LOS ORIGENES DEL METODO AXIOMATICO–DEDUCTIVO

MARIANO MARTINEZ PEREZ *

1.– Introducción

Es probable que si se le preguntase hoy a un matemático profesional interesado por la historia de la matemática (que no todos lo están, desgraciadamente) que cuál fue, a su juicio, el descubrimiento más importante de la antigua matemática griega a lo largo de sus mil años de historia, es probable, repetimos, que se viera en dificultades para destacar alguno de los muchos y muy importantes resultados que produjo aquélla, una de las más espléndidas épocas del pensamiento humano, y es muy probable también que olvidase mencionar el logro más radicalmente importante, con gran diferencia sobre los demás, y ello precisamente por ser tan conocido y familiar que "se da por descontado". Se trata de la invención del método axiomático–deductivo, algo que nos es tan natural que es aún "nuestro" método matemático.

Este método no ha sido utilizado, sin embargo, por la matemática a lo largo de toda su historia, sino que lo inventaron unos cuantos matemáticos y filósofos cuyos nombres ha borrado el polvo del tiempo, por las soleadas plazas de la Atenas de Pericles hacia mediados del siglo V a.C. Y, aunque tal método haya sufrido diversas vicisitudes a lo largo de la historia, hoy día sabe perfectamente cualquier matemático que, por muy importante que sea una nueva "verdad matemática", un nuevo "teorema" que haya descubierto, la comunidad matemática no lo aceptará como tal si no viene acompañado por una demostración correcta; de lo contrario, podrá incorporarse o no a las crecidas huestes de las "conjeturas" o "hipótesis" más o menos "verosímiles", pero nunca a las de los teoremas o verdades firmemente establecidas del Olimpo matemático.

Uno de los tratados matemáticos más famosos (y más discutidos) de mediados del siglo XX, los **Eléments de Mathématique** de Nicolas Bourbaki, comienza con las siguientes palabras, que abren la Introducción a su Libro I (titulado sintomáticamente **Théorie des Ensembles**):

> "Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux;

---

* Profesor de la Universidad Complutense

> et, aux, époques où la notion a menacé de s'en perdre et où de ce fait la mathématique s'est trouvée en danger, c'est chez les Grecs qu'on en a recherché les modèles. Mais à ce vénérable héritage sont venues s'ajouter depuis un siècle d'importantes conquêtes. [1] .

Y, efectivamente, estas bellas y generosas palabras no hacen sino reconocer en justicia, como hemos dicho, la más grande de las muchas y muy importantes deudas históricas que tenemos con los matemáticos de la antigua Grecia, ese puñado de pensadores de los que nos separan casi dos milenios y medio, pero que son los primeros que no se nos presentan ya como irremediablemente antiguos y superados por la historia, sino al revés, como unos hombres sorprendentemente "modernos" cuyas ideas podemos entender y compartir plenamente, porque nos interesan por las mismas razones por las que les interesaron a ellos; unos matemáticos, en fin, que aparecen ante nosotros como "unos colegas de otra universidad", en la bella y afortunada frase del matemático inglés G.H. Hardy (1877–1947).

Ciertamente hay que reconocer que el logro más importante de la matemática griega fue el de la invención del propio método matemático axiomático–deductivo, pero esta simple constatación pone "ipso facto" de relieve el hecho importante de que tal método no existió desde siempre, sino que fue inventado en un momento histórico y en un contexto claramente bien definidos.

No sólo la matemática prehelénica desconoció totalmente este método (y las razones para ello no son en absoluto casuales, como veremos), sino que tampoco la matemática griega más antigua utilizó el método axiomático, que se nos muestra, sin embargo, en una forma casi perfecta y tan familiar para nosotros en los **Elementos** de Euclides (ca.–300).

¿Por qué fue necesario cambiar de método, y cuál era el insatisfactorio método anterior?. La investigación histórica reciente ha permitido llegar a la conclusión de que la invención del método axiomático–deductivo, a comienzos de la segunda mitad del siglo V a.C., fue una respuesta (y una respuesta de urgencia) a algunos de los más graves problemas que planteó la que podemos llamar "primera crisis de fundamentos" de la historia de la matemática, crisis de proporciones excepcionales y multifacética que amenazó la existencia misma de la matemática "moderna" poco más de siglo y medio después de su nacimiento en las costas jónicas.

La gran crisis a la que nos referimos es la que provocó el descubrimiento de la existencia de segmentos inconmensurables hacia el 450 a.C., en círculos que desde antiguo se han relacionado con el pitagórico tardío Hipaso de Metaponto.

La historia que condujo a estos hechos es larga, a pesar de desarrollarse en un intervalo de tiempo tan corto, y nos exige dar algunos rodeos para poder contemplarlos desde una perspectiva histórica correcta y entenderlos en su verdadero significado.

Haciendo un breve inciso, es interesante hacer notar que los grandes historiadores de la matemática griega de finales del siglo XIX (como Heiberg, Tannery y otros), sorprendentemente no se plantearon el problema de explicar de una manera plausible el por qué la matemática griega se convirtió un buen día en una ciencia axiomático – deductiva. ¿Es que este hecho trascendental para la historia de la matemática no merecía que se le buscase una explicación históricamente verosímil?. A título de ejemplo, debo decir que hace algunos años podía oirse aún en nuestra universidad la peregrina explicación de que el método axiomático–deductivo había sido inventado por los griegos cuando la gran cantidad de resultados obtenidos había aconsejado "ordenarlos" de alguna manera, de donde provino la distinción entre "axiomas" y "teoremas", etc.(con grave desprecio de las más elementales leyes de "necesidad" y "economía" históricas).

Los orígenes remotos del proceso que va a conducir a la transformación de la matemática en una ciencia axiomático–deductiva hay que buscarlos en los mismísimos comienzos de la matemática griega y su peculiar carácter. Vamos a remontarnos pues a los días del viejo Tales para ser testigos del nacimiento de la matemática griega, es decir, de la "matemática moderna" y su diferenciación de la "matemática antigua" egipcia y babilónica.

2.– Los orígenes de la matemática griega. Ontología de los objetos matemáticos.

Como hemos apuntado ya en la introducción, en ninguno de los documentos de la matemática prehelénica que han llegado hasta nosotros se ha encontrado el menor rastro de la idea de demostración en el sentido preciso en que la utiliza Euclides [2] . La mayoría de los historiadores de la matemática han comentado este hecho, y algunos de ellos han intentado "favorecer" a la matemática egipcia o babilónica viendo algún tipo de "demostración" donde realmente no había ninguno. Y no podía haberlo. Lo cual no fue obstáculo para que esta matemática alcanzase un nivel técnico notablemente alto, como se sabe (piénsese en el álgebra babilónica y en la geometría egipcia).

Los largos viajes de Tales y más tarde de Pitágoras por Egipto y Mesopotamia les permitieron conocer a fondo esta matemática, la "matemática antigua", que para entonces, primera mitad del siglo VI a.C., llevaba más de mil años de anquilosamiento después de alcanzar su cenit. Sin embargo, a su regreso a Grecia ambos pensadores comienzan a desarrollar una matemática decepcionantemente elemental y ejemplarmente "inútil". ¿No es un hecho sorprendente que está pidiendo a gritos una explicación suficiente?.

Efectivamente, consideremos en primer lugar la obra que la tradición nos ha transmitido como debida a Tales mismo. Se trata de cinco "teoremas" puramente geométricos: a) "en cualquier círculo, todo diámetro lo divide en dos partes iguales"; b) "en cualquier triángulo isósceles los ángulos básicos son iguales"; c) "ángulos opuestos por el vértice son iguales"; d) "si dos triángulos tienen iguales dos lados, y los dos pares de ángulos adyacentes son también iguales, entonces los dos triángulos son iguales"; e) "todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto". Vale la pena destacar algunos aspectos de estos "teoremas", no por triviales menos importantes.

En primer lugar se trata de afirmaciones exactas y no del tipo aproximativo a que nos tenía acostumbrados la matemática prehelénica, que además **siguen siendo para nosotros, sin la menor modificación, teoremas de la matemática,** y lo serán ya para siempre, es decir, se trata de verdades firmemente establecidas sobre ciertos objetos matemáticos.

