# EUCLIDES

ALBERTO DOU MASDEXEXAS *

## 0. Introducción.

Euclides floreció hacia el año 300 a.de C., que es aproximadamente el año en que apareció el texto de los **Elementos.** Fue profesor en el Museo de Alejandría, que gracias al interés de los primeros Ptolomeos era entonces, sin duda, el centro cultural más importante del mundo.

**0.1.** Thales de Mileto (625–545) en Jonia y Pitágoras de Samos (siglo VI a. de C.) en el sur de Italia crearon sendas escuelas, en las que parece que por primera vez se elaboraron demostraciones típicamente matemáticas; sus discípulos se extendieron por toda Grecia.

En el siglo de Pericles (V.a.de C.) surgen numerosos e importantes matemáticos que con los escasos recursos de una ciencia incipiente resuelven nuevos e interesantes problemas y plantean otros muy importantes. Así, por ejemplo, el de la cuadratura del círculo, planteado por Anaxágoras de Clazomene (muere el 428) mientras estaba en prisión, y estudiado con éxito por Hipócrates de Quíos (fl. aprox. 430). Asímismo el problema de la duplicación del cubo, iniciado también por Anaxágoras; el de la trisección del ángulo, resuelto mediante la trisectriz por el polifacético Hipias de Elis (nace aprox. 460); el del cálculo con magnitudes inconmensurables y el del tratamiento de los infinitesimales. Este periodo con razón ha recibido el nombre de Edad Heroica de las Matemáticas [ Véase Boyer ] .

Sigue a ésta la Edad de Platón (428–348) y Aristóteles (384–322) con otro grupo de importantes matemáticos entre los que descuellan Teeteto de Atenas (m. 368) y Eudoxo de Cnido (aprox. 400–aprox. 355).

A continuación, en el siglo III a.de C., la Edad de Oro de las Matemáticas, éstas alcanzan su máximo esplendor principalmente gracias a tres grandes figuras: Euclides de Alejandría (fl. aprx. 300), Arquímedes de Siracusa (287–212) y Apolonio de Perga (262 ? – 190 ?).

---

* Numerario de esta Real Academia.
* Catedrático de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Este resumen permite ya conjeturar una conclusión importante y cierta, a saber, que los **Elementos** de Euclides no tanto son una obra de creación que abra nuevos e importantes problemas u horizontes, cuanto una obra de compilación de los resultados más importantes obtenidos durante más de tres siglos de profunda y continuada actividad matemática. Sabemos además, que, en efecto, antes de Euclides, ya Hipócrates y después León (siglo IV a.de C.) y después Teudio de Magnesia (miembro de la Academia de Platón) compusieron **Elementos** de Geometría. El compendio de este último fue como un libro de texto en la Academia y parece que fue el punto de partida de Euclides para la composición de sus **Elementos** [ Véase Heath, 1956; I, 116 sg.].

**0. 2.** Sabemos que Euclides escribió unas doce obras algunas de las cuales se han perdido y las conocemos únicamente por referencias. Se conservan en textos griegos los **Elementos,** de los que nos ocuparemos casi exclusivamente en esta lección, y los **Datos,** que probablemente era un texto auxiliar para los estudiantes de los **Elementos.** Algo parecido puede decirse de la obra **Sobre la división de figuras,** aunque sólo se conserva en textos árabes. Escribió también la obra **Fenómenos,** que es un texto de geometría esférica para uso de astrónomos, una **Optica** y una **Catóptrica,** aunque de ésta se duda que sea de Euclides. Estas cinco o seis obras son las únicas que se conservan de Euclides. Entre las que se han perdido figura una titulada **Cónicas,** otra sobre **Superficies,** otra sobre **Paralogismos** (o **Falacias**) y finalmente una un tanto enigmática titulada **Porismas.** Esta última ha sido valorada muy diversamente y quizás fue un libro creativo abriendo perspectivas y nuevas líneas de investigación; con todo no me parece que su importancia pueda compararse con la de los **Elementos.** [Véanse Boyer y Ortiz de Urbina].

**0. 3.** Los **Elementos** son la obra que, después de la **Biblia,** más ediciones ha tenido; se calcula que más de mil ediciones. Es también la obra, exceptuando la Biblia y otros textos análogos, que mayor influencia cultural ha ejercido a lo largo de la Historia. Ha sido libro de texto en todas las Universidades durante muchos siglos, hasta el pasado siglo e incluso hasta el presente. Sabemos que influyó extraordinariamente en Galileo, Newton, Kant y otros muchos científicos y filósofos, que han creado la Ciencia moderna y la han analizado filosóficamente con profundidad.

La raíz de este éxito hay que buscarla en que se trata de la cristalización de tres siglos de profundo y apasionado trabajo de investigación científica en los albores mismos del fenómeno cultural que llamamos ciencia. Los **Elementos** han sido hasta el siglo XIX el paradigma indiscutido e indiscutible del pensamiento riguroso.

Merece también mencionarse que los **Elementos** no son una obra de recopilación indiscriminada de elementos o resultados no calificados que pertenezcan simplemente a un conjunto sino que Euclides recogió en su obra solamente aquellos resultados que tienen un carácter fundamental o de aplicación múltiple para el desarrollo de la ciencia [Véase Heath 1956, I, 114 sgs.].

