Nota sobre un sistema compartimentado con retrasos*

por

Guang Zhang y Sui Sun Cheng

1. Introducción

Numerosos procesos de la biología, la física y las ciencias sociales se pueden modelar con sistemas de ecuaciones diferenciales a los que llamamos sistemas compartimentados y que han sido estudiados de forma extensa (véase, por ejemplo, [3, 8, 9]). En el caso de que al material de un compartimento dado le cueste un tiempo fijo σ fluir hacia otro compartimento, un sistema simple tiene la forma

$$u'(t) = A(t)u(t) + B(t)u(t-\sigma) + F(t),\ t \geq 0,$$

donde $u(t)$ es un vector columna de la forma $(u_1(t), \ldots, u_n(t))^*$, $n \geq 2$ (aquí el asterísco denota la operación de trasposición), A y B son funciones de transferencia matriciales, y F es la función vectorial de entrada.

Es de enorme interés conocer las propiedades estructurales de estos sistemas. En esta nota, nos gustaría resaltar una relación sencilla que existe entre un caso especial de los anteriores sistemas compartimentados, a saber, el sistema dado por

$$u'(t) = Au(t) + b(t)u(t-\sigma) + F(t),$$

y una cierta relación escalar asociada a él. Gracias a esta relación, cierto número de propiedades cualitativas del sistema compartimentado se pueden inferir de forma sencilla a partir del estudio de la ecuación escalar asociada.

Mientras derivamos esta relación, también descubriremos que otros sistemas más generales se pueden manejar de forma análoga. En particular, esto será posible para los sistemas de la forma

$$(u(t)+c(t)u(t-\tau))^{(m)} = p(t)Au(t-\mu)-q(t)u(t-\sigma)+w(t)u(t-\xi)+F(t),\ t \geq 0, \quad (1)$$

donde $v^{(m)}(t)$ denota la derivada m-ésima de la función $v(t)$, $\tau > 0$ y $\mu, \sigma, \xi \geq 0$ son retrasos temporales, c, p, q, w son funciones continuas de variable real, y A es una matriz simétrica de orden $n \times n$ y con coeficientes reales.

*En su versión original, los autores enviaron este artículo en inglés, con el título *Note on a Compartmental System with Lags*. Los directores de *La Gaceta* quieren agradecer a J. M. Almira su ayuda para traducirlo al español.

Obsérvese que (1) es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de tipo neutro con retraso. Las propiedades generales de estos sistemas son bien conocidas. En particular, el teorema de existencia y unicidad para sus soluciones se puede demostrar por el método de los pasos ([7, p. 256, Teorema 1.1]).

2. Condiciones necesarias y suficientes

Sean λ un autovalor de A y v uno de sus autovectores asociados. Supongamos que (1) posee una solución $u = u(t)$ para $t \geq \max\{\tau, \mu, \sigma, \xi\}$. Entonces, calculando el producto escalar de (1) con el vector v, vemos que

$$\begin{aligned}
&(v^*u(t) + c(t)v^*u(t-\tau))^{(m)} \\
&\qquad = p(t)v^*Au(t-\mu) - q(t)v^*u(t-\sigma) + w(t)v^*u(t-\xi) + v^*F(t) \\
&\qquad = p(t)(Av)^*u(t-\mu) - q(t)v^*u(t-\sigma) + w(t)v^*u(t-\xi) + v^*F(t) \\
&\qquad = p(t)\lambda v^*u(t-\mu) - q(t)v^*u(t-\sigma) + w(t)v^*u(t-\xi) + v^*F(t).
\end{aligned}$$

Si tomamos $x(t) = v^*u(t)$ entonces obtenemos la ecuación diferencial neutra con retraso

$$(x(t) + c(t)x(t-\tau))^{(m)} = \lambda p(t)x(t-\mu) - q(t)x(t-\sigma) + w(t)x(t-\xi) + v^*F(t). \quad (2)$$

Como resultado parcial inverso, si $x(t)$ es una solución de

$$(x(t) + c(t)x(t-\tau))^{(m)} = \lambda p(t)x(t-\mu) - q(t)x(t-\sigma) + w(t)x(t-\xi) + g(t), \quad (3)$$

donde $g(t)$ es una función continua con valores reales definida en $[0, \infty)$, λ es un autovalor de A, y v es su autovector asociado, entonces la función vectorial $u = u(t)$ definida por $u(t) = x(t)v$ para $t \geq \max\{\tau, \mu, \sigma, \xi\}$ es una solución del sistema

$$(u(t) + c(t)u(t-\tau))^{(m)} = p(t)Au(t-\mu) - q(t)u(t-\sigma) + w(t)u(t-\xi) + g(t)v. \quad (4)$$

De hecho,

$$\begin{aligned}
&(u(t) + c(t)u(t-\tau))^{(m)} \\
&\qquad = (x(t) + c(t)x(t-\tau))^{(m)}v \\
&\qquad = p(t)\lambda x(t-\mu)v - q(t)x(t-\sigma)v + w(t)x(t-\xi) + g(t)v \\
&\qquad = p(t)x(t-\mu)(\lambda v) - q(t)x(t-\sigma)v + w(t)x(t-\xi)v + g(t)v \\
&\qquad = p(t)Au(t) - q(t)u(t-\sigma) + w(t)u(t-\xi) + g(t)v.
\end{aligned}$$