En segundo lugar, las afirmaciones en cuestión se refieren a geometría "pura" y "global". Pura porque nos hablan (por primera vez) de propiedades de las figuras geométricas "en sí"; la geometría egipcia y babilónica no había sido en realidad "geometría", sino un pretexto para la aritmética y el álgebra, "álgebra aplicada", puesto que allí las propiedades de las figuras se estudiaban "numéricamente", sobre sus "medidas inconscientemente de los problemas insolubles a que conduce este punto de vista (es importante hacer observar que el mismo Tales aún no podía imaginar estas dificultades, pero pronto aparecerían). Y son geometría "global", en el sentido moderno del término, porque se refieren a propiedades de una figura como un todo, "en grande", en oposición a las que se podrían referir a las propiedades "locales" o "en pequeño" de las figuras, como sería, por ejemplo, la que respondiese a la pregunta de "¿de qué están hechas las figuras geométricas, cuál es su "estructura fina" ?".

En tercer lugar, y tal como habíamos adelantado ya, se trata de propiedades matemáticas sumamente sencillas y completamente inútiles para las necesidades prácticas de la vida ordinaria, al menos la mayoría de ellas.

Y en cuarto y último lugar, sabemos por Proclo (410–485 d.C.) en su **Comentario al Primer Libro de los Elementos de Euclides** [3] , que Tales vino a "demostrar", en algún sentido, la validez universal de sus afirmaciones. Es inmediatamente evidente, sin embargo, que aquí el verbo demostrar no lo podemos entender en el mismo sentido que tiene en Euclides; ¿"demostrar" a partir de qué "axiomas" o "principios básicos"?, y desde luego un sistema de axiomas es elemento fundamental en la construcción de una teoría deductiva, como veremos. He aquí pues un interrogante de gran importancia que se plantea en los mismísimos umbrales de la matemática griega: ¿en qué sentido pudo "demostrar" o "justificar" Tales sus "teoremas", y más importante aún, por qué necesitaba "demostrarlos"?.

La respuesta a esta pregunta que vamos a presentar más adelante, exige entender previamente qué tipo de matemática radicalmente nuevo comenzaron a hacer los primeros matemáticos griegos, y para ello necesitamos un panorama un poco más completo de esta matemática griega primitiva que se desarrolló a lo largo de poco más de un siglo, desde el –600 aproximadamente hasta poco después del –500. Hemos mencionado ya a Tales, que es el primer matemático griego cuyo nombre nos es conocido, y ahora vamos a fijar nuestra atención brevemente en la obra matemática de los sucesores de Tales, los pitagóricos.

A primera vista la matemática pitagórica es muy distinta de la atribuída a Tales. Los descubrimientos de Tales eran todos ellos de geometría pura global, mientras que para los pitagóricos, siguiendo la afirmación de Pitágoras mismo, al parecer, de que "Todo es número", la matemática se convirtió en "aritmética" o "estudio de las propiedades de los números" Nunca antes ni después tuvieron tal importancia los números en la historia de la filosofía y de la matemática; y al reducirse la matemática a aritmética de manera tan estricta, la geometría quedó integrada a su vez dentro de la aritmética.

Ahora bien, si olvidamos por un momento esta diferencia básica entre la matemática que hace Tales y la que hacen los pitagóricos, y atendemos a los objetivos que persiguen ambos, nos encontramos con que son los mismos. En los dos casos lo que se trata es de averiguar propiedades intrínsecas verdaderas de unos objetos especiales: los objetos matemáticos, números o figuras geométricas. Conviene insistir y subrayar este carácter que marca a la matemática griega desde sus comienzos mismos, y que en cambio estaba totalmente ausente en la matemática prehelénica, egipcia o babilónica. Lo que tratan de conseguir tanto Tales como los pitagóricos es descubrir **propiedades necesariamente verdaderas** de los objetos matemáticos, **independientemente de su utilidad práctica** (más tarde se hará exclusión expresa de las propiedades utilitarias de la matemática, sorprendentemente).

La matemática griega más antigua es, pues, utilizando un nombre anacrónico para su época, pero preciso y exacto, "ontología de los objetos matemáticos", estudio de sus propiedades necesariamente verdaderas en tanto que entes de un cierto tipo.

Ya hicimos observar más arriba el carácter tan simple y elemental que tienen los teoremas geométricos de Tales, comparados con los resultados "conocidos" por los egipcips y babilonios, y lo mismo exactamente ocurre con las clasificaciones y propiedades numéricas descubiertas por los pitagóricos, si se comparan con la aritmética y el álgebra babilónicas. Y no menos sorprendente resulta el carácter "inútil" de todos esos "teoremas" (¡los griegos no se preocuparon ni siquiera de adoptar un sistema de númeración posicional, con sus grandes ventajas prácticas, como el que conocían los babilonios!).

Hoy día pueden encontrarse razones muy diversas para justificar la extravagante actividad de los matemáticos "puros" de dedicar su vida al estudio de las propiedades, en principio completamente inútiles, de unos objetos ideales, que "no son de este mundo", los objetos matemáticos, pero es muy probable que ninguna de estas razones pudiera aplicarse al momento mismo en que nace esta matemática, puesto que se trata de una actitud nueva e inédita, **sin historia previa.**

¿Cuál fue el motivo de que la matemática sufriese una transformación tan radical hacia el –600, precisamente al pasar de Egipto y Mesopotamia a Grecia, pasando de ser "instrumental" o utilitaria (en uno u otro sentido) a "pura"?. El cambio fue sin duda profundo y sorprendente, y la historia debe darnos una explicación verosímil del por qué. Ya no basta, para explicar este hecho, el clásico recurso a la curiosidad intelectual sin límites de los griegos, elemento sin duda existente y cuya importancia sería difícil negar, pero que nos resulta ya insuficiente.

La explicación que creemos correcta, y que vamos a resumir brevemente, es compleja en sus detalles, porque nos obliga a considerar el nacimiento de la matemática griega englobado en el fenómeno histórico más general y mucho más importante del nacimiento de la filosofía griega (para nosotros, de la filosofía sin más calificativos). Esto nos aclarará de paso la inevitable interdependencia entre filosofía y matemática desde sus orígenes comunes hasta Euclides por lo menos.

La crisis social griega de los siglos IX al VII a.C. dio lugar al bien conocido fenómeno histórico de las migraciones organizadas por las más importantes polis continentales y la consiguiente colonización griega de las costas del Mediterráneo y del mar Negro. De estas colonias algunas alcanzaron con rapidez un alto grado de desarrollo, especialmente las situadas en las costas jónicas, como Mileto.

Estas migraciones y colonizaciones supusieron (como tantas otras veces en la historia) unos cambios sociales bastante profundos y, lo que ahora nos interesa más, una ruptura con esquemas y sistemas de valores firmemente vigentes en la sociedad griega anterior, particularmente valores de tipo aristocrático y feudal (si se nos permite el término), como era el desprecio por la actividad comercial [4] . Las colonias jónicas desarrollaron, en cambio, un importante comercio entre la Grecia continental y las grandes civilizaciones de tipo cerrado del medio oriente, egipcia y mesopotámica. Estos comerciantes y viajeros, entre los que debió contarse a Tales mismo, tuvieron que conocer inevitablemente, a lo largo de sus frecuentes y dilatados viajes, las explicaciones sobre el mundo, su origen y su evolución, que cada uno de estos pueblos aceptaba implícitamente como verdaderas y que no se cuestionaban, explicaciones que venían formuladas en sus mitos.

Efectivamente, todos los pueblos han tenido su propio sistema de mitos o "creencias" sobre el mundo, y los griegos anteriores a Tales no eran una excepción, desde luego.

