridad por el principal traductor del siglo XII, Gerardo de Cremona. El texto del cual partió (sin duda el texto de Thābit ibn Qurra) incluía un corolario sobre el área de un sector circular atribuido por Herón a Arquímedes, pero que falta en los textos griegos existentes en la actualidad.

No solo fue ampliamente citada la traducción de Gerardo de Cremona por los geómetras medievales Gerard de Bruselas, Roger Bacon y Thomas Bradwardine, sino que sirvió también como punto de partida de toda una serie de versiones enmendadas y paráfrasis del tratado en el curso de los siglos XIII y XIV. Entre ellas están las versiones de Nápoles, Cambridge, Florencia y Gordanus en el siglo XIII; y las versiones Corpus Christi, Munich y Alberto de Sajonia del XIV. Estas versiones fueron aumentadas con la inclusión de referencias a Euclides y el desarrollo de pasos geométricos que aparecían sólo indicados en el texto de Arquímedes. Además, se pueden ver intentos para especificar los postulados que subyacen en la demostración de la proposición I. Se prestó también atención en algunas versiones a la naturaleza lógica de la demostración de la proposición I. Así, la versión de Nápoles anuncia que la demostración va a ser por reducción al absurdo. En las versiones de Gordanus, Corpus Christi y Munich vemos una tendencia a elaborar las demostraciones a la manera de los tratados escolásticos. La culminación de esta clase de elaboración apareció en la **Questio de quadratura circuli** de Alberto de Sajonia, compuesta en algún momento del tercer cuarto del siglo XIV. La forma matemática helenística del texto griego fue sumergida en una intrincada estructura escolástica que incluía múltiples distinciones terminológicas y la técnica del argumento y contra-argumento, representada por argumentos iniciales y sus refutaciones finales. La introducción de justificaciones físicas de los postulados fue otra tendencia en las últimas versiones. Finalmente, en relación con las múltiples versiones medievales de **Sobre la medida del círculo** puede destacarse que la versión Florencia de la proposición 3 contenía una detallada elaboración del cálculo de π . Se podría suponer que el autor había consultado el comentario de Eutocius, excepto porque el procedimiento aritmético difiere mucho del usado por éste. Además, ninguna traducción del comentario de Eutocius parece haberse hecho antes de 1450, y la versión Florencia debe ser anterior a 1400.

Además de su traducción de **Sobre la medida del círculo**, Gerardo de Cremona también tradujo el **Discurso de los hijos de Moises (Verbafiliorum),** compuesto por Banū Mūsā. Esta traducción latina fue de particular importancia para la introducción de Arquímedes en Occidente. Podemos destacar las siguientes contribuciones del tratado: 1) Una demostración de la proposición I de **Sobre la medida del círculo** algo diferente de la de Arquímedes, pero todavía basada fundamentalmente en el método de exhaución. 2) Una determinación del valor de π sacada de la proposición 3 del mismo tratado, pero con cálculos más desarrollados, similares a los del comentario de Eutocius. 3) El teorema de Herón para el área de un triángulo en función de sus lados, que es la primera demostración de este teorema en latín (el enunciado de este teorema había ya aparecido en los escritos de los **agrimensores** y en la traducción de Platón de Tivoli del **Liber embadorum** de Savasorda). 4) Teoremas para el volumen y área de una esfera con demostración de carácter típico de Arquímedes. 5) Un uso de la fórmula para el área de un círculo equivalente a $A = \pi r^2$, además de la fórmula arquimediana $A = 1/2$ cr. En lugar del símbolo moderno π , los autores usaban la expresión "la cantidad que cuando se multiplica por el diámetro produce la circunferencia". 6) La introducción en Occidente del problema de encontrar dos medias proporcionales entre dos segmentos dados. En este tratado encontramos dos soluciones: a) una atribuída por los Banū Mūsā a Menelao y por Eutocius a Arquitas, b) la otra presentada por los Banū Mūsā como original suya, pero similar a la solución atribuída por Eutocius a Platón. 7) La primera solución en latín del problema de la trisección de un ángulo. 8) Un método de aproximación de raices cúbicas con cuanta precisión se desee.

El **Verba filiorum** fue, por tanto, un rico presente para los geómetras del siglo XII. El tratado fue muy citado en los siglos XIII y XIV. En el siglo XIII los eminentes matemáticos Jordanus de Nemore y Leonardo Fibonacci hicieron uso de él. Por ejemplo, el último de ellos, en su **Practica geometrie** incluyó las dos soluciones del problema de las medias proporcionales dadas por los Banū Mūsā, mientras que el primero (o quizá un continuador) en **De triangulis** presentó una de ellas, junto con una solución enteramente diferente, a saber, la que atribuyó Eutocius a Philo de Bizancio. Similarmente, Jordanus (o posiblemente el mismo continuador) extrajo la solución de la trisección de un ángulo del **Verba filiorum,** pero además hizo la destacable y perspicaz sugerencia de que la **neusis** puede resolverse mediante el uso de una proposición de la **Optica** de Ibn al-Haytham, que resuelve una **neusis** análoga por medio de secciones cónicas.