Finalmente, la importancia de los **Elementos** se pone de manifiesto en un texto de

Proclo de Bizancio (410—485), del que extractamos estos dos fragmentos:

"Son de admirar especialmente sus [de Euclides] **Elementos de Geometría** por el orden que reina en ellos, por la elección de los teoremas y problemas como fundamentales, puesto que no ha incluído todos aquéllos que estaba en condiciones de dar, sino únicamente aquéllos capaces de funcionar como elementos y también por la variedad de los raciocinios que son conducidos de todas las maneras posibles ...".

" ¿Y qué diremos del método de investigación, de la economía y del orden entre las distintas partes y del rigor con que cada punto queda fijado?. Si pretendieras agregar o quitar algo reconocerías de inmediato que te alejas de la ciencia y te acercas hacia el error y la ignorancia. Pues, en verdad, muchas cosas poseen la apariencia de ser verdaderas y de surgir de los principios de la ciencia, mientras en cambio se alejan de estos principios y engañan a los espíritus superficiales". [Tomado de Rey Pastor, p. 48].

**0. 4.** Dividiré esta exposición en dos partes. En la primera me ocuparé de la epistemología de los **Elementos.** En la segunda y última daré una idea, necesariamente muy restringida y breve por razón del tiempo, del contenido de los **Elementos.**

## 1. Epistemología de los Elementos.

En esta parte me propongo estudiar por qué las proposiciones de los **Elementos** son verdaderas. Me parece que por lo menos hasta principios del Renacimiento era opinión común que la obra **Elementos** de Euclides realizaba el "ideal de sistematización deductiva" [Véase Losee, cap. 3]. En una primera sección (1.1) describiré la estructura material de los **Elementos.** En una segunda sección (1.2) señalaré algunos de los puntos más importantes de la Filosofía de la Ciencia de Aristóteles, pues estimo que la estructura epistemológica de los **Elementos** corresponde efectivamente a la epistemología de la ciencia elaborada en el Liceo. Finalmente en una tercera sección (1.3) trataré de justificar esta correspondencia.

**1. 1.** La obra **Elementos** está dividida en trece libros. El libro I empieza con una lista de 23 definiciones (*ὅροι*). Las cuatro primeras son:

"1. Un punto es aquello que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Las extremidades de una línea son puntos.
4. Una recta es una línea que yace por igual respecto de todos sus puntos."

Siguen definiciones de superficie, plano, ángulo y sus clases, círculos, triángulos y cuadriláteros y sus clases y finalmente la última del libro primero:

"23. Rectas paralelas son aquéllas que, estando en un mismo plano, por más que se las prolongue en ambos sentidos nunca se encuentran.'

Al comienzo del libro V las definiciones tercera y cuarta dicen:

"3. Una razón es una relación de tamaño entre dos magnitudes de una misma clase."

"4. Se dice que dos magnitudes forman razón cuando cada una admite un múltiplo que es mayor que la otra."

Al comienzo del Libro X se dan cuatro definiciones que introducen los términos de "conmensurable" e "inconmensurable", y los de "racional" e "irracional", tanto para segmentos rectilíneos como para cuadrados. Al comienzo del Libro XI están las 28 últimas definiciones de los **Elementos** y las cuatro finales definen el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro.

Hay una lista de definiciones al comienzo de cada uno de los seis primeros libros. Los tres libros VII–IX forman una unidad, pues contienen la Aritmética de los **Elementos** y en ellos hay sólo una lista de 22 definiciones al empezar el libro VII. El complicado libro X además de la lista inicial, contiene otras dos listas de proposiciones intercaladas en el texto. Finalmente los libros XI–XIII forman un bloque conteniendo toda la geometría del espacio y en ellos hay una única lista de 28 proposiciones al comenzar el libro XI. La obra contiene un total de 131 definiciones.

Para la epistemología de los **Elementos**, más importante aún que las definiciones son los postulados (αἰτήματα ) y las nociones comunes (κοιναὶ ἔννοιαι ) o axiomas. Euclides incluye sólo cinco postulados en los **Elementos**, todos en el primer libro inmediatamente después de las 23 definiciones. A continuación pone los cinco únicos axiomas de toda la obra.

Aparte de los cinco axiomas, de los cinco postulados y de las 131 definiciones, de cuyo papel nos ocuparemos en la tercera sección, el resto de los **Elementos** está constituido por 465 proposiciones distribuidas entre los trece libros.

Cada proposición comienza estableciendo un enunciado, en el que presuponiendo de un modo suficientemente explícito unos datos, se establece un resultado que ha de ser demostrado. A continuación del enunciado y apelando a un diagrama o dibujo, que es una interpretación o instancia geométrica de los conceptos y relaciones del enunciado, se repite el contenido del enunciado. A continuación se procede a la demostración, apelando al diagrama en la que también se han dibujado o construido las líneas auxiliares que representan los conceptos y relaciones pertinentes a la demostración. La demostración es un raciocinio estrictamente formal que deduce la conclusión de los datos. Repetida la conclusión de forma que coincida con el resultado establecido en el enunciado, se concluye generalmente con las palabras "como queríamos demostrar". Es importante observar que en la deducción de la conclusión a partir de los datos sólo pueden emplearse las definiciones, los postulados, los axiomas y los resultados de las proposiciones ya demostradas, pero no se puede apelar a otras propiedades que puedan verificarse en el diagrama. Esta apelación incorrecta al diagrama constituye un verdadero peligro, a veces muy sutil; pero en general queda compensado por la grande ayuda que el diagrama presta a la argumentación.

En la segunda parte daremos una brevísima idea del contenido de algunas de estas 465 proposiciones.