Ahora bien, estos primeros grandes viajeros griegos se debieron encontrar, con cierta sorpresa, con que los mitos asumidos por las distintas civilizaciones del medio oriente eran claramente incompatibles entre sí, se contradecían escandalosamente y, parece obvio, no todos ellos podían admitirse como verdaderos por ese mismo motivo. Los griegos contemporáneos de Tales debieron pensar en primer lugar: Bien, los mitos egipcios babilonios hebreos, etc. se contradicen entre sí y no pueden ser todos ellos verdaderos; no hay nada de qué extrañarse porque lo que en realidad ocurre es que todos son falsos, ya que son incompatibles con nuestras creencias, con los mitos griegos. Este planteamiento es muy natural, tanto que se ha repetido y se sigue repitiendo sin cesar a lo largo de la historia.

Pero en un cierto momento debió haber alguien que llevó el problema un poco más lejos: Si los mitos griegos, egipcios, babilónicos, hebreos, etc. se contradicen flagrantemente como explicaciones del mundo ¿por qué motivo los nuestros, los griegos, son los verdaderos, mientras que los demás son falsos?. Puestos a cuestionarlos todos, no se encuentra absolutamente ningún motivo para concluir que los mitos griegos son **los verdaderos necesariamente,** mientras que los demás son todos falsos. ¿No serán más bien **todos ellos** falsos, incluídos los nuestros, los griegos?.

Estos hechos que hemos resumido tan sumariamente debieron ocurrir a mediados del siglo VII a.C., y constituyen quizás la más importante "pérdida de creencias" [5] de toda la historia.

Esta crisis intelectual provocada por una pérdida de creencias tan sistemática constituye el punto de partida de la filosofía griega. En efecto, la primera consecuencia de tal crisis fue el descubrimiento de la idea de explicación **necesariamente verdadera,** en oposición a la de explicación **falsa** o **verdadera de manera accidental o contingente** (si se nos permite, de nuevo, el término), acerca del mundo, la estructura de lo real y sus orígenes.

No es fácil, sin embargo, poner en cuestión todo un sistema de creencias, y así la filosofía se inicia en Grecia apoyándose en una importante creencia o hipótesis de partida subconsciente: la de que el mundo real es inteligible para la mente humana. Se trata de una hipótesis fundamental e inevitable si ha de ser posible una filosofía en el sentido de búsqueda de la "verdad necesaria" acerca de lo real, sea ella la que sea. Pero no es la única hipótesis que hicieron los primeros pensadores griegos. Aristóteles nos dice que uno de los principales problemas que preocupó a estos primeros filósofos fue el del "movimiento". Para Aristóteles "movimiento" es sinónimo de "cambio", en el sentido más general del término. El mundo real se presenta en constante cambio, transformándose sin cesar. Si se observa la realidad, parece imposible encontrar algo que no cambie o **pueda cambiar** (de manera espontánea o forzada, eso es lo de menos). Pero aquí exactamente entra en escena la segunda gran hipótesis aceptada implícitamente por los primeros filósofos griegos (Heráclito vendrá a ser casi la única excepción, y aún esto es dudoso): En lo que cambia no puede residir la auténtica verdad, la verdad sin condiciones; si una hoja de un árbol pasa de ser verde a amarilla, el verde no es verdadero, porque **ha dejado de ser,** pero tampoco lo es el amarillo, que **antes no era.** La verdad debe residir en algo invariable que **subyace y se oculta tras las apariencias** todas ellas mudables. Parece, en efecto, imposible poder entender el cambio sin referirse a un hipotético soporte del cambio, él mismo inmutable (i y aún así es imposible, dirá más tarde Zenón!).

Resulta pues que lo real se nos manifiesta en apariencias cambiantes que nada tienen que ver con la verdad, verdad que reside en el transfondo inmutable que nos oculta por completo la realidad aparente. Pero las opiniones de los hombres se basan precisamente en las "apariencias", tomándolas por lo auténticamente real, y de ahí, como es natural, que esas "opiniones" sean casi siempre falsas. El filósofo tiene el objetivo, en cambio, de traspasar el mundo cambiante para "desvelar" la "realidad esencial".

Bien, pero ¿qué tiene que ver este problema inicial de la filosofía con la matemática, y más concretamente con la matemática griega primitiva?. Pues tiene probablemente mucho que ver, tanto que nos va a permitir dar una respuesta a la importantísima pregunta de por qué la matemática se transformó en el sentido en que lo hizo al pasar de Egipto y Mesopotamia a Grecia.

Ya hemos dicho que parece imposible encontrar en el mundo "real" algo inmutable, algo cuya "esencia" no venga oculta por apariencias engañosas. Pero los primeros pensadores griegos debieron hacer el importante descubrimiento de que habría que sustituir aquí la palabra "imposible" por "casi imposible", puesto que se encontraron, en efecto, con unos "objetos" muy especiales, no sometidos a cambio, inmutables, como eran los objetos matemáticos, números y figuras, que "utilizaban" egipcios y babilonios de manera primitiva, sin haber caído en la cuenta de esta sorprendente propiedad que tenían. Más tarde se irán descubriendo otros entes inmutables, y con Platón serán ya innumerables.

Los objetos matemáticos se presentaron así a los primeros filósofos griegos, como unos objetos especialísimos y excepcionalmente interesantes, porque en ellos (¿serían los únicos?) no se ocultaba su "ser" por un decorado de apariencias cambiantes (el cinco no puede ser más o menos cinco, ni mostrar cualidades, y lo mismo le pasa a un triángulo o un círculo) sino que "son" lo que "muestran ser", su verdadera esencia se ofrece directamente.

Después de estas consideraciones apenas es necesario insistir más en la explicación del por qué interesaron tanto los objetos matemáticos a hombres como Tales y Pitágoras, y por qué les interesaron desde el punto de vista que lo hicieron, tan ajeno a la utilidad práctica inmediata. El estudio de las propiedades necesariamente verdaderas de los objetos matemáticos, simples y transparentes, se mostraba mucho más sencillo que las del mundo real (que, no lo olvidemos, eran las auténtica y dramáticamente importantes), y podría constituir un "problema en miniatura" que nos enseñase y nos ayudase a abordar el otro, el importante "gran problema" del mundo real. Y los primeros filósofos griegos comienzan a hacer la "nueva matemática" que no es otra cosa que "ontología de los objetos matemáticos", como señalábamos más arriba.

Si volvemos a considerar ahora los franciscanos teoremas geométricos de Tales, de los que se hubieran burlado los escribas y sacerdotes egipcios y babilonios, es fácil entender ahora el orgullo que podía sentir Tales de sus descubrimientos. Es bien cierto que el hecho de que en **cualquier** círculo **cualquier** diámetro lo divida en dos partes iguales, es poco impresionante y completamente inútil, pero para Tales debía ser (como para nosotros) una **verdad necesaria y universal**, válida para siempre. No es poco para un momento en el que se presentaba por primera vez como absolutamente problemática la posibilidad misma de acceder a este tipo de verdades.

Y lo mismo que hemos dicho sobre los resultados geométricos de Tales, se podría decir sobre los "teoremas" numéricos de los pitagóricos.

La matemática nace pues indisolublemente unida a la filosofía.

Pero hay todavía algo muy importante que no hemos examinado. Se trata de la pregunta acerca de cómo podía estar seguro Tales de que sus afirmaciones eran verdaderas necesariamente, y lo mismo en el caso de los pitagóricos. A pesar de que los números y las figuras geométricas se mostrasen como objetos simples cuya naturaleza se manifestaba en lugar de ocultarse, lo cierto es que nada se da gratis.

De las palabras de Proclo podemos deducir que Tales "justificó" o "demostró", en algún sentido, que sus afirmaciones geométricas eran necesariamente verdaderas, pero, ya lo hemos hecho observar, tales "demostraciones" no podían serlo en el sentido en que las utiliza Euclides. En efecto, demostrar ¿a partir de qué "principios" o "axiomas"?, ¿y estos principios cómo se "demostrarían"?. Es evidente que si se acepta que Tales de alguna manera "demostró" que sus teoremas eran verdaderos, hay que aceptar también que para él la palabra "demostrar" debió tener un sentido muy distinto que en Euclides, que es ya el que tiene para nosotros.

Sobre este importante problema de la historia de la matemática griega han venido a arrojar mucha luz las investigaciones del filólogo húngaro Arpád Szabó [6], que vamos a resumir en pocas líneas.

