LOS PITAGORICOS

MIGUEL DE GUZMAN OZAMIZ *

ORIGENES DEL PITAGORISMO

El nacimiento y la pervivencia del pitagorismo es uno de los fenómenos más interesantes en la historia de la ciencia y de la cultura en general. Surgió, se desarrolló y se expandió como un modo de vida religioso. Su armazón intelectual consistió en una visión del universo como un **cosmos**, en contraposición al **caos**, es decir como un todo ordenado y organizado de acuerdo con leyes asequibles a la razón humana. El mismo impulso religioso conducía hacia la búsqueda y contemplación de la armonía intelectual implantada en este universo como paradigma de conducta humana y como camino y método de elevación espiritual, en búsqueda de las **raíces** y **fuentes** de la naturaleza.

En nuestra cultura actual, fuertemente impregnada por el espíritu científico, que acepta esta cosmovisión de fondo como base implícita e indiscutida, transmitida en sus líneas generales a través de los siglos desde las mismas raíces pitagóricas, el brillo de la idea fundamental de la racionalidad del universo se nos presenta apagado y desgastado por la costumbre. La armonía de las esferas no es para nosotros más que el constante ruido de fondo que escuchamos en nuestro quehacer racional.

Pero el mundo del siglo VI en que a Pitágoras le tocó vivir era muy distinto. Las invasiones persas habían aproximado hacia los griegos las milenarias culturas orientales con su abigarrado espíritu religioso y su actitud mística y contemplativa, que originaban una especial forma de racionalidad. El espíritu religioso oriental no buscaba, ni busca, su camino hacia la comunión con lo divino a través de la contemplación racional del universo, sino más bien mediante la negación de la búsqueda misma de la razón, hacia formas de comunicación en zonas más internas del espíritu. Pero junto con esta vena mística del espíritu, la cultura oriental había realizado admirables conquistas de la razón, plasmadas, por ejemplo, en los desarrollos astronómicos y aritméticos de los babilonios más de un milenio antes de que Pitágoras naciese. Tal vez una de las razones profundas del hondo enraizamiento del movimiento pitagórico en la cultura griega y en su heredera la cultura occidental en que hoy vivimos, consistió en el acierto de Pitágoras para unificar ambas tendencias, racional y contemplativo-religiosa, al dar forma a lo que llegó a ser, mucho más que una escuela de pensamiento, **una forma de vida.**

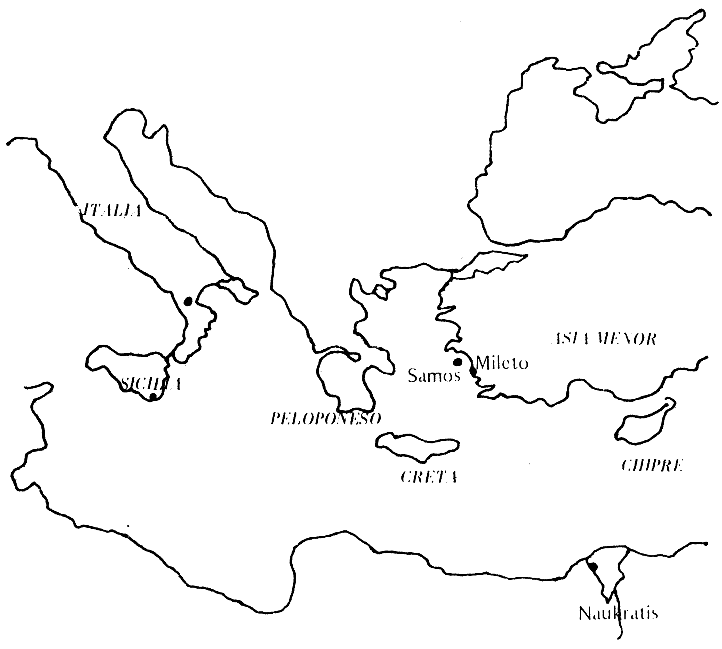
———————

* Catedrático de la Universidad Complutense.
Numerario de esta Real Academia.

PITAGORAS

La figura de Pitágoras nos aparece coloreada y fuertemente fabulada por la pluma de sus hagiógrafos tardíos Diógenes Laercio y Porfirio, del siglo III d. de C., y Iámblico, del siglo IV. Pero ya incluso en el siglo V a. de C. Herodoto mismo presenta un Pitágoras mítico confundido con una figura tan fabulosa como Zalmoxis, medio héroe, medio dios. Y también la figura que Aristóteles dibuja de Pitágoras en los fragmentos que se conservan aparece entre las brumas de la leyenda. Es lástima que la obra que Aristóteles dedicó a los pitagóricos, bajo este título, **oi Pythagoricoi,** no haya llegado hasta nosotros, pues sin duda con ella tendríamos una visión mucho más cabal del pitagorismo primitivo, aunque probablemente no mucho mejor sobre Pitágoras mismo.

Lo que sobre la vida de Pitágoras se sabe con relativa seguridad es lo siguiente. Nació en la isla de Samos, junto a Mileto, en la primera mitad del siglo VI. Fue hijo de Menesarco, tal vez un rico comerciante de Samos. Probablemente viajó a Egipto, Fenicia y Babilonia. Volvió a Samos durante la dictadura de Policrates (538-522). Hacia 529 viajó al sur de Italia y fundó en Crotona la fraternidad pitagórica. Murió muy anciano en Metaponto.



Se discute sobre los siguientes datos de su vida. Año de su nacimiento (600? Eratóstenes, 570? Aristoxeno). Cronología exacta de sus viajes. Qué sucedió con él cuando los ciudadanos de Crotona expulsaron a los pitagóricos en 509. Si murió violentamente o no en Metaponto.

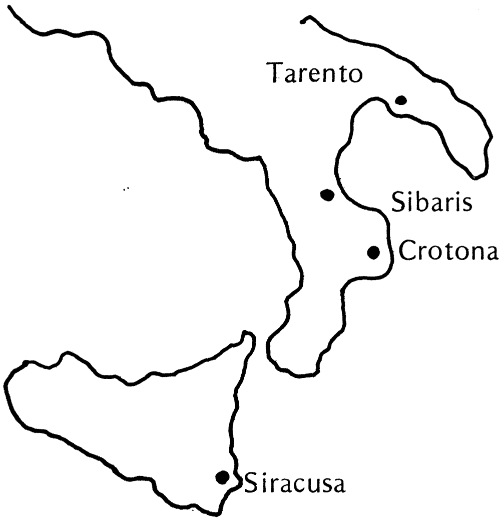
Se pueden distinguir tres etapas en su vida: la primera en el mundo griego, la segunda de viajes a Babilonia y Egipto y la tercera en lo que más tarde se llamó la Magna Grecia (Sur de Italia), con un intermedio en Samos entre la segunda y la tercera etapas.

Poco se sabe de las dos primeras. Iámblico cuenta que Pitágoras visitó a Tales en Mileto, lo que cronológicamente es acorde y geográficamente muy posible por la proximidad entre Samos y Mileto. También allí pudo conocer al filósofo Anaximandro personalmente. Como su maestro se cita sobre todo a Ferekides de Siros (Aristóteles, Aristoxeno, Dicaiarcos) a quien Aristóteles caracteriza como teólogo y taumaturgo.

Sobre los viajes a Oriente de Pitágoras existen muchas leyendas que sus biógrafos posteriores narran en detalle. Pero el hecho de sus estancias en Egipto y Babilonia aparece ya atestiguado en escritores mucho más antiguos como Isocrates (IV a. de C.), Herodoto (V a. de C.) y Aristoxeno (IV a. de C.). Por otra parte el parentesco de muchas de las as pitagóricas primitivas, tanto matemáticas y astronómicas como religiosas, delatan claramente el fuerte influjo oriental y egipcio y se puede pensar con confianza que pertenecen al acervo de enseñanzas iniciales de Pitágoras mismo.

Según algunas tradiciones, al volver Pitágoras a Samos se le pidió que enseñase sus ideas a sus propios conciudadanos. Al parecer les resultó demasiado abstracto y su enseñanza tuvo poco éxito. Esto, junto con la opresión del tirano Policrates, le debió de conducir a tomar la decisión de emigrar.