1. 2. Sin duda Aristóteles conoció en la Academia el texto de Geometría de Teudio, y asimismo en el Liceo su escuela contribuyó eficazmente a la elaboración de la epistemología de los **Elementos.** El texto aristotélico más relevante para nuestro tema es el del capítulo I, 10 de los **Segundos Analíticos.** En él se encuentran estos párrafos.

" § 3. Entre los principios de que nos servimos en las ciencias demostrativas, unos son especiales y otros son comunes". Por ejemplo, son principios especiales las definiciones de la línea y de la línea recta; mientras que el principio: si de cosas iguales se quitan cosas iguales los restos serán iguales, es un principio común".

" § 4. También se llaman principios propios, cuya existencia se admite sin demostración, aquéllas cosas en que la ciencia encuentra las propiedades esenciales que ella estudia. Así, la aritmética admite sin demostración las unidades, y la geometría los puntos y las líneas: porque ambas admiten sin demostración la existencia y la definición de estas cosas. Además, respecto de las modificaciones esenciales de estas cosas se admiten igualmente sin demostración los nombres de cada una de ellas. Por ejemplo: la aritmética admite también el sentido de las palabras par o impar, cuadrado, cubo, etc.; y la geometría, el de los términos inconmensurable, quebrada, oblicua, etc. Pero en cuanto a la existencia de estas propiedades, se la demuestra por medio de principios comunes y de proposiciones ya demostradas. El mismo método tiene lugar en astronomía.

" § 5. En efecto, toda ciencia adquirida por demostración se refiere a tres cosas: primera, a todo aquello cuya existencia se admite sin demostración, es decir, al género mismo cuyas modificaciones esenciales estudia la ciencia; segunda, a aquellos principios comunes que llamamos axiomas, de donde salen primitivamente las demostraciones; y por último y en tercer lugar, a las modificaciones de este mismo género, el nombre de cada una de las cuales es preciso admitir también sin demostración.

" § 6. Por lo demás, puede muy bien suceder, que ciertas ciencias prescindan de algunas de estas tres cosas". A saber, cuando resultan evidentes. "Sin embargo, puede decirse siempre, que naturalmente se dan estas tres cosas: aquello de lo que se demuestra algo, lo que se demuestra, y aquello mediante lo cual se demuestra". [**Seg.Anal.** 76 a 37--76 b 23 ].

En este texto se distinguen los términos primitivos de una ciencia (en la $1^a$ de las tres cosas); los términos derivados, propiedades y predicados (en la $3^a$); y los axiomas, o sea los principios especiales (o axiomas propios) y los principios comunes (o axiomas lógicos). Aristóteles incluye entre los principios tanto los conceptos del sujeto (materia u objeto) de la ciencia, como los axiomas. Obsérvese que de los conceptos primitivos de una ciencia hay que admitir sin demostración tanto su significado como su existencia; mientras que de las propiedades, sólo hay que admitir sin demostración su significado, pero es necesario demostrar su existencia.

Obsérvese también que para Aristóteles estas consideraciones valen no sólo para la Aritmética y Geometría, sino igualmente para la Astronomía, y al parecer para todas las ciencias

En los mismos **Segundos Analíticos,** en el último capítulo, Aristóteles explica cómo partiendo del conocimiento sensitivo y mediante una cierta inducción, la razón aprehende intuitivamente los primeros principios.

En cuanto a la cuestión de la inferencia lógica, Aristóteles trata exclusivamente del tema del silogismo con gran originalidad y exactitud en los **Primeros Analíticos.**

1. 3. Si ahora volvemos a la consideración de las definiciones, postulados y nociones comunes de los **Elementos,** vemos que muchas cuestiones quedan enmarcadas en la epistemología que acabamos de describir, aunque no sin dificultades.

Entre las definiciones distinguimos las de términos primitivos y las de términos derivados. Por ejemplo, las definiciones de punto (I,1), de recta (I,4) y de razón (V,3) de dos magnitudes lo son de términos primitivos. Mientras que la definición de paralelas (I 23) y la de cuadrado (I, 22) como cuadrilátero de lados iguales y ángulos rectos lo son de términos derivados. Hemos de admitir que entendemos lo que significan punto, recta y razón, y admitir también su existencia. En cambio, hemos de entender lo que significan rectas paralelas y cuadrado, pero su existencia ha de ser demostrada.

La definición de razón de dos magnitudes (V,4) en el contexto de los **Elementos** debe ser considerada como definición de un término primitivo, y en realidad es equivalente a un postulado (el de Arquímedes), del que quizás pueda decirse que se impone al lector [Véase **Seg. Anal.** I. 10, 76 b 23–34]. Hay una obvia diferencia entre esta última definición y las de punto recta y razón. Estas últimas son meramente descriptivas y necesariamente vagas; en cambio la definición de razón de dos magnitudes equivale a un postulado preciso y es consiguientemente muy operativa.

M. Pasch (1843–1930) [ Véase Becker, 200 sgs.] y D. Hilbert (1862–1943) [ Véase Hilbert ] han mostrado cómo prescindir de las definiciones primitivas meramente descriptivas, sustituyéndolas por definiciones implícitas mediante postulados (o axiomas propios). Pero entonces, la geometría se convierte en una pura teoría o ciencia exclusivamente formal y no es posible saber de qué trata. Las definiciones primitivas descriptivas son representaciones o ilustraciones, algo así como los diagramas geométricos [ Véase **Seg. Anal.** I 10 77 a 1—4 ] que dibujamos, que nos permiten conectar los lenguajes ordinario y científico. Es obvio que en los **Elementos** los términos tienen una referencia, inmediata o mediata, en el mundo de lo real.