El significado de las palabras cambia, de una manera más o menos rápida, a lo largo de la historia de los pueblos que las utilizan; el olvido de este hecho tan simple puede dar lugar a graves errores históricos. Szabó llamó la atención sobre el significado arcaico del término griego para "demostración", *δεικνυμι*, que aparece al final de todas las demostraciones de Euclides bajo la famosa y repetida frase *οπερ εδει δειξαι* = **quod erat demostrandum** = "que era lo que se trataba de demostrar". Para Euclides, lo sabemos bien, *δεικνυμι* es un término técnico que significa "exposición lógica". Pero el significado arcaico era el de "mostrar", "hacer ver", no de una manera intelectual y abstracta sino con los ojos, "hacer concretamente visualizable".

Aún en Platón, que, no hay que olvidarlo, está separado de Euclides por la inmensa influencia de Aristóteles, tenemos algunos buenos ejemplos de este sentido arcaico de "demostrar". El más conocido es el pasaje 82 b a 85 e del **Menon,** en el que Sócrates pide a un esclavo desconocedor de la matemática duplicar un cuadrado. Otro pasaje importante es el que aparece en el **Cratilo,** 430 e, donde se lee: *το δειξαι λεγω εις την των οφθαλμων αισθησιν καταστησαι* : "por **demostrar** entiendo el hecho de presentar a la percepción visual". No se puede ser más claro.

Por otra parte, se sabe que para los primeros pitagóricos la geometría no era aún un verdadero *μαθημα*, sino sólo *ιστοριη*, "lo que se ve".

En este sentido de "demostrar" resulta fácil reconstruir las "demostraciones" o "visualizaciones" de Tales que "obligaban a reconocer el carácter verdadero" de las afirmaciones en cuestión. La primera de ellas, la de que "en cualquier círculo, cualquier diámetro lo divide en dos partes iguales", puede visualizarse por medio de un sencillo experimento que consiste en girar el círculo media vuelta alrededor del diámetro para que cada semicírculo pase a ocupar exactamente la posición que ocupaba el otro.

Este tipo de "demostración" empírica o visual, "experimental", se adapta particularmente bien a los "teoremas" geométricos (recuérdese la denominación de la geometría que hemos mencionado más arriba), aunque utilice la idea de movimiento, cuyos peligros no tardarán en ponerse de manifiesto, como veremos, con Zenón, pero ¿y para los teoremas aritméticos de los pitagóricos?. Pues exactamente lo mismo, porque para los pitagóricos un número era una colección de "unidades" o "átomos", minúsculas esferas indivisibles, y así fácilmente visualizable. Consideremos, por ejemplo, uno de los más sencillos teoremas de la aritmética pitagórica, el que afirma que la suma de dos números impares **cualesquiera** es un número par. Un número par es aquél cuyas unidades pueden asociarse en parejas sin que sobre ni falte ninguna, mientras que un número impar es aquél en que cualquier emparejamiento entre sus unidades deja una de ellas sin pareja. Si consideramos dos números impares cualesquiera m y n, al emparejar sus unidades nos sobrará una en cada uno, y así, a la reunión de las unidades de m con las de n las podemos emparejar tri-

```
            m                       n
o o o o - - - - o o | ●  - - - ● ● ●
o o o o - - - - o | ● ●  - - - ● ● ●
```

vialmente conservando las parejas anteriores y formando otra nueva con las dos unidades sobrantes.

No cabe la menor duda de que el proceso visual que acabamos de describir nos "demuestra" de manera irrefutable que la afirmación en cuestión es verdadera, sorprendentemente **cualesquiera** que sean m y n, lo que encierra realmente una cantidad ilimitada de afirmaciones concretas. Dicho sea de paso, si comparamos los dos procesos de visualización que nos han llevado a "demostrar" el teorema geométrico de Tales y el aritmético de los pitagóricos, este segundo se nos presenta como **más convincente** incluso que el primero, lo cual no deja de ser una sorpresa dado que precisamente el primero era geométrico y el segundo aritmético. Uno de los motivos importantes para ello es que en el segundo "experimento" está ausente incluso la idea de movimiento que llevaba a superponer dos figuras. No va a ser casual ni mucho menos que los problemas graves se presenten en la geometría y no en la aritmética, aunque sea en otro contexto.

3.– La primera crisis de fundamentos de la matemática: el descubrimiento de los segmentos inconmensurables.

En la sección anterior hemos asistido al profundo cambio que experimentó la matemática al pasar de Egipto y Mesopotamia a Grecia, pasando a ser, de una manipulación instrumental de los objetos matemáticos a un estudio de sus propiedades necesariamente verdaderas, es decir, a una ontología de los objetos matemáticos. Este cambio es lo que nos ha hecho llamar a la matemática prehelénica "matemática antigua", mientras que la matemática griega es, ya desde sus orígenes, "matemática moderna".

También hemos descrito brevemente en qué consistió el método de investigación y de "demostración" o justificación de los resultados obtenidos. No se trataba, como cabía esperar, de ningún método especial adaptado a los objetos matemáticos, sino del mismo método empírico – visual utilizado para investigar las propiedades de los demás objetos de la realidad física (que, por cierto, para los pitagóricos se identificaban con los números mismos). Lo que confería a los resultados obtenidos el peculiar carácter de certeza, imposible de lograr sobre la realidad física cambiante, no era el método en sí, sino la simplicidad ontológica y la transparencia de los objetos matemáticos, motivo por el cual interesaron especialmente a los primeros filósofos y matemáticos griegos. Los números y las figuras geométricas tenían, de hecho, las propiedades que parecían tener, como se comprobaba por un simple proceso visual que encerraba un grado de certeza irrefutable.

O al menos así lo creyeron los griegos hasta que se produjo la primera gran crisis de los fundamentos de la matemática hacia mediados del siglo V a.C. Veamos cómo llegó la matemática a tal situación apenas siglo y medio después de sus comienzos.

La filosofía pitagórica se basaba en una teoría atómica según la cual todo objeto estaba formado por un cierto número de "átomos" o pequeñas esferas indivisibles. Esto condujo a Pitágoras a su afirmación de que **todo es número**, según la cual cada ente quedaba identificado con el número de átomos que contenía. Esta "aritmetización" tan radical de la realidad se extendió también, obviamente, a la geometría, puesto que toda figura geométrica estaba formada a su vez por una cierta colección de átomos o puntos extensos (no confundir con los puntos "inextensos" euclídeos). La relación entre "unidad" o átomo y "punto" venía expresada por la descripción dual: "una unidad es un punto desprovisto de posición, y un punto es una unidad dotada de posición".

Los pitagóricos desarrollaron una aritmética pura y una geometría aritmética, demostrando sus resultados por el método visual; vamos a fijarnos con un poco de detalle en su teoría de la medida de segmentos, dominio en el que se produjo el descubrimiento de los segmentos inconmensurables.

La teoría geométrica de los pitagóricos implicaba que dados dos segmentos AB y CD, siempre existía una unidad de medida lo suficientemente pequeña para que midiera exactamente a AB y a CD; efectivamente, si AB contiene m puntos y CD n puntos, entonces cualquier segmento cuyo número de puntos sea a la vez divisor de m y de n medirá a AB y a CD exactamente (y el mayor de todos será el que corresponda al máximo común divisor de m y n; en el peor de los casos, en que m y n sean primos entre sí, la única unidad de medida común se reducirá al segmento mínimo posible, el que sólo contiene un punto). Como hemos dicho antes, el hecho de que exista siempre la unidad de medida común es una consecuencia directa de la teoría pitagórica de la extensión geométrica, pero, independientemente de ella, se trata de una propiedad que se presenta como evidentemente verdadera para nuestra intuición inmediata de lo que es un segmento. El hecho de que no lo sea, sin embargo, va a dar lugar precisamente a graves problemas.