Algunos de los resultados y técnicas de **Sobre la esfera y el cilindro** llegaron a conocerse a través de un tratado titulado **De curvis superficiebus Archimenidis** y atribuido a Johannes de Tinemue. Parece haber sido traducido del griego al comienzo del siglo XIII o al menos haberse compuesto basándose en un tratado griego. **De curvis superficiebus** contenía diez proposiciones con varios corolarios y trataba en su mayor parte de superficies y volúmenes de conos, cilindros y esferas. Fue un tratado muy popular, a menudo citado por otros autores. Como la traducción de Gerardo de Cremona de **Sobre la medida del círculo, De curvis superficiebus** fue retocado por autores latinos, habiéndose añadido dos proposiciones originales a una versión (representada por el manuscrito D de **De curvis superficiebus)** y tres completamente diferentes en otra (representada por el manuscrito M de **De curvis).** En la primera de las adiciones a la última versión, el autor latino aplicó el método de exhaución a un problema relativo a la superficie de un segmento esférico, probando que al menos este autor había desarrollado el método por sí mismo. Y ciertamente el geómetra Gerard de Bruselas en su **De motu,** aproximadamente en el mismo tiempo, usaba también el proceso de **reductio** de Arquímedes en una forma altamente general.

En 1269, algunas décadas después de la aparición del **De curvis superficiebus,** se dio el siguiente paso importante en la transmisión de Arquímedes al Occidente cuando gran parte de los escritos bizantinos fueron traducidos del griego por el dominico flamenco Guillermo de Moerbeke. En esta traducción, Moerbeke empleó los manuscritos A y B que habían pasado a la biblioteca del Papa en 1266 desde la colección de los reyes normandos de Dos Sicilias. Excepto **El arenario** y el **Comentario sobre la medida del círculo** de Eutocius, todos los trabajos incluidos en los manuscritos A y B fueron transcritos al latín por Moerbeke. Inútil es decir que **Sobre el Método, El problema de los bueyes** y el **Stomachion,** trabajos todos ellos que no figuran en los manuscritos A y B, no fueron incluidos en las traducciones de Moerbeke. Aunque las traducciones citadas no están exentas de error (y algunos de ellos son serios), en su conjunto presentan los trabajos de Arquímedes en una forma muy comprensible. Poseemos el trabajo hológrafo original de las traducciones de Moerbeke (MS Vat. Ottob. lat. 1850). Este manuscrito no fue muy copiado. La traducción de **Sobre las espirales** se copió de él en el siglo XIV (MS Vat. Reg. lat. 1253, 14r–33r),y varios otros trabajos se copiaron de él en el siglo XV en un manuscrito italiano actualmente en Madrid (Bibl. Nac. 9119). El trabajo **Sobre los cuerpos flotantes** se copió también en el siglo XVI (MS Vat. Barb. lat. 304, 124r–141v, 160v–161v). Pero, en efecto, las traducciones de Moerbeke fueron usadas más de lo que podría esperarse de la pobreza de los manuscritos. Varios miembros de la Universidad de París las usaron hacia la mitad del siglo XIV. El principal de ellos fue el astrónomo y matemático Juan de Meurs, que parece haber sido el autor de un tratado híbrido de 1340 titulado **Circuli quadratura.** Este trabajo consta de catorce proposiciones. Las trece primeras fueron extraídas de la traducción de Moerbeke de **Sobre las espirales** y son, precisamente, las proposiciones necesarias para la demostración de la proposición 18 de ella. La proposición 14 del mismo tratado era la proposición 1 de la traducción de Moerbeke de **Sobre la medida del círculo.** Así, pues, este autor se dio cuenta de que usando la proposición 18 de **Sobre las espirales** se obtenía la rectificación de la circunferencia, necesaria para la cuadratura del círculo. Por cierto que **Circuli quadratura** no usaba meramente la traducción de Moerbeke, sino que también incluía muchos comentarios. De hecho, este tratado latino medieval fue el primer comentario conocido de **Sobre las espirales** de Arquímedes. Que el comentario fue a veces bastante perspicaz, lo indica el hecho de que el autor sugirió que la **neusis** utilizada por Arquímedes en la proposición 7 de **Sobre las espirales** podía resolverse por medio de un **instrumentum conchoydeale.** El único lugar en el que un comentarista latino podía haber sabido de tal instrumento, era la sección de los **Comentarios sobre la esfera y el cilindro** de Eutocius, donde éste describe la solución de Nicomedes del problema de encontrar dos medias proporcionales (Libro II, prop. 1). La evidencia más clara de que J. de Meurs conocía el **Comentario** de Eutocius la tenemos en la traducción de Moerbeke, por usar secciones de este comentario en su **De arte mensurandi** (Cap. VIII, prop. 16), donde se obtienen tres de las soluciones del problema de las medias proporcionales dadas por Eutocius. No solo incorporó J. de Meurs el tratado **Circuli quadratura** en el capítulo VIII de su **De arte mensurandi** (al parecer, compuesta poco después de 1343), sino que en el capítulo X del **De arte** citó literalmente muchas proposiciones de la traducción de Moerbeke de **Sobre la esfera y el cilindro** y **Sobre los conoides y esferoides** (que más tarde aplicó equivocadamente a problemas relativos a sólidos engendrados por la rotación de segmentos circulares). Aproximadamente en la siguiente década después de Juan de Meurs, Nicole Oresme, su colega en la Universidad de París, en su **De configurationibus qualitatum et motuum** (Part. I, Cap. 21) reveló cierto conocimiento de **Sobre las espirales,** al menos en la forma que aparece en **Circuli quadratura.** Más aún, Oresme en sus **Questiones super de celo et mundo,** citó muchas partes de la traducción de **Sobre los cuerpos flotantes** de Moerbeke, mientras que Enrique de Hesse, jóven contemporáneo de Oresme en París, hizo breves citas de la misma obra. (Antes de este tiempo, el único conocimiento de **Sobre los cuerpos flotantes** provenía de un tratado del siglo XIII titulado **De ponderibus Archimenidis sive de incidentibus in humidum,** un tratado pseudo-arquimediano preparado en gran parte a partir de fuentes árabes). Hay entonces una evidencia incontrovertible de que en la mitad del siglo XIV, en la Universidad de París, se conocían y usaban seis de las nueve traducciones de Arquímedes de Guillermo de Moerbeke: **Sobre las espirales, Sobre la medida del círculo, Sobre la esfera y el cilindro, Sobre los conoides y esferoides, Sobre los**