Los cinco postulados de los **Elementos** son:

"1 Se puede trazar una recta desde cualquier punto a cualquier punto.

2 Una línea recta delimitada puede prolongarse continuamente permaneciendo recta.

3. Se puede trazar un círculo con cualquier centro y radio.

4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores menores que dos rectos, las dos rectas indefinidamente prolongadas se cortan en este mismo lado."

Me parece claro que los cinco postulados son "principios especiales" en el sentido de Aristóteles, es decir, son propios de la Geometría. Me parece que no hay una distinción clara entre estos postulados, en particular el $4^0$ y el $5^0$, y el postulado implícito al que equivale una definición como la de razón de dos magnitudes (V, 4).

Las cinco nociones comunes de los **Elementos** son:

"1 Cosas iguales a una tercera son también iguales entre sí.

2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales.

3. Si de cosas iguales se substraen cosas iguales, los restos son iguales

4. Las cosas que son congruentes entre sí, son iguales

5. El todo es mayor que la parte".

Todos son principios comunes en el sentido de Aristóteles. Según Euclides y suponiendo que concuerda con Aristóteles, los conocemos infaliblemente por la intuición. Me parece que lo mismo hay que decir de los cinco postulados, a saber que, según Euclides, los conocemos también infaliblemente por la intuición, incluso el $5^0$. Se supone, en efecto, que la ciencia es de lo necesario y que todas las proposiciones de los **Elementos** son verdaderas. Y sólo la intuición permite conocer infaliblemente todos los primeros principios, tanto los comunes, como los especiales de cada ciencia: ya que por ser principios son indemostrables y no hay otro medio de conocimiento.

## 2. Contenido de los Elementos.

En primer lugar haré una descripción general muy sucinta de los trece libros de los **Elementos** (2.1). A continuación expondré cuatro de los más interesantes resultados que contienen (2.2).

**2.11.** Cada uno de los trece libros que componen el texto de los **Elementos** tiene un contenido que substancialmente es lineal y progresivo, de modo que cada libro posee una gran unidad. Pero no se puede decir lo mismo de los **Elementos** en su conjunto; más bien, por razones históricas, forman un conglomerado de Geometría, la parte más importante, de Aritmética (o Teoría de Números) y de algo que ahora llamamos Algebra.

Según su contenido los trece Libros, se clasifican así:

Tratan de Geometría los Libros I, III, IV; XI, XII y XIII; de los cuales los tres primeros y parte del XII son de Geometría Plana, y el resto de Geometría del Espacio.

Los Libros II, V, VI y X son de Algebra.

Y los Libros VII, VIII y IX son de Aritmética.

Según su procedencia se clasifican así:

Los cuatro primeros, I–IV, son debidos substancialmente a los pitagóricos aunque Hipócrates tiene una importante contribución en los III y IV. Los Libros V y VI son debidos a Eudoxo. Los VII–IX son también de los pitagóricos. El X es debido a Teeteto. El Libro XI procede substancialmente de la Escuela jónica. El XII tiene varios precursores, pero el método de exhaución que es el que permite demostraciones rigurosas, es de Eudoxo. Finalmente el Libro XIII es debido a Teeteto.

**2. 12.** El Libro primero es uno de los más importantes por el extremado cuidado de su elaboración y dado su carácter fundamental. En la Proposición 16 demuestra, suponiendo tácitamente que la recta es de longitud infinita, que el ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los interiores opuestos. Con ello establece la existencia y unicidad de la paralela por un punto dado a una recta dada. Demuestra numerosos teoremas de nuestra Geometría elemental y concluye con el teorema de Pitágoras (Prop. 47) para el triángulo rectángulo y su recíproco (Prop. 48).

En el Libro II, se demuestran, empleando segmentos, varias identidades algebraicas. Por ejemplo, en la Prop. 10, que

$$(2a + b)^2 + b^2 = 2\left(a^2 + (a + b)^2\right)$$

A continuación resuelve un problema equivalente al de cortar un segmento en media y extrema razón, lo que le permitirá construir el pentágono regular.

Los Libros III y IV contienen los teoremas elementales de la Geometría del círculo. En la última Proposición se demuestra cómo inscribir el polígono regular de quince lados en el círculo.

El Libro V es de gran importancia teórica. En él, Eudoxo trasciende la limitación a los segmentos conmensurables, y establece los teoremas del Libro II también para magnitudes inconmensurables. En realidad se trata substancialmente de una Teoría de Magnitudes; y más en concreto de las magnitudes que forman razón, o sea que satisfagan el postulado de Arquímedes o de Eudoxo. Este postulado se define y postula implícitamente en la Definición V,4.

En el Libro VI se prosigue el desarrollo del Algebra, con ropaje geométrico, y en particular se resuelve rigurosamente la ecuación de segundo grado.

Los Libros VII–IX son de Aritmética o de Toería de Números Consideran exclusivamente números naturales y contienen el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor y demuestra que la sucesión de los números primos es infinita. En la última Proposición del libro IX (Prop. 36) se demuestra que si $S_n$ es primo, siendo

$$S_n = 1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$$

entonces el número

$$2^{n-1} \cdot S_n$$

es un número perfecto o sea que es igual a la suma de sus divisores. Como por ejemplo el número 28.