El proceso efectivo para hallar una unidad de medida común a dos segmentos dados a y b (la mayor de ellas, de hecho) era la versión geométrica del llamado más tarde "algoritmo de Euclides" para hallar el máximo común divisor de dos números m y n. A este proceso geométrico le llamaron los pitagóricos "antiphairesis" o "resta mutua", y consistía en llevar el menor de los dos segmentos, digamos el b, sobre el a tantas veces como fuera posible, el resto r_1 sobre b, el resto r_2 sobre r_1, etc., hasta llegar a un resto r_{n+1} nulo; entonces el segmento r_n es la (mayor) unidad de medida común a los segmentos a y b. El proceso siempre llega a un final, exactamente igual que al buscar el máximo común divisor de dos números, puesto que los sucesivos restos r_i van disminuyendo continuamente (por lo tanto, al menos en un punto).

Así pues, el problema de la medida de segmentos fue un problema trivial para la geometría pitagórica. De momento al menos. Y la solución de este problema condujo a una muy satisfactoria teoría numérica de la proporcionalidad de segmentos, definiendo en primer lugar la razón de un segmento AB a otro CD como

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}$$

si la mayor unidad de medida común a AB y CD cabe exactamente m veces en AB y n veces en CD; a partir de esta reducción de una razón geométrica a otra puramente numérica, se puede definir ya la proporcionalidad o igualdad de razones entre cuatro segmentos AB, CD, MN, y PQ,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$$

si y sólo si

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m}{n} = \frac{MN}{PQ}$$

Pero hacia mediados del siglo V a.C. se produjo en el seno de la escuela pitagórica un descubrimiento sensacional e inquietante, preñado de consecuencias, la primera de las cuales era el hundimiento irremediable de la teoría pitagórica atómica de la extensión geométrica. Nos referimos al descubrimiento de la existencia de parejas de segmentos inconmensurables (o lo que es lo mismo, de segmentos inconmensurables con cualquier segmento unidad dado de antemano). Una tradición persistente ha atribuído este descubrimiento al pitagórico Hipaso de Metaponto [7], y el anecdotario al respecto es bien conocido.

No sabemos con seguridad si el descubrimiento de los segmentos inconmensurables se produjo insospechadamente al tratar de determinar la razón de la diagonal de un cuadrado a su lado, es decir, al intentar encontrar la mayor unidad de medida común a ambos, o si tuvo lugar al abordar el mismo problema para la diagonal y el lado de un pentágono regular. Bien es verdad que el cuadrado es una figura geométrica más natural y más sencilla que el pentágono regular, y por lo tanto resulta algo muy normal el plantearse el problema de comparar su diagonal con su lado, pero lo cierto es que para los pitagóricos el pentágono regular, con la estrella de cinco puntas formada por sus cinco diagonales, constituía una figura que les interesó tanto que vino a ser una especie de símbolo de la escuela, por lo que resulta también lo más natural que antes o después se planteara el problema de hallar la razón de su diagonal a su lado. Todo esto, unido al hecho de que el proceso que vamos a describir es sensiblemente más sencillo matemáticamente hablando en el caso de la diagonal y el lado del pentágono que en el de la diagonal y el lado del cuadrado (utilizándose para el pentágono simples propiedades de simetría de la figura), todo ello parece inclinar la balanza de las probabilidades a favor de la hipótesis de que el descubrimiento de los segmentos inconmensurables se debió producir al tratar de hallar la razón de la diagonal al lado en un pentágono regular.

Para ello, como hemos visto, se ha de aplicar el algoritmo de "antiphairesis" a la pareja de segmentos dados, diagonal y lado del pentágono regular. No vamos a entrar en los detalles, que puede reconstruir fácilmente el lecot, pero al cabo de tres etapas de la antiphairesis se nos repite el proceso, aplicado esta vez no al pentágono inicial, sino al pentágono también regular (por razones de simetrías) más pequeño que forman al cortarse entre sí las cinco diagonales del primero. ¿Qué ocurrirá pues al cabo de otras tres etapas del proceso de antiphairesis?, pues evidentemente que nos volveremos a encontrar con la situación inicial pero aplicada ahora al pentágono regular más pequeño aún formado al cortarse las diagonales del anterior. Y así sucesivamente.

Hipaso no tuvo más remedio que darse cuenta, que "ver" con toda claridad y con la sorpresa que hoy a nosotros no nos es fácil imaginar, que el proceso de antiphairesis aplicado a la diagonal y al lado de un pentágono regular no se terminaría nunca, es decir, que sería indefinidamente largo, puesto que cada etapa tendría otra posterior, ya que a la sucesión de pentágonos regulares que se van formando "no se le ve fin". Vale la pena subrayar la gran claridad con que se nos presenta el hecho de que el proceso de antiphairesis va a ser interminable, a pesar de que en realidad no hemos recorrido una a una **todas** sus etapas para **comprobarlo de manera efectiva,** cosa obviamente imposible por el carácter mismo de interminable. Quede esta observación, ciertamente sorprendente, aparcada hasta más adelante.

¿Cuál era la situación, pues?. Si dos segmentos admiten una unidad de medida (o, como decimos nosotros hoy, si son conmensurables, lo cual "sabían" los pitagóricos que le ocurría a todos) entonces su antiphairesis se termina, es limitada. Se han descubierto dos segmentos, diagonal y lado del pentágono (o del cuadrado) cuya antiphairesis se muestra claramente interminable, luego tales dos segmentos no pueden ser conmensurables, **no admiten ninguna unidad de medida que los mida a la vez a los dos exactamente,** por pequeña que ella sea (se dice pronto).

Más o menos así debió producirse el descubrimiento de los segmentos inconmensurables en la matemátiga griega de mediados del siglo V a.C. Pero ¿cuáles fueron las graves consecuencias de este descubrimiento y por qué lo fueron tanto como para provocar una verdadera crisis de los fundamentos de la matemática de la época?.

No es este el lugar oportuno para hacer un análisis detallado de estas consecuencias, dado que lo que aquí nos interesa principalmente es sólo una de ellas, pero permítasenos enumerar algunas de las más importantes.

En primer lugar, la teoría atómica pitagórica de la extensión geométrica era insostenible, puesto que implicaba la conmensurabilidad de todos los segmentos sin excepción.

En segundo lugar, la geometría **no es** aritmética. Dada una unidad de longitud cualquiera, hay segmentos (infinidad de ellos, como se irá viendo) que no tienen longitud numérica, que su "longitud" cualitativa e intuitiva no se puede expresar por medio de números.

En tercer lugar, como es fácil "ver", los sucesivos restos de una antiphairesis indefinida no sólo van disminuyendo sino que llegan a hacerse menores que cualquier segmento dado (si se acepta, desde luego, el llamado "principio de Eudoxo–Arquímedes" [8]), de lo que se deduce inmediatamente la propiedad de la divisibilidad indefinida de un segmento: todo segmento, por pequeño que sea, es divisible en partes más pequeñas. Este hecho excepcionalmente importante contradice de nuevo la estructura atómica de la extensión, pero eso ya lo cuestionaba la primera consecuencia. Lo nuevo y más grave ahora es que si nos preguntamos de qué está hecho un segmento e intentamos averiguarlo descomponiéndolo en partes con la intención de llegar a los elementos últimos e indivisibles de los que está formado, nos encontramos con la sorpresa de que no hay tales elementos, el análisis por división del segmento proseguirá interminablemente (¡una vez más!) y no encontraremos nada. El segmento se nos diluye en nada entre las manos. Pero, ¿tiene esto sentido? **¿de qué** está formada la extensión geométrica, el "continuo"?. Siglo y medio más tarde Euclides aceptará el absurdo principio de que un segmento esté formado por una colección de puntos "inextensos", pero ¿cómo es posible obtener la extensión espacial por acumulación de elementos inextensos?.

En cuarto y último lugar, la consecuencia que más nos interesa ahora de la existencia de segmentos inconmensurables. Ya insistimos más arriba en que el carácter inmutable de los objetos matemáticos los presentaba ante los griegos como unos objetos de una simplicidad ontológica incomparable con la de los demás objetos del mundo real, y así transparentes a la intuición inmediata. Las propiedades que estos objetos mostraban a la intuición inmediata como verdaderas, lo eran necesariamente, y su "demostración" o justificación consistía simplemente en ir a los objetos mismos y revelarlas, "hacerlas visibles".