En 529 Pitágoras se trasladó a la polis (ciudad-estado) de Crotona, fundación aquea el siglo VIII a. de C., en la parte sur del golfo de Tarento. Las colonias griegas del sur de lia gozaban entonces de una gran prosperidad, sobresaliendo entre ellas Síbaris, famosa el mundo griego por sus riquezas y su vida lujosa. Crotona era su principal rival y veci- Allí llegó Pitágoras con un sistema de pensamiento más o menos perfilado después de ga experiencia por Oriente y Egipto. La ciudad le pidió que expusiera sus ideas y, se- tradición, Pitágoras dirigió por separado cuatro grandes discursos a los jóvenes, al a las mujeres y a los niños. El contenido de estos cuatro discursos tal como ha sido transmitido por diversos conductos, está lleno de recomendaciones morales de gran perfección, derivadas fundamentalmente de la necesidad de ajustar la conducta humana a los cánones de armonía y justeza que se derivan de la naturaleza misma de las cosas e ilustradas con elementos específicos de la mitología de los habitantes de Crotona. Como consecuencia de este primer contacto surgió, al parecer, no sólo en Crotona, sino en toda Italia un gran entusiasmo por Pitágoras.



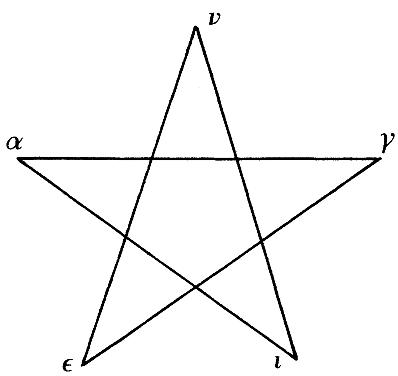
Durante algún tiempo, muchos historiadores recientes han considerado a los biógrafos posteriores de Pitágoras como poco más que novelistas que pretendían exclusivamente proponer una imagen edificante del santo patrón del pitagorismo de su tiempo, tanto en su actividad como en su enseñanza religiosa y científica. Hoy existe una cierta tendencia, representada sobre todo por la obra reciente de van der Waerden **Die Pythagoreer** (1979), que me sirve de pauta principal en mi exposición, a concederles una mayor verosimilitud, teniendo en cuenta que ellos, muy probablemente, pudieron disponer de documentos antiguos, hoy perdidos, testimonios de tradiciones mucho más cercanas a los orígenes del movimiento pitagórico.

LA COMUNIDAD PITAGORICA. GENERACIONES DE MATEMATICOS

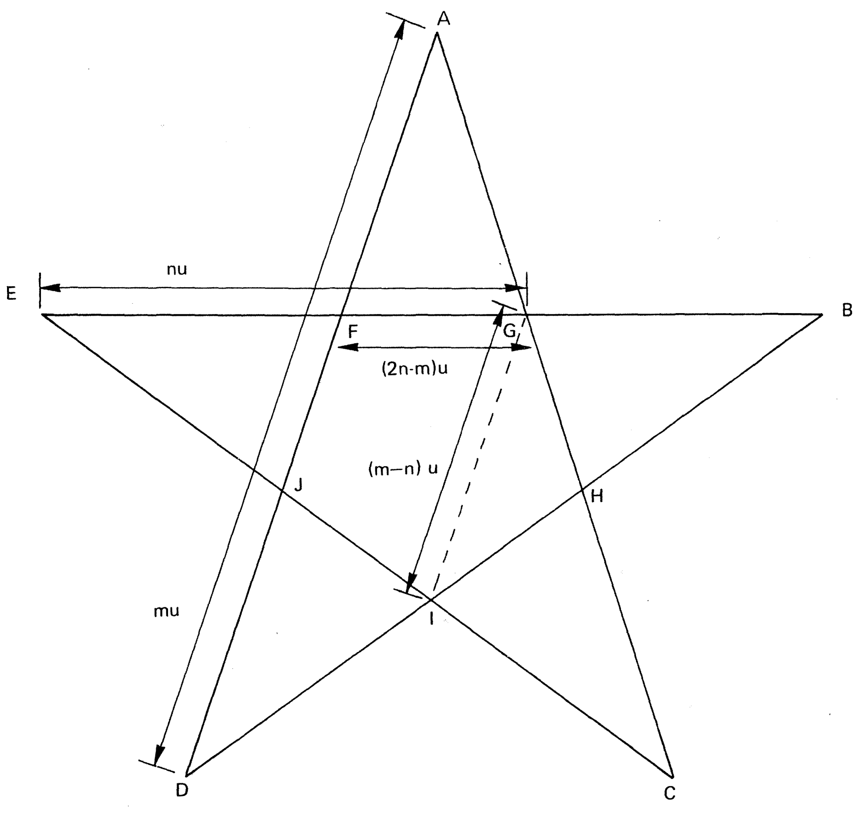
Los ciudadanos de Crotona propusieron, al parecer, a Pitágoras que continuase su labor de formación moral e intelectual de jóvenes y adultos. Los esfuerzos de Pitágoras se debieron de centrar, en lo que concierne a la formación personal completa, en los jóvenes a quienes encontró más flexibles y con más capacidad de absorber el espíritu pitagórico plenamente. Puesto que su sistema de pensamiento estaba basado en el descubrimiento y contemplación de la armonía del cosmos y a ello se habría de llegar muy fundamentalmente a través de la introducción en consideraciones científicas, muy difíciles para los más adultos, ocupados en los asuntos de la ciudad, estableció de modo natural dos formas distintas de enseñanza. Así es como explica Iámblico (Vita Pyth. 88) la existencia en la primitiva comunidad pitagórica de dos clases de miembros, los matemáticos (**mathematikoi,** conocedores) es decir los iniciados a quienes Pitágoras comunicaba los conocimientos científicos a su disposición y los acusmáticos (**akousmatikoi**, oidores) que participaban de los conocimientos y las creencias, de los principios morales, ritos y prescripciones específicas de la hermandad, si bien sin conocer en profundidad las razones de su credo y su proceder. Esta distinción resultó ser de enorme trascendencia en la evolución de la comunidad pitagórica. Los acusmáticos se constituyeron en custodios de las enseñanzas de Pitágoras y su preocupación fue que éstas se conservaran tal como Pitágoras las había transmitido. Los matemáticos se consideraban continuadores más bien del espíritu de Pitágoras, basado en el conocimiento científico, y puesto que es connatural a éste su propia evolución era claro para ellos que el conjunto de conocimientos de Pitágoras era susceptible de perfeccionamiento. Era natural que esta diversidad de pareceres había de conducir a la división de la comunidad con la desaparición de Pitágoras y así sucedió en efecto.

La distinción entre matemáticos y acusmáticos es transmitida por múltiples canales. Iámblico es quien narra más por extenso la división entre ellos y su narración parece haber sido tomada de la obra perdida de Aristóteles sobre los pitagóricos. Al parecer fue Hipaso el principal representante de los matemáticos. Se debió de ocupar con notable éxito de hacer avanzar los conocimientos matemáticos. A principios del siglo V (500-480) entró en conflicto con los acusmáticos, ya que fue el primero en ofrecer por escrito al público en general "el secreto de la esfera de los doce pentágonos" (Iámblico,Vita Pyth.88), en castigo de lo cual murió en un naufragio. El "secreto de la esfera de los doce pentágonos" alude a cierta construcción relacionada con el dodecaedro regular que los pitagóricos primitivos deseaban mantener en secreto, como el grueso de su doctrina en general. En otro lugar Iámblico mismo (Vita Pyth. 246-247) cuenta que aquél que reveló "la naturaleza del conmensurable y del inconmensurable a quienes no eran dignos de participar de tales conocimientos", fue expulsado de la comunidad. Los pitagóricos le erigieron una tumba como si para ellos ya hubiera muerto. Parece probable que fue Hipaso mismo este personaje que reveló por primera vez la existencia de longitudes inconmensurables y precisamente a través de un estudio del pentágono regular como veremos más adelante. Iámblico acusa a Hipaso de haberse atribuído el mérito de sus descubrimientos, "siendo así que todos proceden de El", es decir de Pitágoras. Se puede pensar razonablemente que Hipaso fue un gran matemático que efectivamente dió por primera vez con la existencia de longitudes inconmensurables, es decir tales que una no es un múltiplo de una parte de la otra, dando con ello al traste con la acariciada creencia de los pitagóricos primitivos de que todo debe estar regido por los números enteros y las proporciones entre ellos. La versión que Iámblico cuenta, acusando a Hipaso de plagio, proviene, según la conjetura de van der Waerden, del círculo de pitagóricos matemáticos anónimos entre 480-430 de quienes la tomó Aristóteles mismo. Estos pitagóricos fueron potentes matemáticos con la estrategia común de atribuir a Pitágoras mismo sus descubrimientos matemáticos.