El Libro X empieza con un teorema de corte moderno. Es el más largo de los Libros con 115 proposiciones, de las que la 111 tiene un corolario en el que cataloga 13 clases disjuntas de irracionales. Según A.De Morgan en este Libro "Euclides investiga las posibles variedades de segmentos que pueden ser representados [ en Algebra moderna] por $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ donde **a** y **b** representan dos segmentos conmensurables".[ Citado por M. Kline, p. 80]. Este Libro ha sido llamado "La cruz de los matemáticos". Según W. Knorr (págs. 1-2) la idea esencial del Libro se manifiesta cuando se lo considera en función de la construcción de las figuras regulares planas y sólidas. Me parece que para evaluar este Libro y en general para evaluar toda la obra de los **Elementos** comparada por ejemplo con los **Fundamentos de la Geometría** de Hilbert, es importante tener en cuenta que los griegos desconocieron los números reales, lo que hace su tarea mucho más difícil.

El Libro XI contiene lo que ahora se estudia en un primer curso elemental de Geometría del Espacio.

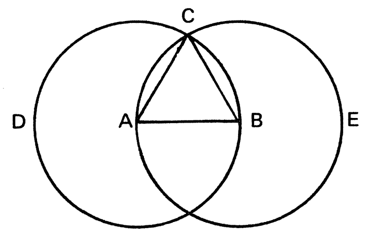
El Libro XII consta de 18 proposiciones sobre el cálculo de áreas y volúmenes elementales, pero que para su demostración rigurosa fue necesario el método de exhaución de Eudoxo

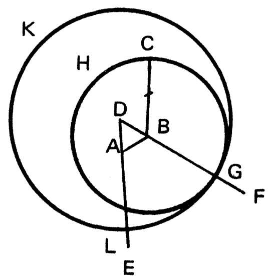
El Libro XIII está dedicado a la construcción de los cinco poliedros regulares y a su inscripción en la esfera. Un corolario y un Lema después de la Proposición 18 y última de toda la obra, demuestran facilmente que no hay ningún otro poliedro regular aparte de estos cinco cuerpos cósmicos o platónicos. El conjunto de los **Elementos** es de una profundidad y belleza incomparables, y el Libro XIII es un digno final de la obra, como sin duda le pareció a Kepler.

**2. 2.** Voy a exponer con un poco más de detalle cuatro de los muchos resultados importantes que contienen los **Elementos.**

**2.21.** Ya las tres primeras Proposiciones del primer libro ofrecen una sorpresa.

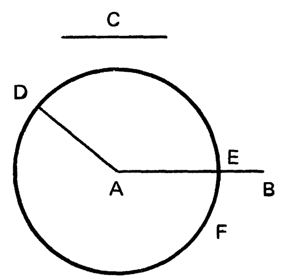
En la Proposición I,1 se demuestra cómo construir un triángulo equilátero sobre un segmento dado AB. Demostración: Basta con centros en A y B (Diag.1) y radio AB trazar (Postulado 3) dos círculos y su intersección C da el tercer vértice de un triángulo equilátero ABC como se quería construir.




La Proposición I,2 demuestra cómo construir un segmento que tenga un extremo en un punto dado A y que sea igual a un segmento dado BC. Demostración: (Diag. 2). Se construye el triángulo equilátero ABD (Prop. I,1). Con centro en B se traza un círculo de radio BC y se obtiene G. Luego con centro en D se traza un círculo de radio DG. El segmento AE tiene un extremo en A y es igual al BC, como se quería construir.

En la Prop. I,3 se demuestra cómo dados dos segmentos desiguales AB y C, se corta del mayor AB un segmento igual al menor C. Demostración: Se construye AD (Diag. 3) con un extremo en A e igual a C. Se traza con centro en A el círculo de radio AD. El segmento EB es el resultado de cortar de AB un segmento igual al C, como se quería hacer.




El resultado final de estas tres Proposiciones y su objetivo es demostrar que, dados AB y C, el segmento C se puede trasladar a AE. El postulado III, 1 (el primero del grupo de los de congruencia) de Hilbert postula precisamente la posibilidad de transportar un segmento C a AE. Teniendo una regla y un compás, ¿cuanto más fácil no sería emplear la regla y, haciendo señales en ella, transportar segmentos o abrir el compás con la distancia C y trasladarlo a AE ?. Pero para Euclides, según sus Postulados I, 1–3, la regla es sólo para trazar rectas y el compás para trazar círculos. El compás de los **Elementos** es "colapsable": mientras tiene un pie en el papel pueden trazar círculos o arcos, pero en cuanto se levantan los dos pies el compás colapsa. No puede emplearse para transportar segmentos ni es necesario suponerlo según demuestran estas tres Proposiciones I, 1–3. Hay que asumir como postulado estrictamente aquello que sea indemostrable.

Naturalmente, Euclides deja todo este comentario a la sagacidad del lector, pues no hay en los **Elementos** ninguna referencia al objetivo de estas tres primeras Proposiciones ni a la colapsabilidad de los compases.

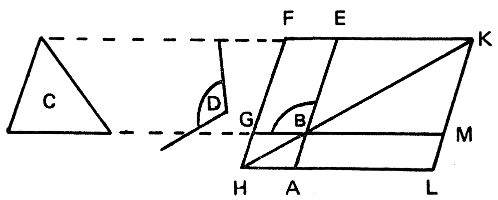
**2. 22.** Vamos a ver ahora cómo se resuelve en los **Elementos** la ecuación de segundo grado. El problema no lo plantea Euclides en estos términos sino bajo el nombre técnico de "aplicación de áreas". Es de suponer que los griegos del siglo IV a.de C. conocían la técnica de resolución numérica de las ecuaciones de segundo grado que empleaban los babilonios. Estos, desde hacía siglos, sabían hallar dos números tales, que su producto y su suma (o diferencia) fueran dos números racionales dados, lo que es equivalente a resolver la ecuación de segundo grado. Pero en el caso general la solución era solo aproximada, pues venía siempre dada por un número racional; aparte de que ignoramos si tenían un método general, pues sólo casos concretos, algunos complicados han llegado hasta nosotros. Veremos ahora cómo los griegos, mediante la técnica de la aplicación de áreas, resuelven un problema geométrico equivalente al de la resolución **exacta** de la ecuación de segundo grado.