cuerpos flotantes, y el **Comentario sobre la esfera y el cilindro** de Eutocius. Mientras que no existe evidencia directa del uso de las tres restantes traducciones. Recientemente, ha sido descubierto en un manuscrito en París en el siglo XIV (BN lat. 7377 B, 93v–94r) una demostración a la manera de Arquímedes de la ley de la palanca que podría haberse inspirado en **Sobre el equilibrio de los planos** de Arquímedes. Pero aparte de esto, la influencia de Arquímedes en la estática medieval fue enteramente indirecta. El anónimo **De canonio,** traducido del griego a comienzo del siglo XIII, y el **Liber karastonis** de Thābit ibn Qurra, traducido del árabe por Gerardo de Cremona, transmitieron esta influencia indirecta en varios aspectos geométricos. Inútil es decir que estas dos obras jugaron un papel importante en el estímulo de la ya de por sí bastante impresionante estática asociada al nombre de Jordanus de Nemore.

En el siglo XV comenzó a extenderse el conocimiento de Arquímedes en Europa. Una nueva traducción latina fue hecha por Jaime de Cremona, alrededor de 1450, por orden del Papa Nicolás V. Como esta traducción se hizo exclusivamente a partir del manuscrito A, no incluía **Sobre los cuerpos flotantes,** pero sí incluía los dos tratados del manuscrito A omitidos por Moerbeke, a saber, **El arenario** y el **Comentario sobre la medida del círculo** de Eutocius. No obstante, parece que esta nueva traducción se hizo mirando las traducciones de Moerbeke. Poco después de haberse hecho, el Papa envió una copia de la nueva traducción a Nicolás de Cusa, que hizo uso de ella en su **De mathematicis complementis,** compuesta en 1453–1454. Existen al menos nueve manuscritos de esta traducción, uno de los cuales fue conocido por Regiomontanus y llevado a Alemania alrededor de 1468 (la traducción latina publicada como la edición príncipe del texto griego en 1544, se tomó de esta copia). El mismo manuscrito griego A fue copiado varias veces. El Cardenal Bessarion tenía una copia preparada entre 1449 y 1468 (MS E). Otra fue preparada cuando el manuscrito A estuvo en posesión del bien conocido humanista Jorge Valla (copia MS D). El destino de A y sus diversas copias ha sido hábilmente descrito por J.L. Heiberg en su edición de la **Opera** de Arquímedes. El último uso conocido del manuscrito A ocurrió en 1544, y a partir de entonces parace haber desaparecido. Los primeros materiales de Arquímedes impresos fueron, en efecto, meramente extractos latinos que aparecieron en **De expetendis et fugiendis rebus opus** de Jorge Valla (Venecia, 1501), y estaban basados en su lectura del manuscrito A. Pero realmente los primeros textos impresos de Arquímedes fueron las traducciones de Moerbeke de **Sobre la medida del círculo** y **Sobre la cuadratura de la parábola (Tetragonismus, id est circuli quadratura, etc.),** publicados a partir del manuscrito de Madrid por L. Gaurico (Venecia, 1503). En 1543, también en Venecia, N. Tartaglia volvió a publicar las mismas dos traducciones directamente a partir del trabajo de Gaurico y, además, también a partir del manuscrito de Madrid, las traducciones de Moerbeke de **Sobre el equilibrio de los planos** y el Libro I de **Sobre los cuerpos flotantes** (dando la impresión errónea de que había hecho estas traducciones a partir de un manuscrito griego, que no tenía, ya que simplemente repitió los textos del manuscrito de Madrid con virtualmente todos sus errores). Incidentalmente, Curtius Trioianus publicó los dos libros de **Sobre los cuerpos flotantes** en la traducción de Moerbeke del legado de Tartaglia (Venecia, 1565). Sin embargo, el paso decisivo en la difusión de Arquímedes fue dado con la citada **editio princeps** del texto griego, acompañado de la traducción latina de Jaime de Cremona en Basilea, 1544. Debido a que el texto griego se basaba fundamentalmente en el manuscrito A, no se incluyó **Sobre los cuerpos flotantes.