¿Cómo pudo tener lugar el descubrimiento de Hipaso de los inconmensurables?. En 1954 Kurt von Fritz publicó un artículo importante, **The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum,** Annals of Mathematics 46 (1954), 242–264. De acuerdo con sus investigaciones se puede pensar que fue más o menos como sigue. Los pitagóricos primitivos estaban profundamente familiarizados con el pentágono regular. Según parece el emblema que les servía para reconocimiento mutuo era el **pentagrama,** es decir la estrella de cinco puntas formada por las diagonales de un pentágono regular. En sus cinco vértices solían colocar las letras de la palabra **ugieia,** salud. Las razones de la especial veneración de los pitagóricos por esta figura no nos es bien conocida, pero uno se inclina a pensar que en ella, al igual que en la **tetraktis,** que luego examinaremos más a fondo, encontraban armonías geométricas y numéricas extraordinariamente llamativas. Es fácil ver que todos los ángulos que aparecen en la figura son múltiplos enteros del más pequeño de entre ellos ($72^0 = 2x36^0$, $108^0 = 3x36^0$, $144^0 = 4x36^0$, $180^0 = 5x36^0$). Parece natural que los pitagóricos se preguntaran sobre la proporción en que se encuentran también los segmentos que aparecen en esta figura.



No es difícil ver, siempre con los elementos que los pitagóricos del tiempo de Hipaso tenían a su disposición, que cada segmento de los dibujados está con el que es inmediatamente mayor exactamente en la misma proporción, que es precisamente la proporción áurea. A la hora de determinar los números que determinaban esta proporción los pitagóricos tenían ya, como veremos más tarde en detalle, el proceso denominado **antanairesis,** o cancelación de uno y otro lado, que se corresponde geométricamente con el llamado algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números.



Supongamos que los segmentos señalados en la figura por AD y EG son conmensurables es decir que existe un segmento u tal que AD mide mu y EG mide nu. Tratamos de determinar la fracción m/n. Podemos suponer que m/n está en forma irreducible, es decir suponemos que no existen números naturales, m* menor que m, y n* menor que n, tales que m/n= m*/n*. De la figura misma es sencillo deducir que GI mide (m-n)u y que GF mide (2n-m)u. Por otra parte es claro que AD y GI son diagonales de pentágonos regulares de lados EA = EG y GF respectivamente. Por tanto AD/EG=GI/GF, es decir m/n= (m-n) / (2n-m). Llamando m* = m-n, n* = 2n-m, hemos obtenido una contradicción con nuestra hipótesis de que m/n era fracción irreducible. Así nuestro punto de partida de que AD y EG son conmensurables es falso.

Así como entre los pitagóricos acusmáticos, como es natural, apenas se pueden distinguir etapas evolutivas, entre los pitagóricos matemáticos que se dedicaron al desarrollo de la ciencia estas etapas se pueden diferenciar con cierta probabilidad. Así van der Waerden distingue cinco generaciones en el pitagorismo entre los años 530–360.

1ª Generación (530–500): Pitágoras.
2ª Generación (520–480): Hipaso de Metaponto, Alcmeon.
3ª Generación (480–430): Matemáticos anónimos.
4ª Generación (440–400): Filolao, Teodoro.
5ª Generación (400–360): Arquitas de Tarento.

Los matemáticos anónimos de la tercera generación debieron de constituir un grupo muy interesante del que Aristóteles se hace eco con admiración. De ellos habla como de los fundadores de la matemática tal como se cultivaba en su tiempo, una matemática bien adulta, rigurosa y ampliamente evolucionada. De ellos decía Aristóteles (según lámblico, De communi math. sci. 78) que "estiman mucho la exactitud de la argumentación en las ciencias matemáticas, porque solo ellas poseen demostraciones". Más adelante tendremos ocasión de examinar el fuerte impacto que dejaron en la geometría y en la aritmética, que quedó plasmado en los Elementos de Euclides.

Filolao, de la 4ª generación, fue de estilo grandilocuente y ampuloso, sin mucho rigor matemático. Su astronomía también carece de rigor científico. Conocía y utilizaba los conocimientos matemáticos, pero su lógica y su matemática resulta más bien floja.

ALGUNOS FRAGMENTOS DE LA ENSEÑANZA PITAGORICA

Armonía del cosmos

Pocos filósofos y muchos menos han sido los científicos que hayan sabido encarnar sus enseñanzas con elementos sensibles con tanto acierto como Pitágoras. La famosa armonía de las esferas de la enseñanza pitagórica primitiva era mucho más profunda que la mera conjetura de la consonancia de las notas que los astros producen en su movimiento. Para Pitágoras la visión fundamental consistió en que el universo es un **cosmos,** un todo ordenado y armoniosamente conjuntado. El destino del hombre consiste en considerarse a sí mismo como una pieza de este cosmos, descubrir el lugar propio que le está asignado y mantener en sí y en su entorno, en lo que está de su parte, la armonía que es debida de acuerdo con el orden natural de las cosas.

La armonía cósmica entendida en este sentido fue probablemente una audaz conclusión de madurez a la que Pitágoras llegó a través de la observación de la congruencia de sus consideraciones científicas sobre números, figuras, notas musicales, con las ideas orientales sobre el alma, los astros y la divinidad.

Los números constituían el armazón inteligible de las formas en la aritmética figurativa de los pitagóricos, construída por ellos mediante piedras (**psefoi,** cálculos). Al mismo tiempo los números desvelaban las proporciones que regían las consonancias musicales. ¿No era natural ver en el número el principio inteligible a través del cual el cosmos divino gobernado por el espíritu manifestaba al hombre su armonía interna?.

Según cuentan Porfirio (Vita Pyth. 30-31) y Iámblico (Vita Pyth. 64-66) en un pasaje que toman de Nicómaco de Gerasa (ca 50-150 d. de C.), quien por su parte parece hacerse eco de fuentes pitagóricas antiguas, Pitágoras "dirigía su oído y su espíritu hacia las sublimes consonancias del cosmos gracias a una inefable capacidad divina difícil de imaginar. Con ello oía y entendía él solo, según explicaba, toda la armonía y el concierto de las esferas y los astros que en él se mueven".

La música era a la vez entre los pitagóricos el símbolo de la armonía del cosmos y un medio para lograr el equilibrio interno en el espíritu mismo del hombre.

El juramento pitagórico

Bajo diversas formas se ha conservado una breve fórmula pitagórica de difícil interpretación que, según es de suponer, contenía algo muy cercano a la quintaesencia del espíritu pitagórico. En la versión más corriente reza así: "No, por Aquél que ha entregado a nuestras almas la Tetraktis, una fuente que contiene las raíces de la naturaleza eterna".

Al parecer constituye un juramento de secreto sobre el contenido de la enseñanza pitagórica, reservado a miembros de la comunidad exclusivamente. "Aquél", por supuesto, es Pitágoras mismo, a quien los pitagóricos primitivos no osaban nombrar. La Tetraktis, o cuaterna, consiste probablemente en los números 1,2,3,4, que conjuntamente solían representar los pitagóricos en esta forma figurativa

$$
\begin{array}{c}
\alpha \\
\alpha \quad \alpha \\
\alpha \quad \alpha \quad \alpha \\
\alpha \quad \alpha \quad \alpha \quad \alpha
\end{array}
$$

¿En qué sentido la Tetraktis podía ser "fuente de las raíces de la naturaleza eterna"?. Según parece, la Tetraktis alude a la iluminación pitagórica inicial y fundamental sobre las proporciones numéricas que rigen las notas musicales consonantes: el tono (1:1), la octava (1:2), la quinta (3:2) y la cuarta (4:3). Más adelante tendremos ocasión de considerar en detalle los experimentos musicales con cuerdas que pusieron de manifiesto tales proporciones. En la experiencia pitagórica esta observación debió de constituir el estímulo decisivo hacia la extrapolación cuasimística de que el cosmos es en algún modo alcanzable a través del número. Tal vez es en este sentido en el que se exalta la Tetraktis como fuente del conocimiento de las raíces de la armonía de la naturaleza eterna, en el cual se basa la existencia pitagórica.