Así que hemos demostrado el siguiente

TEOREMA 1. *Sea λ un autovalor de A y v su autovector asociado. Si $u(t)$, $t \geq \max\{\tau, \mu, \sigma, \xi\}$, es una solución de* (1), *entonces $x(t) = v^*u(t)$, $t \geq \max\{\tau, \mu, \sigma, \xi\}$, es una solución de* (2). *Si $x(t)$, $t \geq \max\{\tau, \mu, \sigma, \xi\}$, es una solución de* (3), *entonces $u(t) = x(t)v$ es una solución de* (4).

3. Algunas consecuencias

Decimos que un vector u de $\mathbb{R}^n$ es positivo (y lo denotamos por $u > 0$) si todas sus componentes son positivas, y decimos que la función vectorial $(u_1(t), \ldots, u_n(t))^*$ es positiva para $t \geq T$ si $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ son positivos para todo $t \geq T$.

Teorema 2. *Supongamos que la matriz A tiene un autovalor real λ tal que su autovector asociado v es positivo. Si* (1) *tiene una solución $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^*$ que es positiva para todo $t \geq T$, entonces la ecuación* (2) *posee una solución $x(t)$ que es positiva para $t \geq T$. Recíprocamente, si* (3) *tiene una solución $x(t)$ que es positiva para $t \geq T$, entonces* (4) *tiene una solución $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^*$ que es positiva para todo $t \geq T$.*

En particular, cuando $F(t)$ y $g(t)$ son idénticamente nulas, si A tiene un autovalor real λ con un autovector asociado positivo, entonces la ecuación (2) posee una solución que es eventualmente positiva si y sólo si (3) admite una solución eventualmente positiva.

El teorema anterior tiene una importante consecuencia. La razón es que existe un gran número de criterios oscilatorios que se ocupan de la inexistencia de soluciones eventualmente positivas de (3). Por ejemplo, se sabe [6, Teorema 2.2.3] que la ecuación

$$x'(t) + qx(t - \sigma) = 0$$

posee una solución eventualmente positiva si y sólo si $q\sigma e \leq 1$. Si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{5}$$

entonces, como 0 es uno de sus autovalores con autovector asociado $(1, 1, \ldots, 1)^*$, el sistema

$$u'(t) = p(t)Au(t) - qu(t - \sigma)$$

posee una solución eventualmente positiva si y sólo si $q\sigma e \leq 1$.

Bajo la misma hipótesis de que A tenga un autovalor real con un autovector asociado positivo v, se puede utilizar el mismo principio para demostrar lo siguiente:

(i) Si la ecuación (3) tiene una solución eventualmente positiva que tiende a cero para $t \to \infty$, entonces el sistema (4) también posee una solución eventualmente positiva que tiende a cero para $t \to \infty$.

(ii) Si la ecuación (3) tiene una solución eventualmente positiva y acotada (no acotada, respectivamente), entonces el sistema (4) también posee una solución eventualmente positiva y acotada (no acotada, respectivamente).

Por otro lado, si suponemos que A tiene un autovalor real con un autovector asociado v, se puede utilizar el mismo principio para demostrar lo siguiente:

(iii) Si la ecuación (3) tiene una solución periódica, entonces el sistema (4) también posee una solución periódica.

(iv) Si la ecuación (3) tiene una solución casi periódica, entonces el sistema (4) también posee una solución casi periódica.

Por completitud, recordemos que la función vectorial $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^*$ se dice periódica si existe un número positivo ω tal que $u(t+\omega) = u(t)$ para todo t en el dominio de $u(t)$. La definición de función casi periódica es ligeramente más complicada y se puede encontrar en los libros de referencia estándar como [13]. Una función vectorial continua con valores reales definida sobre $[\alpha, \infty)$ se dice casi periódica si, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $T(\varepsilon) = \{\omega : |f(t+\omega) - f(t)| < \varepsilon,\ t \in [\alpha, \infty)\}$ es relativamente denso en $\mathbb{R}$. Observemos, además, que el criterio de existencia de soluciones periódicas para (2) se puede encontrar en [1, 2, 4, 10, 11, 13, 16, 17] y otros, y que la existencia de soluciones casi periódicas para (2) se puede ver en [14, 15] y otros.

4. UN EJEMPLO DE LINEARIZACIÓN

En [12], Wu y Krawcewicz estudiaron el siguiente sistema:

$$u_i'(t) = d\Delta^2 u_{i-1}(t-\mu) + ru_i(t)[1 - u_i(t-\sigma)],\ i = 1, 2, \ldots, n \pmod{n}. \tag{6}$$

Obsérvese que $u(t) = (1, 1, \ldots, 1)^*$ es una «solución estacionaria» de (6). La linearización de (6) en $(1, 1, \ldots, 1)^*$ es

$$y_i'(t) = d\Delta^2 y_{i-1}(t-\mu) - ry_i(t-\sigma),\ i = 1, 2, \ldots, n \pmod{n}, \tag{7}$$

o, usando notación matricial,

$$y'(t) = dAy(t-\mu) - ry(t-\sigma), \tag{8}$$

donde $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^*$ y A está definida por (5).