Los pitagóricos no conocían otros números que los naturales, y de alguna manera operaban también con los racionales; las proporciones pitagóricas son de cantidades conmensurables. El descubrimiento por alguno de los pitagóricos (entre 415 y 365) de que la diagonal del pentágono regular es inconmensurable con su lado, y la diagonal del cuadrado con el suyo, hizo increíblemente difícil el estudio de la Geometría mediante números. En particular, era patente que el problema equivalente a la resolución de la ecuación $x^2 = 2$, no podía tener solución, si ésta había de ser un número, a menos que se crease un nuevo conjunto de números. No ha sido hasta finales del siglo XIX que se ha creado el conjunto de los números reales, haciendo siempre posible la extracción de raíces cuadradas, pero esta creación era mucho más difícil que lo que requería la solución del problema algebraico planteado.

Eudoxo en el siglo IV a.de C. fue quien resolvió la crisis, introduciendo unas nuevas entidades matemáticas que no llamó números, sino magnitudes. El Libro V de los **Elementos** es una Teoría de Magnitudes, y mediante ellas resuelve en el Libro VI un problema de aplicación de áreas, que ofrece en particular y de una manera equivalente la solución de la ecuación de segundo grado. Las magnitudes del Libro V son magnitudes geométricas, en cuanto que se refieren a entidades geométricas. Las magnitudes que aquí interesan son las de segmentos de rectas, de ángulos y de figuras planas. Segun Def. I.14 "una figura es aquello contenido dentro de uno o varios contornos"; contornos elementales, pues necesariamente son un número finito de segmentos (de recta) o arcos (de círculo). Podemos decir que en el Libro VI de los **Elementos** una magnitud es una medida (no numérica, sino **sui generis**) de segmentos, ángulos o figuras planas, que Euclides designa respectivamente por segmento (equivalente a longitud), ángulo (equivalente hoy a valor del ángulo), y por área (como hoy) o por la misma palabra que designa la figura (triángulo, paralelogramo (Véase Prop. I, 34), polígono, etc. ...). Pero, obsérvese, que actualmente el área de una figura plana es un número real, mientras que para Eudoxo y Euclides es una magnitud Cuán cerca esté la estructura del conjunto de magnitudes de la del cuerpo ordenado de números reales es una cuestión que se discute; son relevantes para esta discusión los artículos de Krull y las observaciones de Kline[,pp. 72 sg.] .

La primera vez que Euclides menciona la aplicación de áreas es en la Prop. 44 del Libro I (debido a los pitagóricos). El enunciado dice así:

"Aplicar sobre un segmento dado AB y según un ángulo rectilíneo dado D, un paralelogramo igual a un triángulo dado C". (Hemos añadido las letras para mayor claridad y no tener que repetir).

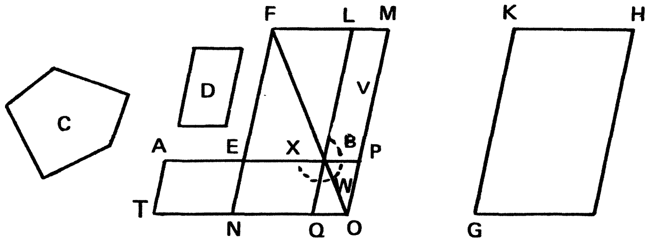


La solución viene dada por el paralelogramo LB, o sea LABM. Se empieza construyendo el ángulo EBG = ángulo D; luego se toma BG igual a la mitad de la base del triángulo C y se traza el paralelogramo FB de modo que tenga la misma altura que el triángulo C. Después se halla la intersección K de FE y HB, se concluye la construcción trazando KML El paralelogramo BL es igual al BF y por tanto igual a C. como se quería demostrar.

Obsérvese el doble sentido de la palabra "igual". Cuando se dice que dos triángulos son iguales es que las figuras son congruentes y las dos figuras son iguales. En el enunciado anterior, el paraleloramo LB es "igual" al triángulo C, es decir que tienen la misma magnitud (o sea la misma área o medida).

El enunciado de la Prop. VI, 29 dice:

"Sobre una recta dada AB aplicar un paralelogramo AO igual a una figura rectilínea dada C y que exceda por una figura paralelográmica BPOQ semejante a una dada D".




Es decir, se trata de hallar el punto O, tal que el paralelogramo AO tenga la misma área que el polígono dado C; y tal que el paralelogramo BPOQ, cuya base BP es lo que la base AP "excede" de AB dado, sea semejante al paralelogramo dado D.

Para ello, sea E el punto medio de AB y trácese sobre EB el paralelogramo EBLF semejante al D dado. Trácese aparte (como se ha demostrado en la Prop. VI, 25) el paralelogramo GH semejante a D e igual a la suma de BF y C. Tómese FM igual a KH, y FN igual a KG, y complétense los paralelogramos NM y BO.

Entonces, el "gnomon" NEBLMON es igual a C; y en este mismo gnomon el paralelogramo LP es igual (en área) al EQ, y éste a su vez es igual al AN. Por tanto, AO es igual a C y BO es semejante a D, como se quería demostrar.