Se puede uno preguntar : ¿cuál fue el sentido del secreto pitagórico que el juramento solemnemente impone?. Entonces, como hoy, el secreto compartido constituye un fuerte vínculo de conexión de los miembros de una comunidad reducida. La comunidad pitagórica llegó a tener una complicada organización interna, con largos períodos de noviciado, pruebas de silencio y de robustecimiento del espíritu a través de experiencias encaminadas a fomentar la humildad y la asimilación paulatina del espíritu pitagórico. Muchas de las doctrinas esotéricas de los pitagóricos se prestaban, fuera de su contexto total, a malentendidos que era conveniente evitar. Las mismas enseñanzas matemáticas cobraban probablemente un halo especial colocadas dentro del ambiente de los iniciados pitagóricos, constituyendo para ellos un soporte de su camino de vida con un significado que va mucho más allá del carácter de mera curiosidad especulativa que podía constituir para los espectadores externos. Por otra parte, en la vida religiosa de la Grecia contemporánea a Pitágoras abundaban extraordinariamente los **misterios** o ceremonias asimismo secretas de iniciación y purificación progresiva, con la finalidad de provocar en el espíritu del iniciado un estado de veneración, fervor religioso y entusiasmo místico, llevadas a cabo en una parte oculta del templo. Los festivales nacionales de Delfos, Eleusis, incluían misterios celebrados con genuina exaltación religiosa. Parece muy probable que Pitágoras adoptase en la tarea de formación de sus adeptos los métodos y técnicas que había observado ser de gran eficacia.

Este rasgo secretista de lá enseñanza pitagórica primitiva fue mitigado más adelante. El "No" rotundo del juramento aparece convertido en un sí en los **Versos Aureos,** una compilación de enseñanzas pitagóricas escrita probablemente en el segundo o tercer siglo después de Cristo, teniendo a la vista fuentes mucho más antiguas, y destinada a expandir la doctrina pitagórica a todos los hombres.

He aquí algunas de sus consideraciones con más probabilidad de pertenecer al pitagorismo primitivo.

1. "Honra ante todo a los dioses inmortales, como manda la ley,
2. y observa el juramento. Honra también a los nobles héroes
3. y a los dioses del mundo inferior con las ofrendas prescritas.

. . . .

9\. . . . . . acostúmbrate a ser señor
10 ante todo de tu vientre, del sueño, de la lascivia y de la ira.
Nunca hagas nada vergonzoso ni con otros ni contigo mismo; sobre todo avergüénzate de tí mismo . . . . .
17\. Hay dolores que llegan a los humanos por designio divino. Por ello
18\. cuando la fatalidad te alcance, sopórtala y no la lleves mal.
19\. Remédiala, cuanto de tu parte esté y piensa
20\. que el destino al que es bueno no le reserva mucho de ella.

. . . .

40\. No dejes que el sueño suave llegue a tus ojos
41\. antes de que hayas repasado en tu mente por tres veces cada una de tus acciones del día.
42\. "¿En qué he faltado? ¿Qué he hecho? ¿Qué he omitido?".
43\. Comienza desde el principio y recórrelo todo.
44\. Si has hecho algo mal, arrepiéntete; si has hecho algo bien, alégrate.
46\. Esto te conducirá por las huellas de la virtud divina.
47\. Sí, por Aquél que ha entregado a nuestra alma la Tetraktis
48\. fuente de la naturaleza eterna".

. . . .

Inmortalidad del alma

Porfirio, en su biografía de Pitágoras (Vita Pyth. 19) transmite un testimonio de Dicaiarcos un alumno de Aristóteles, que resume las enseñanzas de Pitágoras en estos cuatro puntos:

(1) Que el alma es inmortal.
(2) Que las almas cambian su lugar, pasando de una forma de vida a otra.
(3) Que todo lo que ha sucedido retorna en ciertos ciclos y que no sucede nada realmente nuevo.
(4) Que hay que considerar todos los seres animados como emparentados entre sí.

La creencia pitagórica del origen divino del alma viene expresada en los versos áureos con las siguientes palabras:

63\. "Pero tú ten ánimo. De naturaleza divina son los mortales".

Este aspecto de la filosofía pitagórica aparece fuertemente emparentado con la mentalidad del orfismo, un movimiento religioso que, probablemente viniendo de oriente, se instaura en Grecia empezando por Tracia en el siglo VI a. de C. La Grecia anterior al siglo VI tenía en los libros homéricos un equivalente de las escrituras sagradas de otros pueblos. El pensamiento de un alma inmortal es totalmente ajeno al espíritu griego antiguo. Pero al parecer esta situación cambió radicalmente a partir del siglo VI, muy posiblemente bajo la influencia de multitud de movimientos religiosos que, procedentes de Persia, de la India y de Egipto, se asentaron en el mundo griego. De hecho el panorama de creencias religiosas es totalmente diferente en el siglo IV a. de C. El orfismo tenía a Diónisos como dios y a Orfeo como su sacerdote, reuniendo cierto sentido místico con una ascética de purificación. El espíritu humano procede de otro mundo y se encuentra como desterrado en este, encadenado al cuerpo por la sensualidad. Existe un mundo de acá y otro de más allá y la vida debe vivirse como una fuga de lo terreno.

Muy probablemente Pitágoras amalgamó elementos órficos con otros, posiblemente de origen persa, como el del eterno retorno que aparece mencionado en el punto 3 de Dicaiarcos, y con sus propias concepciones sobre la constitución del cosmos y sobre el modo concreto de purificación a través de la contemplación, dando primacía al elemento racional y matemático sobre el poético de aquellas cosmogonías primitivas, para producir una síntesis que resultó profundamente atrayente no sólo para sus contemporáneos, sino para los muchos movimientos de inspiración pitagórica durante más de diez siglos.

Al parecer, en el modo de vida de los pitagóricos primitivos la metafísica como tal era poco importante. Lo que verdaderamente importaba era la vida pura, concretada en la armonía del alma con el cosmos, que habría de concluir con la liberación del alma del círculo de reencarnaciones. Lo que importaba era la elevación del alma al cielo de los bienaventurados tras la muerte.

LOS PITAGORICOS DEL HELENISMO Y DE LA ERA ROMANA

Según aparece en diversas fuentes, aunque los pitagóricos de Crotona del tiempo de Pitágoras no constituyeron propiamente un grupo político, sin embargo llegaron a adquirir una gran influencia y poder en las decisiones de la ciudad. Poco después de que los crotoniatas destruyeran la ciudad de Síbaris, su rival, en el año 510, se despertó en Crotona un movimiento antipitagórico de oscuro origen. En el año 509 Pitágoras tuvo que exiliarse en Metaponto, donde murió el año 500. La comunidad pitagórica se rehizo de nuevo más tarde en Crotona, perdurando allí hasta 450. Al parecer la concepción política derivada del pitagorismo era más bien de tipo aristocrático, lo que no casaba con los aires democráticos que en el siglo V se respiraban en toda Grecia con el comienzo de la era de Pericles. En 450 la casa de los pitagóricos de Crotona fue incendiada y casi todos los pitagóricos fueron muertos. Asímismo hubo persecuciones de pitagóricos en otras ciudades de Italia. Muchos emigraron a Grecia, como Filolao, que se trasladó a Tebas. De toda Italia, tan sólo en Tarento sobrevivió una floreciente comunidad pitagórica presidida por Arquitas.

En el siglo IV hubo diversos grupos de pitagóricos: los discípulos de Filolao en Flius; el grupo de Arquitas en Tarento; los llamados "pitagoristas", que entre 380 y 320 vivieron en Atenas y de los que hacen mofa varias de las comedias del tiempo.

En el siglo III a. de C. los pitagóricos de Tarento se dedicaron a diseminar por escrito hacia varias ciudades griegas, en particular Alejandría, las enseñanzas pitagóricas.

El primer contacto importante del mundo romano con el pitagorismo tuvo lugar en el año 209 a. de C. cuando Catón el Mayor fue huésped en Tarento durante una temporada del pitagórico Nearco. Allí se convirtió Catón en seguidor de las enseñanzas y modo de vida pitagóricos, como cuentan Cicerón en su diálogo **Cato Maior** y Plutarco en su **Vida de Catón.** Hacia 180 a.de C. se encontraron en Roma los llamados **Libros de Numa,** de enseñanzas pitagóricas, que, aunque no auténticos, demuestran el esfuerzo divulgador de los pitagóricos en el mundo romano. No casaban bien las doctrinas religiosas pitagóricas, que entre otras cosas prohibían las ofrendas de animales, con los cultos oficiales romanos y fueron consiguientemente reprimidas y perseguidas. Hacia el año 70 a. de C. Nigidio Fígulo, un amigo de Cicerón, fundó una comunidad pitagórica en Roma, dando así comienzo al neopitagorismo. Hacia el año 50 d. de C., en tiempos de Claudio, construyeron los pitagóricos una basílica, un lugar de reunión diseñado de acuerdo con las necesidades de la vida pitagórica.