El descubrimiento de los inconmensurables mostró por vez primera que este idílico panorama no lo era tanto. Los objetos matemáticos no eran tan simples como se había pensado, o al menos la extensión geométrica no lo era (los números en cambio no presentaban problemas), puesto que propiedades que parecían a la intuición claramente verdaderas, como la de que dos segmentos siempre admiten una unidad de medida común, se **comprobaban** (claramente también) **falsas,** aunque no, claro está, por intuición inmediata sino por procedimientos indirectos.

Gran sorpresa. Incluso los simples objetos matemáticos se nos muestran engañosos. Entre sus propiedades hay algunas que parecen evidentemente verdaderas y son sin embargo falsas. ¿Quién podría confiar en adelante en las propiedades de estos objetos matemáticos que la intuición directa nos muestre como evidentemente verdaderas?. El viejo método "empírico—visual" iniciado por Tales se tambaleaba y mostraba sus debilidades. El examen directo de los objetos matemáticos ya no podía aceptarse como garantía de verdad. Todo un método matemático debía ser modificado o abandonado y sustituído por otro que ofreciera la seguridad de alcanzar, con su ayuda, propiedades verdaderas.

Puede ser útil llamar la atención sobre el hecho de que las dificultades surgieran, no sin cierta ironía, en el dominio de la geometría, aunque no en la geometría "global" de Tales sino en la "local" o "en pequeño", que tiene que ver con la "estructura fina del continuo".

4.— El continuo no es un ente simple. El nuevo método matemático axiomático — deductivo.

Hemos visto cómo el problema de la medida de segmentos llevó a los matemáticos pitagóricos a una serie de descubrimientos de una importancia teórica excepcional (aunque, eso sí, de una relevancia práctica o "ingenieril" nula), descubrimientos que plantearon algunos de los interrogantes que la matemática aún no ha logrado responder satisfactoriamente hasta hoy.

Uno de estos problemas era el que cuestionaba la seguridad misma del método seguido para demostrar que los resultados obtenidos eran verdaderos recurriendo a la intuición inmediata de los objetos matemáticos, "haciendo ver", "mostrando empíricamente" que tales resultados eran verdaderos necesariamente. La aparición de propiedades del continuo geométrico aparentemente verdaderas pero realmente falsas, hizo imposible mantener como seguro por más tiempo el método "empírico–visual" utilizado con éxito hasta entonces.

Haciendo un breve paréntesis, es interesante subrayar aquí el hecho de que estos descubrimientos y los problemas que plantearon sólo fueron posibles debido al giro nuevo que adoptó la matemática en Grecia al hacerse ontología de los objetos matemáticos. Una matemática instrumental como la egipcia o la babilónica, por mucho que consiguiese avanzar en conocimientos, nunca habría llegado a plantearse estos problemas de fundamentos.

Bien, en cualquier caso, el continuo geométrico había mostrado no ser el ente simple y transparente a la intuición que se suponía ser. La intuición directa que permitía "poner en evidencia", "visualizar" las propiedades verdaderas de las figuras geométricas resultaba ahora sospechosa, y quedaba puesta en duda sistemáticamente sin remedio. Si la matemática debía poder avanzar con seguridad, era urgente inventar un nuevo método que garantizase que los resultados obtenidos eran verdaderos, lo parecieran o no.

En algún momento de comienzos de la segunda mitad del siglo V. a.C. hubo un grupo de matemáticos griegos cuyos nombres no conocemos, que pusieron a punto efectivamente un nuevo método matemático, tan perfecto y eficaz que sigue siendo el nuestro dos milenios y medio más tarde, como dice el párrafo de Bourbaki que hemos reproducido al comienzo. Se trata, naturalmente, del método axiomático–deductivo.

Aproximadamente un siglo y medio después de sus comienzos, el método axiomático–deductivo había alcanzado ya el alto nivel de desarrollo que conocemos por los **Elementos** de Euclides, pero desgraciadamente carecemos de noticias sobre su evolución durante este periodo. Se sabe que hubo otros **Elementos** anteriores a los de Euclides, entre ellos unos debidos a Hipócrates de Chios, escritos hacia el 430 a.C. y en los que probablemente se exponía ya la geometría de una manera axiomática, pero esta obra que sería tan importante para conocer la evolución y desarrollo del método axiomático durante su primera época, se ha perdido.

Todo lo que podemos hacer es pues intentar reconstruir de la mejor manera posible lo que debió ocurrir como resultado de la crisis provocada por el descubrimiento de los inconmensurables.

Dado que el análisis directo de los objetos matemáticos por la intuición ya no era fiable, los matemáticos se vieron inclinados a prescindir de dicha intuición, a "olvidarse" de los objetos matemáticos mismos. Pero ¿cómo sería posible esto sin renunciar al mismo tiempo al objetivo principal de la matemática de investigar y descubrir (como se pueda) las propiedades verdaderas de dichos objetos?. A primera vista parece decididamente absurdo intentar averiguar propiedades de ciertos objetos "olvidándonos" precisamente de ellos, retirándolos de nuestra vista.

Sin embargo, la idea central de estos matemáticos no era absurda. Si pudiéramos ir obteniendo las propiedades que nos interesan descomponiendo el proceso a seguir en etapas sucesivas muy simples, de manera que tales propiedades viniesen en **cadenas** de afirmaciones, y si estas sucesiones o cadenas se pudieran prolongar añadiendo a continuación de la última de la cadena A_i otra afirmación A_{i+1} cada vez, con la única condición (pero,

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_i \\ A_{i+1} \end{array} \right.$$

eso sí, ésta esencial) de que **la afirmación A_{i+1} fuera verdadera con toda seguridad y de manera automática en el dominio de objetos que estamos estudiando siempre que lo fueran todas las anteriores a ella en la sucesión** (y no en absoluto por su constatación directa por la intuición sobre los objetos mismos), entonces, si esto fuera posible hacerlo, automáticamente sabríamos que **cualquier afirmación que figurase en la cadena sería verdadera necesariamente** en nuestra estructura de objetos matemáticos, **parezca verdadera o parezca falsa a la intuición** de estos objetos.

Formulada la idea central de este proceso, queda por ver su posibilidad de realización concreta (los matemáticos saben muy bien que no basta dar una descripción precisa de un objeto para que tal objeto exista). Analicemos con más detalle algunos aspectos de esta idea que han quedado implícitos en su formulación simplificada anterior.

En primer lugar, toda cadena de afirmaciones (a) de este tipo debe comenzar por una afirmación concreta A_1; no tendría ningún sentido **construir** una de estas cadenas que se remontase hacia arriba **ad infinitum.** Ahora bien, no olvidemos la única condición que hemos impuesto a **todas** las afirmaciones que figuren en una de estas cadenas, la de ser verdadera necesariamente y de manera automática si lo son todas las anteriores a ella, es decir, que su carácter verdadero debe heredarlo de manera necesaria del de las anteriorres a ella. Pero es claro que las afirmaciones que preceden a A_1 en la cadena son todas ellas verdaderas en nuestro sistema de objetos, puesto que no hay ninguna. Así pues, la afirmación A_1 debe ser verdadera con seguridad, pero su carácter verdadero no lo puede heredar de ninguna anterior,tiene que ser verdadera de manera autónoma e independiente;

(b) A_1

es evidente, por lo tanto, que el carácter verdadero de A_1 sólo lo puede garantizar (hasta donde pueda) el análisis directo de los objetos a los que se refiere por nuestra intuición. No hay otra posibilidad. Y es obvio, al mismo tiempo, que tales afirmaciones verdaderas por sí mismas, de manera absoluta, son indispensables para comenzar la construcción de las cadenas que nos interesan . Los griegos las llamaron **axiomas** o **postulados**, y se ve fácilmente que se pueden incluir en cualquier lugar de la cadena sin alterar la condición fundamental que debía cumplir, por ser verdaderas de forma autónoma.

Ya sabemos cómo debe comenzar una de nuestras cadenas (b). Fijémonos ahora en el segundo aspecto: el de la posibilidad de prolongarlas respetando la condición fundamental ¿será posible tal prolongación, al menos en determinados casos?. Un ejemplo sencillo nos permitirá mostrar que tales prolongaciones son efectivamente posibles.