Para ver que la resolución de este problema equivale a la resolución de una ecuación de segundo grado, supóngase que el paralelogramo dado D sea un cuadrado. Póngase

$AB = 2a$, $C = b^2$. El paralelogramo BO es un cuadrado y el problema es el de determinar el punto O, o sea, el de hallar $QO = OP = x$, tal que el rectángulo AO sea igual a $b^2$, o sea tal que

$$x\,(2a + x) = b^2.$$

La construcción de Euclides permite en efecto calcular exactamente $OP = x$.

Euclides da también la solución completa (VI, 28) de la ecuación

$$x\,(2a - x) = b^2,$$

sólo y cuando sea $b^2 < a^2$.

Observemos finalmente que las áreas (en el sentido de Eudoxo) de las figuras planas son los valores de una aplicación definida sobre el conjunto de figuras planas y que toma valores en el conjunto de magnitudes; éstas, de acuerdo con la Definición V, 4, forman razón, es decir, son arquimedianas. Puesto que cualquier figura plana es igual (en área) a un rectángulo con uno de los lados constante, es obvio que las magnitudes forman un semigrupo abeliano, totalmente ordenado y arquimediano [ Krull, 1960, p. 87 ] .

**2.23.** He aquí el enunciado de la primera proposición del Libro X:

"Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se substrae una magnitud mayor que su mitad, y del resto una magnitud mayor que su mitad, y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la menor de las magnitudes dadas".

Para demostrar esta proposición es necesario el postulado de Arquímedes, o sea suponer que las magnitudes forman razón u otra relación equivalente. Euclides aplica la definición V, 4 y la demostración es fácil, y el mismo resultado bastante obvio.

En términos modernos, tenemos que el primer resto ha de ser menor que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) . a,$$

suponiendo que **a** y **b** son las longitudes de los segmentos dados (o los valores de las magnitudes dadas) y que $a > b$.

El segundo resto será menor que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 . a,$$

y al cabo de **n** veces, el resto que se obtenga será menor que

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^n a=\frac{a}{2^n}.$$

Aplicando el postulado de Arquímedes, resulta inmediato que existe **n** tal, que se tenga

$$\frac{a}{2^n}<b$$

como se quería demostrar.

Se objeta a esta definición que es incorrecta [ Véase Kline, p. 81] cuando se aplica la Definición V, 4, o sea, cuando se aplica el postulado de Arquímedes. Según las definiciones V ,3 y 4 (Véase la sección 1. 1) parece que puede haber magnitudes que no formen razón, y en este caso la aplicación de la Definición V, 4 sería en efecto incorrecta. Para poderlo apiicar, habría que demostrar que las magnitudes forman razón, y tal demostración no se da.

Pero, las Definiciones V, 3 y 4 son definiciones de términos primitivos, más aún de términos primitivos geométricos, pues se trata de Geometría. De hecho, las únicas magnitudes que Euclides estudia o menciona explícitamente son las relativas a segmentos, ángulos, figuras planas limitadas por rectas o círculos, y figuras sólidas limitadas por planos o esferas o cilindros o conos, es decir, todas muy elementales desde el punto de vista moderno. Ahora bien, Euclides ignora los números reales, y por tanto a él el que los segmentos formen razón, le ha de parecer necesariamente indemostrable.

Si ahora recordamos lo dicho en la sección 1.3, parece que debe entenderse que Euclides supone tácitamente que el lector entiende lo que significan las Definiciones V, 3 y 4, y que acepta que existen tales magnitudes; o sea, que equivalentemente acepte que los segmentos de recta (se subentienden las magnitudes de los segmentos de recta), y lo mismo las figuras planas y sólidas que menciona, forman en efecto razón, o sea que satisfacen el postulado de Arquímedes. El cual, por cierto, es actualmente evidente, pues identificamos la recta euclidiana con la recta real, y suponemos que la recta real es consistente.

Parece, pues, que debemos concluir que los Libros V y VI no son una Teoría de Magnitudes general, sino solamente una Teoría de Magnitudes Arquimedianas Y parece también, que lo más que se puede criticar de Euclides es que no formule explícitamente el postulado de que los segmentos son magnitudes que forman razón, como por ejemplo postula explícitamente que existe una recta que pase por dos puntos dados. Obsérvese, sin pretender que esta observación tenga otro valor que el de ilustrar, que cuando hoy se dice: " A es B, cuando A tiene tal propiedad", nadie entiende que tal propiedad sea condición necesaria, sino sólo suficiente. Pero si se dice: "Definición: Un espacio topológico es un espacio de Hausdorff cuando tiene tal propiedad", normalmente se entiende actualmente que tal propiedad no sólo es suficiente, sino que es también necesaria.

**2. 24.** Para terminar esta lección expondré la Prop. XII, 2, en la que el método de exhaución, debido a Eudoxo, es empleado por primera vez en los **Elementos** y probablemente en toda la historia del pensamiento.

La Prop. XII, 1 demuestra que las áreas de dos polígonos semejantes inscritos en sendos círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros. La demostración no ofrece especial dificultad y es incluso corta, pues se apoya en los resultados análogos del Libro VI

La Proposición XII, 2 establece:

"Círculos son entre sí como los cuadrados sobre sus diámetros".

La demostración de esta proposición ha sido cuidadosamente preparada de antemano, con la Proposición XII, 1 precedente, y sobre todo con la Proposición X,1, que acabamos de exponer en el apartado 2.23.