Se puede pensar con bastante seguridad que la tradición pitagórica fue conservada en Tarento con fidelidad desde los tiempos de Arquitas (hacia 380 a.de C.) hasta aproximadamente el año 180 a.de C. Poco se sabe de las comunidades pitagóricas desde 180 hasta el año 70 a.de C. Tal vez en este período de más de un siglo tuvo el pitagorismo una vida más bien lánguida hasta que Nigidio Fígulo restauró el fervor primitivo, ciertamente con caracteres mucho más romanos, orientando más la ascesis y purificación hacia el esfuerzo por la gloria de Roma que hacia la contemplación y empeño científicos, como en el pitagorismo de los griegos. Ese parece ser el sabor del pitagorismo que aparece, por ejemplo, en el **Sueño de Escipión,** un fragmento del libro VI de la obra de Cicerón **De Republica** que muchos señalan entre sus obras más inspiradas.

Lo cierto es que los pitagóricos de esta época romana no realizaron en las ciencias matemáticas ninguna labor comparable, ni de lejos, con las de sus antecesores griegos.

LOS CUATRO MATHEMATA

En tiempos de Platón y Aristóteles (siglo IV a. de C.), y en virtud sobre todo de los esfuerzos de los pitagóricos anteriores, el cuerpo de doctrina de las ciencias exactas ya estaba plenamente codificado. Las ciencias estaban constituídas por los cuatro **mathemata.** Mathema es etimológicamente "lo que se aprende". Los cuatro mathemata, aritmética, geometría, astronomía y música constituían, por lo tanto, el saber por antonomasia. Así se expresa Aristóteles en uno de los fragmentos conservados, sobre la relación de los pitagóricos con las ciencias exactas (Metafísica 985 b), del que señalaré los párrafos más clarificadores:

"En este tiempo (de Leucipo y Demócrito, segunda mitad del siglo IV a.de C.) y ya antes se ocuparon los llamados pitagóricos de las ciencias matemáticas (**ta mathemata**). Ellos fueron los primeros que cultivaron estas ciencias y, al introducirse en ellas, llegaron a la opinión de que los principios de estas ciencias son los principios de todas las cosas. Y como los números son por naturaleza los primeros de entre estos principios y como pensaban ver en los números muchas semejanzas con lo que es y lo que ocurre, más bien que en el fuego, tierra y agua, opinaron que una cierta cualidad de los números era la justicia, otra el alma y la razón, otra la ocasión adecuada, etc. Y como también veían que las propiedades y relaciones de la armonía musical están determinadas por los números y que todas las otras cosas están también conformadas según los números y que los números son lo primero en toda la naturaleza, pensaron que los elementos de los números son los elementos de todas las cosas y que el cielo entero es armonía y número".

Aunque Aristóteles no enumera explicitamente cuáles son en concreto las ciencias matemáticas, el uso común de su tiempo, como se puede ver también en Platón, consideraba bajo el término **mathemata** la aritmética, geometría, astronomía y música, si bien en las palabras de Aristóteles citadas no aparece la geometría de modo tan explícito como las otras ciencias. Leyendo el relato completo de Aristóteles se llega a la conclusión de que para él hay una diferencia fuerte entre los pitagóricos más antiguos (los del tiempo de Leucipo y Demócrito y anteriores, es decir, los de los dos primeros tercios del siglo V) y los más recientes, a los que alude hablando en presente (probablemente Filolao y sus discípulos, última parte del siglo V y posteriores). De aquéllos se expresa con sumo respeto, como de los fundadores de las ciencias exactas. Los últimos son criticados por introducir novedades mal justificadas.

En lo que sigue trataré de exponer brevemente algunos de los puntos más importantes de las enseñanzas de los pitagóricos en Geometría, Aritmética y Música. La Astronomía de los pitagóricos será tratada en otra exposición de esta serie, por el profesor J.M. Torroja, dedicada a la astronomía de los griegos. En mi exposición utilizaré como guía fundamental la obra ya citada de van der Waerden, **Die Pythagoreer**.

LA GEOMETRIA DE LOS PITAGORICOS

La principal fuente de nuestro conocimiento sobre la geometría de los pitagóricos se encuentra en el comentario de Proclo a los Elementos de Euclides. Proclo escribe en Alejandría, muy alejado de Pitágoras en el tiempo, pues vivió del 410 al 485 d. de C., pero es seguro que tuvo ante sus ojos la **Historia de la Geometría** que Eudemo, un discípulo de Aristóteles, escribió hacia el año 320 a. de C. Al comienzo de su comentario a los Elementos Proclo transmite un resumen de lo que fue la historia de Eudemo. Otra fuente de considerable importancia es el mismo libro de los Elementos de Euclides. Señalaré a continuación algunas de las porciones de los elementos que parecen provenir de fuentes pitagóricas, a juzgar por diversos testimonios y por razones lógicas internas.

La yuxtaposición de superficies

Euclides, en I, 44, propone la siguiente construcción:

"Yuxtaponer a un segmento dado, según un ángulo dado, un paralelogramo que sea igual (en área) a un triángulo dado".

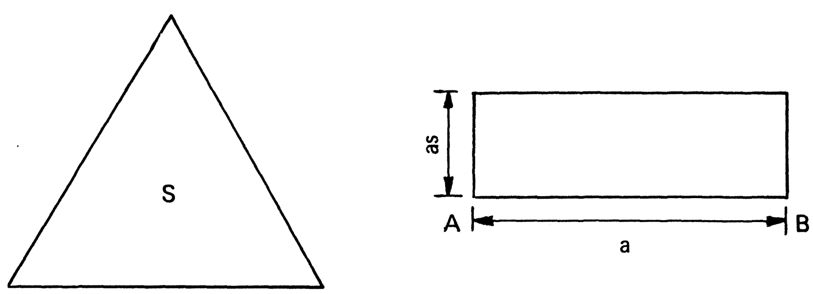
En su comentario a este ejercicio escribe Proclo:

"Estas cosas son antiguas, como afirman los que siguen a Eudemo, y son invenciones de los pitagóricos, a saber la yuxtaposición (**parabolé**) de superficies, su exceso (**hyperbolé**) y su defecto (**elleipsis**).

De ellas tomaron los más recientes los nombres y los aplicaron a las llamadas secciones del cono y las denominaron a una parábola, a la otra hipérbola y a la tercera elipse, mientras que aquellos antiguos y divinos hombres (los pitagóricos) dieron significado a estos nombres fundamentándose en la construcción de superficies planas sobre un segmento".

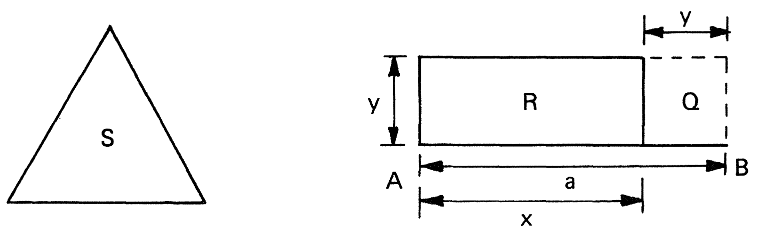
Los problemas de yuxtaposición de superficies se pueden proponer en forma más sencilla, como lo hicieron los pitagóricos, omitiendo la referencia a paralelogramos, del siguiente modo:

(A) Yuxtaponer a un segmento dado AB un rectángulo R que sea igual (en área) a un triángulo dado (**parabolé**).



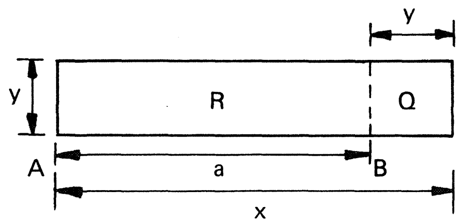
(Para nosotros, resolver $ya = S$)

(B) Yuxtaponer a un segmento dado AB un rectángulo R igual a un triángulo dado S de modo que le falte un cuadrado Q (**elleipsis**).



(Para nosotros, resolver $xy = S$, $x+y = a$)

(C) Yuxtaponer a un segmento dado AB un rectángulo R igual a un triángulo dado S de modo que le sobre un cuadrado Q (**hyperbolé**).



(Para nosotros, resolver $xy = S$, $x-y = a$)

Como se ve, la solución de estos problemas equivale a la de una ecuación de segundo grado. Los problemas son extraordinariamente importantes y así Euclides los trata en tres ocasiones diferentes.