En vista del Teorema 1, sabemos que el sistema (8) tiene una solución $y(t)$ si y sólo si la ecuación escalar

$$x'(t) = \lambda dx(t-\mu) - rx(t-\sigma) \tag{9}$$

tiene una solución $x(t) = v^* y(t)$, donde λ es un autovalor de A y v es su autovector asociado. Como 0 es un autovalor de la matriz A, la ecuación asociada (9) toma la forma

$$x'(t) = -rx(t-\sigma),$$

la cual admite una solución eventualmente positiva si y sólo si $r\sigma e \leq 1$. Así pues, cuando $r > 0$ y $r\sigma e \leq 1$, (8) tiene una solución positiva que converge al vector cero. Consecuentemente, (6) posee una solución $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^*$ que satisface $u_i(t) \geq 1$ para $1 \leq i \leq n$ y tiende a $(1, 1, \ldots, 1)^*$.

Notemos ahora que $u(t) = (0, 0, \ldots, 0)^*$ es también una solución estacionaria de (6). La linearización de (6) en $(0, 0, \ldots, 0)^*$ es

$$y_i'(t) = d\Delta^2 y_{i-1}(t-\mu) + ry_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n \quad (\text{mód } n),$$

o, utilizando expresiones matriciales,

$$y'(t) = dAy(t-\mu) + ry(t).$$

Como la ecuación $x'(t) = rx(t)$ tiene la solución $x(t) = x(0)e^{rt}$ cuando $r > 0$, vemos que $(0, 0, \ldots, 0)^*$ no es una solución estable de (6).

Referencias

[1] T. A. Burton, *Stability of periodic solutions of ordinary and functional differential equations*, Academic Press, Orlando, Florida, 1985.

[2] S. S. Cheng y G. Zhang, Positive periodic solutions of discrete population model, *Functional Differential Equations* **7** (3-4) (2000), 223–330.

[3] S. N. Chow, J. Mallet-Paret y E. S. Van Vleck, Dynamics of lattice differential equations, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng.* **6** (1996), 1605–1621.

[4] J. D. Cuo, Periodic solutions of a kind of higher order neutral type equations, *Applied Mathematics and Mechanics* **20** (6) (1999), 605–612 (en chino).

[5] L. H. Erbe, Q. K. Kong y B. G. Zhang, *Oscillation theory for Functional Differential Equations*, Marcel Dekker, 1995.

[6] L. Györi y G. Ladas, *Oscillation Theory of Delay Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[7] J. K. Hale y S. M. V. Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[8] D. Hankerson y B. Zinner, Wave fronts for a cooperative triangonal system of differential equations, *J. Dynamics and Differential Equations* **5** (1993), 359–373.

[9] J. A. Jacquez y C. P. Simon, Qualitative theory of compartmental systems with lags, *Math. Boisci.* **180** (2002), 329–362.

[10] Y. K. Li, Periodic solutions of a periodic neutral delay equation, *J. Math. Anal. Appl.* **214** (1997), 11–21.

[11] J. H. Liu, Bounded and periodic solutions of finite delay evolution equations, *Nonlinear Analysis* **34** (1998), 101–111.

[12] J. Wu y W. Krawcewicz, Discrete waves and phase-locked oscillations in the growght of a single-species population over a patch enviroment, *Open Systems and Information Dynamics in Physics and Life Science* **1** (1992), 127–147.

[13] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Appl. Math. Science, Springer-Verlag, 1975.

[14] R. YUAN Y J. HONG, Almost periodic solutions of differential equations with piecewise constant argument, *Analysis* **(16)** (1996), 171–180.

[15] R. YUAN Y J. HONG, The existence of almost periodic solutions for a class of differential equations with piecewise constant argument, *Nonlinear Anal. TMA* **28** (8) (1997), 1439–1456.

[16] G. ZHANG Y S. S. CHENG, Positive periodic solutions of non-autonomous functional differential equations depending on a parameter, *Abstract Anal. Appl.* **7** (5) (2002), 279–286.

[17] Z. Q. ZHANG, On the existence of periodic solutions of third order functional differential equations, *Funkcialaj Ekvacioj* **43** (2000), 461–469.

GUANG ZHANG, SCHOOL OF SCIENCE, TIANJIN UNIVERSITY OF COMMERCE, TIANJIN, 300134, P. R. CHINA
Correo electrónico: qd_gzhang@126.com

SUI SUN CHENG, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TSING HUA UNIVERSITY, HSINCHU, TAIWAN, 30043, R. O. CHINA
Correo electrónico: sscheng@math.nthu.edu.tw

TRADUCIDO POR J. M. ALMIRA, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE JAÉN
Correo electrónico: jmalmira@ujaen.es