En la demostración se suponen implícitamente que las magnitudes o áreas de las figuras planas poligonales (y también las limitadas por arcos de círculo), que como hemos visto en el apartado 2.22 forman un semigrupo abeliano, totalmente ordenado y arquimediano, satisfacen también el postulado de monotonía: "si una figura está contenida en otra, su área es menor", y el de aditividad: "si dos figuras son disjuntas, el área de su unión es la suma de sus áreas".

Supongamos que se dan dos círculos, C y C', con sus respectivos diámetros d y d'. La Proposición establece:

$$\frac{\text{Area de C}}{\text{Area de C'}} = \frac{d^2}{d'^2} .$$

Supongamos que no sea verdad, dice Euclides. Entonces existirá una área S tal que

$$\frac{\text{Area de C}}{S} = \frac{d^2}{d'^2} ,$$

siendo $S <$ Area de C' o $S >$ Area de C'. Supongamos que tiene lugar lo primero, y pongamos

$$\text{Area de C'} - S = E,$$

o sea que E es la diferencia entre el área de C' y el área S.

Se trata ahora de demostrar que esta diferencia E lleva a una contradicción, y para ello Euclides se valdrá de la Prop. XI,1 de la X,1, y de la construcción de una sucesión de polígonos regulares inscritos en C' y que "exhausten", o sea, agotan o llenan el área de C'.

El primer polígono regular de la sucesión es, siguiendo a Euclides ,un cuadrado inscrito en C' el cual tiene un área mayor que la mitad del área de C'. El segundo polígono es el octógono regular que tiene cuatro vértices comunes con el cuadrado; Euclides demuestra fácilmente que el área de este octógono excede el área del cuadrado en una área mayor que la mitad del exceso del área de C' sobre el cuadrado. El siguiente polígono es el regular de 16 lados, que tiene ocho vértices comunes con los del octógono, y cuya área excede la de éste en una área, mayor que la mitad del exceso del área de C' sobre el octógono. Y así sucesivamente.

Aplicando ahora la Prop. X,1, Euclides concluye la existencia de un polígono, sea P', inscrito en C' y tal que su área difiere del área de S en menos de E, o sea Area de C' – Area de P' $<$ E = Area de C'–S. De aquí se deduce que el Area de P' es mayor que S.

Sea ahora P el polígono semejante al P' e inscrito en C. Aplicando la Prop. XII,1 se tiene

$$\frac{\text{Area de P}}{\text{Area de P'}} = \frac{d^2}{d'^2}$$

Ahora bien, las dos proporciones obtenidas arrojan

$$\frac{\text{Area de C}}{\text{S}} = \frac{\text{Area de P}}{\text{Area de P'}}, \text{ o sea } \frac{\text{Area de C}}{\text{Area de P}} = \frac{\text{S}}{\text{Area de P'}}$$

Puesto que el polígono P está contenido en el círculo C, el área de P es menor que el área de C y por tanto también el área de P' ha de ser menor que S. Pero se ha visto que por su construcción el área de P' es mayor que S. Luego hemos llegado a una contradicción y es imposible que S sea menor que el área de C'.

Igualmente se demuestra que S tampoco puede ser mayor que el área de C'.

Por consiguiente ha de ser igual, como se quería demostrar.

Esta doble reducción al absurdo resulta mucho más clara que el paso al límite. Así como Galileo debió de pasar muchas horas analizando la Teoría de Proporciones del Libro V, Newton las pasó estudiando el método de exhaución.

# BIBLIOGRAFIA


ARISTOTELES. Ediciones de W.D. Ross, Vol. I; Loeb Classical Library, N$^{o}$391. Traducción Castellana de F. Larroyo, México, 1982 (7$^{a}$ ed.).

BECKER, Oskar, **Grundlagen der Mathematik**, Freiburg, 1964.

BOYER, Carl B., **A History of Mathematics**, Wiley, Nueva York, 1968.

DOU, Alberto, 1970, **Fundamentos de la Matemática**, Labor, Barcelona, 1974 (2$^{a}$ ed.).

EUCLIDES. Στοιχεια **(Elementos)**; edición crítica y traducción al latín por I. L.

HEIBERG, Teubner, Leipzig, 1883. Traducción inglesa por T.L. Heath, Dover, Nueva York, 1956 (2$^{a}$ ed.).

HILBERT, David, **Fundamentos de la Geometría**; traducción del alemán por Francisco Cebrián. CSIC, Madrid, 1953.

KNORR, Wilbur, **"La croix des Mathématiciens: The Euclidean Theory of Irrational Lines", Bulletin of The Am. Math. Soc.** 9(1983), 41–69.

KRULL, Wolfang, 1960, **"Ueber die Eudomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen", Mathem. Zeitschrift,** 74 (1960), 81–90.

KRULL, Wolfang, 1962, **"Automorphismen und Spiegelungen eudoxischer Halbgruppen" Mathem. Zeitschrift,** 79(1962), 53–68.

KLINE, Morris, **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,** Oxford Univ. Press, Nueva York, 1972.

LOSEE, John, 1972, **Introducción histórica a la filosofía de la Ciencia**; traducción del alemán por A. Montesinos; Alianza Editorial, Madrid, 1972.

ORTIZ DE URBINA, Ricardo S., **"Algunos aspectos del lenguaje de la matemática griega (en torno a los porismas)"**, Ponencia en el III Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias, Gijón, 1985. En curso de publicación (Cedida amablemente por el autor).

REY PASTOR, Julio, y J. BABINI, **Historia de la Matemática,** Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1951.