La solución de los griegos procede como lo haríamos nosotros mismos, sólo que todo viene fraseado geométricamente. Si queremos resolver $xy = S$, $x-y = a$, lo reducimos a $y(y+a) = S$, que se puede poner, completando el cuadrado $y^2+ay+(a/2)^2= S+ (a/2)^2$, es decir $(y+a/2)^2= S+(a/2)^2$. Se trata ahora de construir un cuadrado de área igual a la de $S+(a/2)^2$ y así se obtiene $y+a/2$ y por tanto y. Todas estas operaciones algebraicas son las que aparecen en lenguaje puramente geométrico en la solución de Euclides. Si, como opina van der Waerden y otros muchos, es cierto lo que Proclo afirma sobre el origen pitagórico de estos problemas y sus soluciones, se puede pensar que los pitagóricos, probablemente ya los pitagóricos anónimos de la tercera generación, si no antes, tuvieron conocimiento de una parte bien substanciosa de los Elementos, en particular, por lo que de aquí se desprende, de I–45, I–47, II–5, II–6, II–14, que contienen las herramientas para las soluciones de los problemas de yuxtaposición de superficies.

Polígonos regulares

El libro IV de los Elementos enseña cómo inscribir en un círculo un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono, un hexágono y un pentadecágono. Existen varios escolios es decir, notas marginales que se encuentran en diversos manuscritos, que atribuyen los teoremas de este libro IV a los pitagóricos. Según W. Burkert en su obra **Weisheit und Wissenschaft** (p. 426), estos escolios proceden de Eudemo. Los teoremas que aparecen en el libro IV se presentan en un estilo unitario a excepción del que se refiere a la construcción del pentadecágono. Proclo explica que la intención de Euclides al introducir el pentadecágono en este contexto estaba motivada en las necesidades de los astrónomos. Hacia 440 a. de C. Oinópides de Quios había determinado en 24^0la inclinación de la eclíptica. Este ángulo es precisamente $360^0/15$ y así coincide con el ángulo correspondiente al lado del pentadecágono desde su centro. Según parece por todos los indicios, los pitagóricos antiguos supieron cómo construir polígonos regulares. Así, con todos estos datos, se puede pensar con van der Waerden y otros, que el libro IV, a excepción del último problema, sobre el pentadecágono, constituía una unidad de enseñanza mucho antes de que Euclides la incorporara a su obra, incluso se puede conjeturar que sea anterior al 440 a.de C.

De todas las construcciones del libro IV la más interesante es la que se refiere al pentágono regular (IV, 10–11). Esta construcción se apoya de modo decisivo en la observación de que cada diagonal corta a otra en dos segmentos en proporción áurea, o bien en lo que Euclides llama "media y extrema razón". Los pitagóricos tenían especiales razones como hemos visto, para ocuparse intensamente del pentágono regular. La estrella formada por las diagonales, el pentagrama, era su símbolo de reconocimiento y de deseo de salud. Parece natural pensar en un intenso interés por construir exactamente tal figura y por entenderla racionalmente a fondo. Como hemos visto antes al tratar de Hipaso, el dodecaedro regular, y por tanto el pentágono regular, entrañaban para los pitagóricos hechos muy fundamentales. En este contexto pienso que se debe hacer notar que las consideraciones sobre la inconmensurabilidad de la diagonal con el lado que antes hicimos son independientes de la posibilidad de construcción efectiva del pentágono regular. No es necesario pensar que Hipaso supiera construir el pentágono regular al modo de Euclides, aunque tampoco hay motivos para pensar que efectivamente no lo supo. Por otra parte, la construcción de la "media y extrema razón" que en Euclides aparece en II, 11, no requiere otra cosa que la solución de un problema de yuxtaposición de superficies, que los pitagóricos antiguos, según hemos visto, dominaban totalmente. Así, teniendo en cuenta estas conexiones lógicas, se puede concluir que los pitagóricos conocieron la construcción de la razón áurea que se propone en los Elementos II, 11.

Guiados por los testimonios históricos, por argumentos de tipo lógico como los aducidos y por otros derivados del estilo de presentación y de congruencia interna, tanto van der Waerden como otros historiadores llegan a la conclusión de que los libros II y IV de los Elementos proceden completa o casi completamente de los pitagóricos.

Del libro III, relativo a cuerdas y tangentes en el círculo y de ángulos en el círculo, Neuenschwander ha mostrado que una gran parte era conocida de los pitagóricos antiguos y de Hipócrates de Quíos. El libro I de los Elementos tiene un carácter mucho menos transparente. Se puede aventurar que tal vez los pitagóricos hayan formulado una axiomática incipiente, pues los axiomas 1,2,3,7,8 son citados **verbalmente** (estilo pitagórico) en los libros II y IV, de procedencia más claramente pitagórica. La proposición I, 29 sobre la igualdad de los ángulos determinados por paralelas era conocida de los pitagóricos que demostraron mediante ella que la suma de los ángulos de un triángulo mide dos rectos. Conocieron también I, 47 (el "teorema de Pitágoras"), pero la demostración que poseían era a través de la teoría de proporciones, que Euclides evita en este libro.

Para acabar con los puntos más sobresalientes de la geometría de los pitagóricos se puede decir que, de acuerdo con un escolio al libro XIII de los Elementos, los pitagóricos conocieron de los cuerpos regulares, el cubo, el tetraedro y el dodecaedro. Según el mismo escolio, que parece muy verosímil, el octaedro y el icosaedro parecen haber sido estudiados por vez primera por Teeteto, en la primera mitad del siglo IV a. de C.

LA ARITMETICA DE LOS PITAGORICOS

Al estudiar la aritmética de los pitagóricos es necesario distinguir claramente entre la aritmética científica y la aritmética popular. La aritmética científica de los griegos se encuentra resumida en los libros VII, VIII y IX de los Elementos de Euclides que fueron escritos hacia el año 300 a. de C. Por testimonios históricos se puede concluir que algunas porciones de los libros VII y VIII eran conocidas por Arquitas de Tarento (ca. 400–360). El análisis lógico de estas porciones permite conjeturar que el contenido básico de los libros VII y VIII es obra de los pitagóricos. En particular el libro VII debe de proceder de los matemáticos anónimos anteriores a Arquitas y el VIII de los de la escuela de Arquitas. Algunas porciones del libro IX, como la doctrina del "par e impar" es anterior incluso a los pitagóricos anónimos y posiblemente procede del tiempo de Hipaso de Metaponto (hacia el año 500 a. de C.).

No me ocuparé aquí de detallar específicamente el contenido de esta aritmética científica, pues esto será realizado en otra conferencia de esta serie, por el profesor Alberto Dou, dedicada a Euclides. Sólo quisiera señalar dos puntos particularmente notables de la aritmética de los Elementos, de los cuales uno con seguridad es de procedencia pitagórica y el otro con gran probabilidad también.

El primero se refiere a los llamados "números lado y diagonal". El segundo es el llamado "algoritmo de Euclides" para la obtención del máximo común divisor de dos números. Los números lado y diagonal constituyen pares de números formados recursivamente que servían a los pitagóricos para aproximar mediante fracciones, cada vez con mayor exactitud, la relación entre la diagonal y el cuadrado, es decir para aproximar la raíz de 2. De esta forma se expresa Proclo en su comentario al libro sobre la República de Platón:

"La unidad, como origen de todos los números, es potencialmente tanto lado como diagonal. Se toman ahora dos unidades: una como unidad-lado y otra como unidad-diagonal y se forma un nuevo lado, añadiendo a la unidad-lado la unidad-diagonal, y una nueva diagonal, añadiendo a la unidad-diagonal el doble de la unidad-lado".

El proceso de formación de los pares de números lado y diagonal prosigue de la misma forma. El nuevo lado es suma de los números lado y diagonal anteriores, la nueva diagonal es la suma de la diagonal anterior y dos veces el lado anterior, es decir:

$$\begin{cases} l_1 = 1 \\ d_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_2 = l_1 + d_1 = 2 \\ d_2 = d_1 + 2\,l_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_3 = l_2 + d_2 = 5 \\ d_3 = d_2 + 2\,l_2 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_4 = 12 \\ d_4 = 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_5 = 29 \\ d_5 = 41 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_6 = 70 \\ d_6 = 99 \end{cases}$$

Obsérvese que si $r_n = d_n / l_n$, se tiene $r_1 = 1$; $r_2 = 1,5$; $r_3 = 1,4$; $r_4 = 1,4166 \ldots$; $r_5 = 1,4137$; $r_6 = 1,41428$; . . .

que aproximan alternativamente por defecto y por exceso $\sqrt{2} = 1,4142135 \ldots$

¿De dónde proviene la extraña idea de este proceso recursivo, probablemente el primero de tal naturaleza en la historia de la matemática?.

Según Proclo, los pitagóricos demostraron el siguiente teorema:

Si L y D son lado y diagonal de un cuadrado, entonces también $L^* = L + D$ y $D^* = D + 2L$ son lado y diagonal de un cuadrado.