** Una traducción latina adicional de los textos de Arquímedes, fue publicada por el perspicaz matemático Federico Commandino en Bolonia, 1558, que el traductor complementó con una hábil corrección matemática de la traducción de Moerbeke de **Sobre los cuerpos flotantes** (Bolonia, 1565), pero sin ningún conocimiento del largo texto perdido. Ya en el periodo 1534—1549, se había hecho una paráfrasis de los textos de Arquímedes por Francisco Maurolico. Fue publicada en Palermo en 1685. Otra traducción latina del siglo XVI por Antonius de Albertis se conserva sólo en manuscrito y parece no haber ejercido influencia en la matemática y la ciencia. Después de 1544 las publicaciones sobre Arquímedes y la utilización de sus trabajos empezaron a multiplicarse. Sus trabajos presentaban problemas de cuadraturas y proposiciones que los matemáticos trataron de resolver y demostrar no solo con sus métodos, sino también con un desarrollo de la geometría de los infinitesimales que iba a anticipar en algún aspecto el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz. Sus concepciones hidrostáticas fueron usadas para modificar la mecánica aristotélica. La influencia de Arquímedes en mecánica y matemáticas puede verse en autores tales como Commandino, Ubaldi del Monte, Benedetti, Simón Stevin, Lucas Valerio, Kepler, Galileo, Cavalieri, Torricelli y muchos más. Por ejemplo, Galileo menciona a Arquímedes más de cien veces, y la doctrina inercial usada en su análisis de la trayectoria parabólica de un proyectil se presenta como una abstracción del tipo de la de Arquímedes.

Arquímedes comenzó también a aparecer en lenguas vernáculas. Ya Tartaglia había traducido al italiano el Libro I de **Sobre los cuerpos flotantes,** el Libro I de **Sobre la esfera y el cilindro,** y la sección sobre medias proporcionales del **Comentario sobre la esfera y el cilindro** de Eutocius. El Libro I de **Sobre el equilibrio de los planos** fue traducido al francés en 1565 por Pedro Forcadel. No fue, sin embargo, hasta 1670 que se hizo una traducción al alemán, más o menos completa, por J.C. Sturm sobre la base de la influyente edición en griego y latín de David Rivault (París, 1615). También fue notable, por su influencia, la nueva edición latina de Isaac Barrow (Londres, 1675). De las muchas ediciones anteriores a la moderna edición de Heiberg, la más importante fue la de José Torelli (Oxford, 1792). Desde luego, ya entonces, los trabajos de Arquímedes habían sido casi completamente absorbidos por los matemáticos europeos y había ejercido su substancial y perdurable influencia en el comienzo de la ciencia moderna.

BIBLIOGRAFIA

[1] CLAGETT, M.: **Archimedes.** (Dictionary of Scientific Biography, vol. 1, 213–230). Scribner's, New York, 1981.

[2] EDWARDS, C.H.: **Archimedes.** (The historical development of the Calculus, 29–76). Springer, Berlin, 1982.

[3] DIJKSTERHUIS, E. J.: **Archimedes.** Copenhague, 1956.

[4] HEATH, T. L.: **The Works of Archimedes.** Cambridge, 1897.

[5] HEIBERG, J. L.: **Archimedis opera omnia cum commentaris Eutocii.** Leipzig, 1910–15.

[6] SCHNEIDER, I.: **Archimedes.** Wis. Buch., Darmstadt, 1979.

[7] VER EECKE, P.: **Les Oeuvres completes d'Archimède, suivies der commentaires d'Eutocius d'Ascalon.** París, 1960.