(c)

A_1

no C

si B entonces C y D

Au

Supongamos que tenemos la cadena (c) de longitud n. Es inmediato que si cumple la condición fundamental entonces la podemos prolongar una etapa más añadiendo a continuación de la afirmación A_n la "no B". En efecto, "no B" será automática y necesariamente verdadera si lo son todas las A_1 , - - - - , A_n (en realidad sólo depende de las "no C" y "si B entonces C y D").

A las leyes que rigen las formas correctas de prolongar estas cadenas se les llamó más tarde "leyes lógicas" o "reglas deductivas", y a su estudio "lógica". Los antiguos griegos prestaron poca atención a estas reglas deductivas, es decir, al problema de cuáles son, cuántas son estrictamente necesarias y cuáles en cambio pueden reducirse a otras básicas, etc. Aristóteles estudió en su **Organon** algunas de ellas particularmente sencillas, como los "silogismos", pero los matemáticos iban a confiar durante siglos en su buen criterio únicamente, para decidir si una regla deductiva era correcta y se podía aplicar o no. La lógica matemática moderna ha hecho, en cambio, un estudio sistemático de estas leyes durante los últimos cien años.

Hay un aspecto de las leyes deductivas que merece destacarse. Volviendo al esquema (c), ya dijimos que la cadena A_1 - - - - A_n podía prolongarse con la afirmación "no B" puesto que sería automáticamente verdadera si lo son todas las anteriores a ella, cosa que suponemos. Sabemos pues que "no B" es verdadera, pero no tenemos la menor idea de lo que dice ¿no es sorprendente?. Quizás no tanto, puesto que hemos supuesto que, entre otras, "no C" y "si B entonces C y D" eran verdaderas; pero lo cierto es que tampoco sabemos qué dicen éstas. Ciertamente el carácter verdadero o falso de una afirmación depende de lo que afirma, de su contenido semántico, pero lo que observamos en una regla deductiva correcta como la que estamos considerando (aunque el hecho es completamente general), es que el carácter verdadero de la "conclusión" lo hereda de la o las "premisas" por su "forma" y no por su contenido significativo. Las leyes o reglas deductivas tienen pues un carácter **formal.**

A las cadenas de afirmaciones sobre un sistema de objetos matemáticos que comienzan por "axiomas" o "postulados" y proceden por aplicaciones sucesivas de "leyes deductivas" correctas, las llamaron los griegos "demostraciones", esta vez en un sentido técnico y matemático y no en el sentido general y empírico arcaico que vimos anteriormente. Y a la afirmación final de una demostración le llamaron "teorema". Así pues, si para una afirmación dada conocemos una demostración correcta, es decir si es un teorema, entonces podemos tener la seguridad de que tal afirmación es verdadera. Todos los teoremas son verdaderos.

Ante esta situación puede plantearse un interrogante muy natural: recíprocamente, ¿toda propiedad verdadera será un teorema, es decir admitirá una demostración?. Se trata, como decimos, de una pregunta muy natural, y por ello no deja de sorprender el hecho de que ni los griegos ni los matemáticos posteriores se la plantearan durante siglos. De nuevo ha sido la lógica matemática moderna la que ha estudiado a fondo el problema, y los famosos teoremas de Gödel contienen parte de la respuesta. Naturalmente, qué propiedades sean demostrables dependerá de qué axiomas hayamos elegido, de manera que el planteamiento correcto de la situación debe ser: Dado un sistema de objetos matemáticos ¿será posible encontrar un sistema "razonable" de axiomas (todos ellos verdaderos en dicho sistema) de tal manera que todas las propiedades verdaderas de esos objetos, formulables en el lenguaje que estamos utilizando, sean demostrables?. Hemos añadido a la colección de los axiomas el calificativo entrecomillado de "razonable" para excluir las respuestas triviales y sin interés. Bastaría tomar, en efecto, como sistema de axiomas la colección de todas las propiedades verdaderas de los objetos en cuestión, formulables en nuestro lenguaje, para tener una respuesta afirmativa a esta pregunta, pero ¡evidentemente tal sistema de axiomas estaría muy lejos de ser "razonable", en general !.

En Euclides podemos ver los axiomas de la geometría clasificados en dos grupos: los primeros o "postulados" son los axiomas propiamente geométricos, mientras que los segundos o "nociones comunes" son axiomas de validez universal o aplicables a todas las teorías. Esta distinción se debe a Aristóteles, y corresponde a lo que se denomina respectivamente "sistema de axiomas no lógicos" y "sistema de axiomas lógicos" en una teoría matemática axiomatizada formalmente, en nuestros días.

5.– Las aporías de Zenón y el método de demostración indirecta.

En nuestra reconstrucción del descubrimiento de los segmentos inconmensurables había un aspecto importante que dejamos aparcado y que ahora tenemos que examinar.

Recuérdese que nos hemos referido siempre al "descubrimiento" de los inconmensurables por los pitagóricos,y no a la "demostración" de la existencia de segmentos inconmensurables por los pitagóricos. La elección de la terminología no ha sido casual, ya que la diferencia es importante. Efectivamente los pitagóricos "descubrieron" (para su mal) que hay parejas de segmentos inconmensurables, pero fueron, en principio, incapaces de "demostrarlo". El lector puede estar pensando, pero ¿qué desatino es éste?. No, no es ningún desatino. Volvamos a Hipaso y su aparentemente inocente problema de hallar la razón de la diagonal del pentágono regular al lado o, si se prefiere, de hallar una unidad de medida común a estos dos segmentos. El método standard era el de aplicarles el algoritmo de "antiphairesis"; una vez terminado este proceso, bastaba tomar el segmento último resto y esa sería la mayor unidad de medida común. ¿Con qué sorpresa inesperada se encontró Hipaso?. Pues con la de "descubrir", de "ver" con toda claridad que el proceso de "antiphairesis" no se iba a terminar nunca, que iba a resultar "indefinidamente largo", y ya vimos cómo ésto se hacía evidente. Ahora bien, el mismo carácter "interminable" del proceso hacía esencialmente imposible "comprobar de manera efectiva" que lo era, en el sentido de recorrer **todas** sus etapas de principio a fin. Dicho de otra manera, Hipaso podía "visualizar" con gran claridad que el proceso iba a resultar interminable por repetirse, pero ¿no podía quedar un pequeño, pequeñísimo resquicio de duda acerca de lo que podía ocurrir al cabo de realmente **muchas** etapas, puesto que a ellas nunca se había llegado?.

Recuérdese que para Hipaso y sus contemporáneos, como antes para Tales, una "demostración" era un proceso, con "comienzo" y "final" bien determinados y con un cierto número limitado de etapas, a través del cual se conseguía "hacer ver" que la propiedad en cuestión era verdadera. Es claro que el proceso interminable de "antiphairesis" descubierto por Hipaso estaba muy lejos de constituir una "demostración" **comme il faut.** El asunto era serio, incluso muy serio, y eso hacía aún más necesario el disponer de una verdadera demostración; ¿cómo podría "cerrarse" un proceso esencialmente ilimitado?.

Este no fue el único caso, aunque sí probablemente el más importante, en el que los griegos se encontraron con procesos interminables.

La solución provino de los adversarios filosóficos de los pitagóricos, los pensadores eleáticos, y en particular y de manera directa de Zenón, el discípulo de Parménides.

Los eleáticos se oponían a la **multiplicidad** de lo real que implicaba el atomismo pitagórico, defendiendo en cambio la **radical unidad e indivisibilidad del ser.** Zenón ideó una serie de "argumentos" en defensa de las teorías de su maestro y presumiblemente para atacar las de los pitagóricos.

Entre estas "aporías" o "dificultades" que presenta la idea del continuo y la posibilidad misma del cambio, problemas que siguen tan abiertos hoy como cuando las formuló Zenón (a pesar de los innumerables intentos de solución o refutación) [9], entre ellas, como decimos, están las cuatro famosas "sobre el movimiento". De estos argumentos sólo nos interesa aquí y ahora digamos su "estructura lógica", que van a aprender y aplicar los pitagóricos.