Y Proclo afirma que la demostración de los pitagóricos de esta propiedad se realizó mediante la proposición II, 10 de los Elementos de Euclides, que representa la identidad que nosotros escribiríamos así

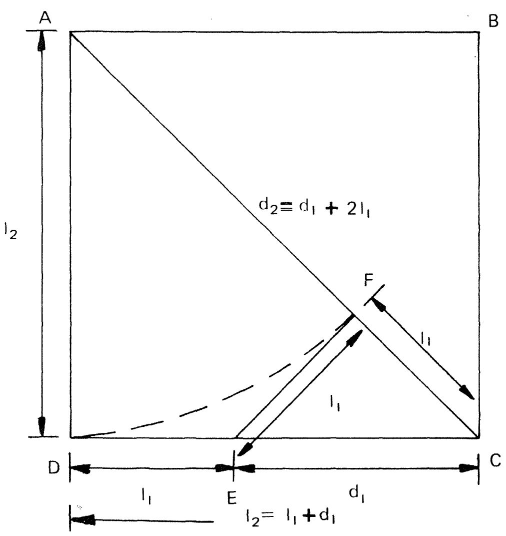
$$(2X + Y)^2 + Y^2 = 2X^2 + 2(X + Y)^2$$

En efecto, si suponemos que $X = L$, $Y = D$ son lado y diagonal de un cuadrado, se tiene $D^2 = 2L^2$ y así substituyendo arriba y simplificando $Y^2 = 2X^2$, resulta

$$(2L + D)^2 = 2(L + D)^2$$

es decir $2L + D$ es diagonal del cuadrado de lado $L + D$.

Es posible que la idea original de tal hilo de pensamiento y de demostración esté implícita en el proceso de **antanairesis** con el que, según O. Becker y otros (Cf. O.Becker, **Grösse und Grenze der Mathematischen Denkweise,** Karl Alber Verlag, 1959; trad. esp. Rialp, 1969) se procedía originariamente a la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.El proceso aparece muy claramente sugerido por la siguiente figura:



Si $l_1 = EF$ y $d_1 = EC$ son lado y diagonal de un cuadrado, entonces $DC = l_2 = l_1 + d_1$ y $AC = d_2 = d_1 + 2\,l_1$ son también lado y diagonal de otro cuadrado. El proceso de **antanairesis** es efectivamente la vuelta atrás del proceso de construcción de los pares de números lado y diagonal. En realidad, desde el punto de vista matemático es mucho más razonable pensar que el camino de las ideas fue el inverso, es decir, a fin de hallar la unidad común, si existe, capaz de medir al tiempo lado l_2 y diagonal d_2, era natural substraer de la diagonal el lado l_2, obteniendo así CF y luego tratar de hallar la unidad común de $CF = l_1$ y $DC = d_2$, restando CF=EF=DE de DC para obtener así $EC = d_1$. Al tratar de obtener la unidad común de $EC = d_1$ y $FC = l_1$ observamos que estamos en las condiciones iniciales pues d_1 y l_1 son diagonal y lado de un nuevo cuadrado. El proceso no acaba nunca y esto viene a demostrar la no existencia de tal unidad común. La vuelta atrás de esta **antanairesis** aplicada al cuadrado fue probablemente la motivación del método de construcción de los números lado y diagonal.

El proceso de **antanairesis** que hemos seguido no es otra cosa que la versión geométrica del algoritmo de Euclides para la obtención del máximo común divisor de dos números (VII, 33). Así, tanto por la estructura lógica de los libros VII y VIII de los Elementos como por consideraciones históricas, parece razonable concluir que los pitagóricos, en particular probablemente alguno de los matemáticos anónimos del siglo V conoció y estructuró estos dos algoritmos de una brillantez y profundidad que aún hoy día nos llenan de asombro.

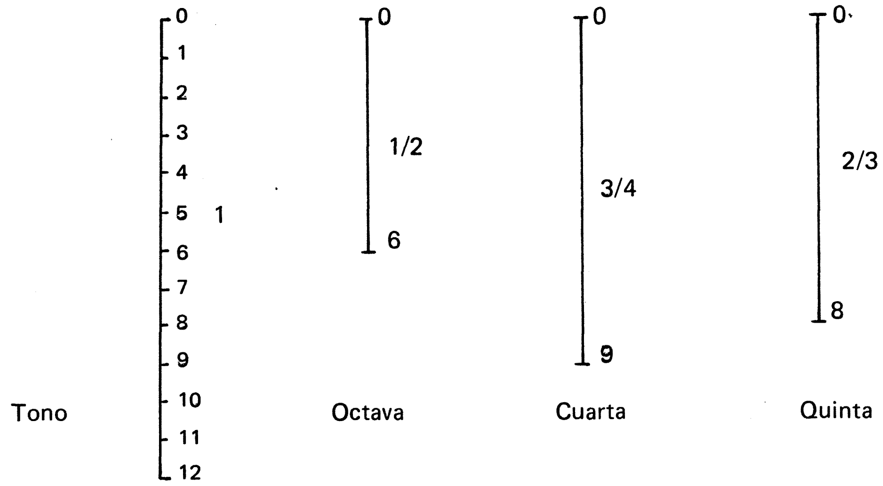
La aritmética popular de los pitagóricos tenía otro sabor totalmente distinto del de estos retazos de la aritmética científica que hemos examinado. Su finalidad era hacer inteligible **a todos** las fascinantes propiedades de los números. La principal fuente de nuestro conocimiento de esta aritmética es la **Introducción a la Aritmética** de Nicómaco de Gerasa (ca. 50–150 d. de C.), obra que se extendió extraordinariamente a juzgar por el gran número de manuscritos (44) que de ella se conservan. En este trabajo aparecen por extenso la teoría figurativa de los números, los números triangulares, cuadrados rectangulares, pentagonales, etc. y se habla de las fabulosas y místicas propiedades de ciertos números en concreto.

ARMONIA CIENTIFICA DE LOS PITAGORICOS

La armonía, como hemos visto anteriormente, está en el corazón mismo del pitagorismo. La música era el método de elevación y purificación del alma y al mismo tiempo objeto de contemplación intelectual que revelaba, con sus congruencias expresables mediante relaciones numéricas, la armonía más profunda del cosmos. La capacidad cuasimágica de la música es elemento heredado por el pitagorismo de las corrientes órficas más primitivas. El análisis científico de los sonidos armónicos es en cambio rasgo muy específicamente pitagórico, que casi con toda seguridad se remonta al mismo Pitágoras.

Existen varias versiones sobre el modo concreto como Pitágoras llegó a desentrañar las relaciones numéricas entre los sonidos consonantes, es decir aquellos cuya producción simultánea origina una sensación agradable en nuestro oído: el tono, la octava, la quinta y la cuarta. Nicómaco de Gerasa, Gaudencio y Boecio hablan de la observación de Pitágoras de los diferentes sonidos producidos en el yunque del herrero por martillos de diferentes pesos. Un martillo cuyo peso era como 6 producía el tono, otro con peso 12 producía la octava, otro con peso 9 la quinta y otro de peso 8 la cuarta. Pitágoras volvió a casa, colgó tales pesos de cuatro cuerdas iguales y observó que se producían los sonidos consonantes correspondientes. Este es el ejemplo típico de una de esas historias cuya falsedad podría haber comprobado un historiador con sentido crítico sin más que tratar de repetir la experiencia. La frecuencia del sonido producido por una cuerda vibrante no está en proporción con la tensión, sino con la raíz cuadrada de la tensión.

Diógenes Laercio propone a Pitágoras mismo como inventor del monocorde, no un instrumento musical, sino más bien un aparato científico para verificar la teoría musical utilizado por los pitagóricos. Gaudencio explica pormenorizadamente el experimento más verosímil con el que Pitágoras comprobó y cuantificó su intuición genial de la conexión de la armonía musical con los números. Pitágoras tensó una cuerda musical que producía un sonido que tomó como fundamental, el tono. Hizo señales en la cuerda, que la dividían en doce partes iguales. Pisó la cuerda en el 6 y entonces



observó que se producía la octava. Pisó luego en el 9 y resultaba la cuarta. Al pisar el 8 se obtenía la quinta. ¡Las fracciones 1/2, 3/4, 2/3 correspondían a la octava, la cuarta y la quinta!. Los sonidos producidos al pisar en otros puntos resultaban discordes o al menos no tan acordes como los anteriores. ¡Los números 1,2,3,4, la Tetraktys, determinaban con sus proporciones relativas los sonidos más consonantes!.

Los números 12,9,8,6 constituyeron asímismo en el pitagorismo posterior otra cuaterna muy interesante por sus propiedades aritméticas. Se verifica:

$$9=\frac{12+6}{2}\ ,\quad \frac{1}{8}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right),\quad \frac{12}{9}=\frac{8}{6}$$

Así 9 es media aritmética entre 12 y 6, y 8 es media armónica entre 12 y 6. Se verifica 12. 6 = 9. 8 y esto es una propiedad general de la media aritmética y armónica

$$M=\frac{A+B}{2}\ ,\quad \frac{1}{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)\Rightarrow\ AB=MH$$

Iámblico afirma que la teoría de la media aritmética y la media armónica procede de los babilonios y fue importada por Pitágoras. No hay pruebas concluyentes de tal afirmación, pero sí se puede asegurar que esta teoría pertenece al pitagorismo primitivo.

La armonía fue una ocupación constante de la escuela pitagórica en todas las etapas de su evolución. Platón había manifestado su descontento con el carácter empírico tanto de la armonía como de la astronomía de los pitagóricos. Tal vez por su influjo se produjo una curiosa fundamentación axiomática de la armonía pitagórica, relatada por el astrónomo Tolomeo (ca. 140 d.de C.) en su obra sobre armonía. Los axiomas pueden expresarse así:

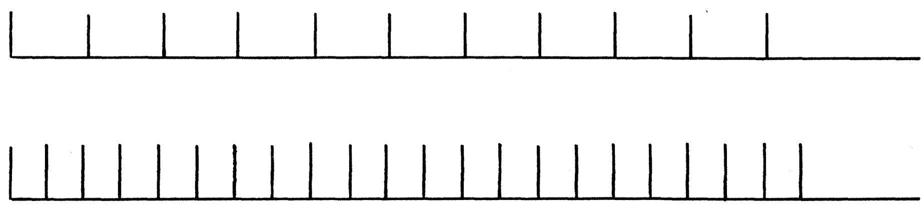
1. A los sonidos musicales les corresponden números. A los del mismo tono el mismo número, a los de distinto tono números distintos.

2. Los números correspondientes a sonidos consonantes se comportan entre sí como el numerador y el denominador de las fracciones más perfectas a/b, que son aquéllas en que el numerador es múltiplo del denominador, a = nb, o bien aquéllas en que a sobrepasa a b en una parte de b, es decir a = b+ b/n, y esta relación es tanto más perfecta cuanto más simple, es decir cuanto más pequeño sea n.

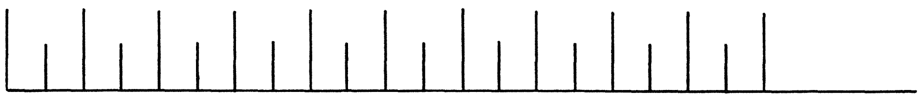
3. A la octava, como más perfecta, debe corresponder la relación 2/1.

De esta forma resulta **por pura deducción lógica** que a la quinta le debe corresponder 3/2 y a la cuarta 4/3.

De entre los desarrollos ulteriores de la armonía científica de los pitagóricos se puede destacar la explicación, asombrosamente acertada, de la naturaleza del sonido como una sucesión de percusiones en el aire, haciendo depender el tono del número de percusiones que se producen por unidad de tiempo, es decir, de la frecuencia. Con ello se explica de modo natural y exacto la producción de sonidos fisiológica y psicológicamente agradables, consonantes, en las cuerdas cuyas longitudes se comportan como los números más sencillos. Las percusiones del aire producidas simultáneamente por una cuerda y la cuerda con la misma tensión, de longitud mitad, tono y octava, llegan al tímpano de una forma representable en el eje del tiempo de la manera siguiente:



Su composición da lugar a una estructura de percusiones como la que sigue:



que es sencilla y previsible, **armoniosa,** para nuestro oído.

En cambio la producción de dos sonidos de frecuencias de percusión arbitrarias dará lugar a una estructura un tanto caótica que para nuestro oído resulta opaca, no previsible, en una palabra, disonante. Para mayor información sobre estos problemas profundamente interesantes puede consultarse el artículo de B.L. van de Waerden, Die Harmonielehre der Pythagoreer, Hermes 78 (1943) 163.

VIGENCIA DEL PITAGORISMO

La estela del pitagorismo en la historia del pensamiento científico es incomparablemente más brillante y duradera que la de cualquier otro movimiento. La fe pitagórica en la tarea humana de entender el cosmos es la misma que ha inspirado toda la actividad científica a lo largo de más de 25 siglos. Es llamativo observar cómo a través de un período tan dilatado las armonías del cosmos que impresionaron tan hondamente a Pitágoras y a sus discípulos han sido capaces de seguir admirando y atrayendo la capacidad contemplativa de los hombres de tantas épocas distintas. Pitágoras se apoyó en el sentimiento religioso de la época para constituir una síntesis científico-religiosa de una gran capacidad de pervivencia. Platón, con su profundidad filosófica y su incomparable sensibilidad estética se hizo vehículo de transmisión de una gran porción del núcleo de pensamiento pitagórico. El espíritu pitagórico, incluso con fervores que emulan los de las primitivas comunidades griegas, ha aparecido en momentos y personas que representan verdaderos puntos de cambio de rumbo en la evolución del pensamiento científico. Se puede pensar por ejemplo en Kepler, con su **Mysterium Cosmographicum** y su **Harmonice Mundi** o en Leibniz con su idea de la **Characteristica Universalis.**

En nuestros días, la confianza pitagórica en nuestra capacidad para explorar y entender el universo es algo tan inmerso en el método científico que quien la explicita, la pondera, se maravilla de ella y trata de explicársela, corre peligro de aparecer como un iluminado. Las posturas y explicaciones ante el hecho de la adecuación de las estructuras mentales del científico con la realidad exterior a la que se aplican pueden ser diferentes (compárese Bourbaki en **L' Architecture des Mathematiques,** E.P. Wigner en **The Unreasonable Efectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,** J. von Neumann en **The Mathematician)** pero todas ellas pasan por la afirmación de tal acuerdo.

Tampoco faltan en nuestros días voces influyentes que quisieran asignar a la matemática un papel más profundo, en cierto modo semejante al que el pitagorismo le señalaba. En 1973 le fue concedida al matemático soviético I.R. Shafarevich el premio Heinemann, por la Academia de Ciencias de Göttingen, por el valor de su investigación matemática. Con tal motivo pronunció un discurso interesante titulado **"Sobre ciertas tendencias en el desarrollo de la matemática",** publicado en ruso y en alemán en Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Göttingen 1973, 37–42, y más tarde traducido al inglés en The Mathematical Intelligencer (1981) 3, 182–184. En él Shafarevich después de argumentar que el objetivo último que justifica la actividad matemática no puede encontrarse en su mera aplicabilidad, se remonta a los pitagóricos con las siguientes palabras:

"La matemática como ciencia nació en el siglo VI a. de C. en la comunidad religiosa de los pitagóricos y fue parte de esta religión. Su propósito estaba bien claro. Revelando la armonía del mundo expresada en la armonía de los números proporcionaba un sendero hacia una unión con lo divino. Fue este objetivo elevado el que en aquel tiempo proporcionó las fuerzas necesarias para un logro científico del que en principio no puede darse parangón. Lo que estaba involucrado no era el descubrimiento de un bello teorema ni la creación de una nueva rama de la matemática, sino la creación misma de las matemáticas.

Entonces, casi en el momento de su nacimiento habían aparecido ya aquellas propiedades de la matemática gracias a las cuales las tendencias humanas generales se manifiestan más claramente que en ninguna otra parte. Esta es precisamente la razón por la que en aquel tiempo las matemáticas sirvieron como modelo para el desarrollo de los principios fundamentales de la ciencia deductiva.

En conclusión quiero expresar la esperanza de que por esta misma razón la matemática ahora pueda servir como modelo para la solución del problema fundamental de nuestro tiempo: **revelar un supremo objetivo y propósito religiosos para la actividad cultural humana".**

Quede ahí la sugerencia de Shafarevich. Con quien ciertamente no se puede menos de estar de acuerdo es con A.N. Whitehead, que cierra así su capítulo sobre la matemática en la historia del pensamiento en su obra **Ciencia y el Mundo Moderno:** "Verdaderamente Pitágoras, con su fundación de la filosofía europea y de la matemática europea, la dotó con la más afortunada de las conjeturas ¿o acaso fue un resplandor de genio divino que penetró hasta la naturaleza más íntima de las cosas?".