Aristóteles nos dice que Zenón fue el padre de la "dialéctica". Y ¿cuál es el método de razonamiento típico de la dialéctica?. Pues el que se ha llamado más tarde "método indirecto" o "método de reducción al absurdo". Hoy es un método bien conocido por todo matemático, extraordinariamente potente pero "no constructivo" (más bien "destructivo"). Consiste en aceptar de manera provisional la hipótesis "A" de un teórico adversario para, razonando a partir de ella, llegar a una contradicción "B y no B", con lo que se considera refutada "A", pues si "A" fuera verdadera tendría que serlo necesariamente "B y no B", lo cual es imposible ("no tiene lugar", *ατοπου* decían los griegos); con ello se considera demostrado "no A".

El "método de demostración indirecta" presenta un aspecto muy peculiar y sorprendente si se analiza un poco en detalle. Podría decirse incluso que mediante él se pretende "demostrar" una cosa sin ni siquiera hablar de ella; ¿no es extraño?. Efectivamente, se asegura que se va a demostrar "A"; se pide al interlocutor que permita suponer "no A" (lo cual parece el mejor truco para no hablar de A); se razona impecablemente (sin mencionar nunca "A"); se obtiene una contradicción "B y no B" y, de pronto, la sorpresa, se ha demostrado "A". Evidentemente se ha "refutado" "no A", pero ¿se ha "demostrado" A?. Presumiblemente Tales y sus discípulos no hubieran aceptado tal razonamiento no constructivo; si se ha de "demostrar" A pues hay que coger A y demostrarla, y no hay más.

En cualquier caso, los matemáticos contemporáneos de Zenón advirtieron perfectamente la gran potencia del que se llamó en adelante "método de demostración indirecta". Y algo especialmente importante; este método permitía "cerrar" al fin los procesos interminables o indefinidamente largos y reducirlos a demostraciones aceptables en un número limitado de etapas, con su comienzo y su final. Un ejemplo clásico y muy conocido es la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal d y el lado l del cuadrado que nos transmite Aristóteles. ¿Comienza Aristóteles por la vía directa a hacer la "antiphairesis" de d y l ?. No, sino que dice "supongamos que D y l son conmensurables" y sea su razón

$$\frac{d}{l} = \frac{m}{n}$$

entonces una simple aplicación del teorema de Pitágoras y de un par de propiedades elementales de los números le conduce directamente a la contradicción de que m y n han de ser a la vez pares e impares, con lo que el método de demostración indirecta le permite terminar el proceso con la afirmación de que ha quedado demostrado que d y l son inconmensurables.

6.– Las tendencias "antivisuales", ya en Euclides.

El nuevo método axiomático–deductivo debió extenderse con rapidez entre los matemáticos griegos. Ya hemos dicho que los **Elementos** perdidos que se atribuyen a Hipócrates de Chios, probablemente eran ya una exposición axiomática de la geometría.

Sin embargo, cuando nos llega al fin una obra expuesta axiomáticamente, ésta es tan elaborada y sistemática, con un aspecto tan "moderno" como son los **Elementos** de Euclides, fuertemente influenciados por la teoría de la ciencia aristotélica, que nos hace pensar en un intenso desarrollo del método a lo largo de casi siglo y medio, y del que sólo conocemos con seguridad el final.

El desarrollo debió ser, en efecto, tan rápido, que en Euclides se manifiestan ya algunas de las "perversiones" de dicho método axiomático (¡tan moderno es el viejo Euclides!). Valdría la pena, para terminar, comentar brevemente lo que Szabó ha llamado "las tendencias antivisuales y anti-ilustrativas en Euclides".

Recuérdese una vez más que el problema central que motivó la transformación del método matemático de "empírico" y "visual" a "axiomático", fue un problema geométrico, el de la medida y proporcionalidad de segmentos, que llevó al descubrimiento de la existencia de segmentos inconmensurables. Resultado de ello fue que nuestra intuición de las figuras geométricas (sobre todo "en pequeño") era poco fiable; la extensión geométrica se mostraba engañosa y se hizo necesario un nuevo método más seguro para su estudio. Ahora bien, en el dominio de los números, en la aritmética, no se produjo nada parecido. Los problemas de "estructura fina" no tuvieron lugar. Parece evidente que quien contemple un conjunto de siete elementos tiene una intuición perfecta y clara del número siete, sin posibilidades de sorpresas.

De hecho, a lo largo de la historia global de la matemática se puede constatar que, mientras la geometría ha sido tradicionalmente el ejemplo prototípico de teoría axiomática que se remontaba a Euclides, la gran teoría de números (nada menos que la reina de la matemática para Gauss) ha sido el ejemplo de teoría matemática "anarquista" y "selvática" **no axiomatizada,** y no por ello, desde luego, menos **rigurosa** ni mucho menos. Simplemente **no fue necesario** axiomatizarla, porque la estructura ontológica de los números sí es simple y transparente a la intuición (**esta vez sí**). Conviene recordar que la primera axiomatización de los números naturales, la de Peano, hace más o menos un siglo, no se llevó a cabo por necesidades de la teoría de números (que siguió pasando sin ella) sino de la sofisticada y elaborada teoría de los números reales, que es la última violencia "aritmética", hasta la fecha, que ha sufrido la teoría del "continuo".

Pero volvamos, volvamos a Euclides. El panorama es aquí bastante diferente. La constatación irremediable de que los números eran incapaces de dar cuenta de la extensión geométrica, mientras que la extensión sí podía dar cuenta de los números (elegido un segmento u como unidad de medida, todo número S puede representarse por el segmento $Su = u+u+\overbrace{\cdots}^{S}+u$), condujo a una "geometrización" sistemática e innecesaria de toda la matemática. Los números serían ahora ciertos segmentos especiales. Pero ¿por qué representar lo simple por lo complejo (por lo **muy** complejo) ?.

En Euclides el "fervor" axiomático (muy explicable, sin duda) le lleva a sustituir "demostraciones" aritméticas de tipo "visual", que serían, sin embargo, totalmente irrefutables y seguras, por demostraciones "geométricas" no solamente no visualizables, sino premeditadamente "antivisuales". Dejamos al lector con un interesante ejercicio:

En el Libro VII de los **Elementos** aparece la Proposición 31 siguiente: "A todo número compuesto lo mide (es decir, lo divide) un número primo". Utilizando la imagen "visual" pitagórica de número como colección de unidades es fácil dar una demostración de este teorema (hágase detalladamente). Véase **después** la demostración dada por Euclides, en la que el punto clave se oculta "maliciosamente" representando los números por segmentos. Irónicamente, para segmentos en general el teorema es palmariamente falso, si se trata de entenderlo en el sentido "numérico".

Desgraciadamente, lo que en Euclides es aún comprensible y justificable en cierto sentido, se sigue practicando hoy sin justificación posible en muchos casos.

BIBLIOGRAFIA

1. NICOLAS BOURBAKI, **Théorie des Ensembles,** Introduction.
2. C.B. BOYER, **A History of Mathematics** (New York, 1968), pág. 44.
3. G.R. MORROW, **Proclus: A Commentary on the first Book of Euclid's Elements** (Princeton, 1970). Véase especialmente la pág. 52.
4. Véase un ejemplo especialmente revelador en el Canto VIII de la **Odisea.**
5. J. ORTEGA Y GASSET, **Ideas y Creencias** (Madrid, 1960).
6. Véase, principalmente, su artículo **The Transformation of Mathematics into Deductive Science and the Beginnings of its Foundation on Definitions and Axioms,** en Scripta Mathematica, vol. XXVII (1964) págs. 27–48 y 113–139. Véase también su libro **The Beginnings of Greek Mathematics** (Dordrecht, 1977).
7. K.VON FRITZ, **The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum,** Annals of Mathematics, 46 (1945), págs. 242–264.
8. Véase Euclides, **The Elements,** Libro X, proposición I. (New York, 1956).
9. Véase W.C. SALMON, **Zeno's Paradoxes,** (New York, 1970).