Una visión personal sobre los Sistemas Dinámicos*

por

Carles Simó

Introducción

Los Sistemas Dinámicos (S.D.) estudian el comportamiento y propiedades de las soluciones de ecuaciones diferenciales y de las sucesiones obtenidas por iteración de una aplicación dada. Son una herramienta fundamental para estudiar modelos matemáticos de la evolución de fenómenos en el mundo físico y modelos simplificados que ayudan a entenderlos. Estos modelos pueden estar dados de una forma determinista, bien sea mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones en derivadas parciales o aplicaciones discretas, o pueden incluir también algún ruido o proceso aleatorio. Los S.D. son útiles en todos los dominios de la ciencia y tecnología.

En un cierto sentido, el origen se remonta a Poincaré, quien se dio cuenta de la importancia de un enfoque cualitativo. El propio Poincaré desarrolló ampliamente el enfoque perturbativo, cuando el sistema objeto de estudio es cercano a algún modelo simple. En la actualidad, no se pueden disociar los aspectos cualitativos y cuantitativos. Cada uno de ellos contribuye a un mejor entendimiento de los S.D.

En el estudio de los S.D. se utilizan herramientas de todas las áreas de las Matemáticas, desde la topología algebraica a la aceleración de la convergencia en algoritmos numéricos, o desde desarrollos asintóticos a la teoría de Galois diferencial. Pero para sistemas de un cierto grado de complejidad, con una mínima relación con modelos realistas, es imposible producir una descripción bastante completa de la evolución en el espacio de estados, y su dependencia respecto a parámetros, sin usar técnicas numéricas refinadas. Éstas son esenciales para aplicaciones concretas y muy útiles incluso para los estudios teóricos. Pueden ser entendidas como una parte experimental de las Matemáticas. Ese aspecto ha sido potenciado por la disponibilidad de grandes conjuntos de procesadores trabajando en paralelo con un coste reducido. Pero el impacto de nuevos algoritmos ha sido incluso mayor. Esto hace posible atacar problemas de creciente complejidad.

Una idea clave es la representación de la evolución en algún espacio de estados o espacio de fases. O, mejor, en algún espacio (SPS) que incluya los estados y los parámetros que una familia dada de modelos contiene. Para entender las posibles evoluciones de un S.D. y su carácter (por ejemplo, regular o caótico) el conocimiento

*Con el título *A personal view on dynamical systems,* este artículo apareció originalmente en *The Madrid Intelligencer*, Springer (2006), 42–45, publicado con ocasión del *International Congress of Mathematicians* de 2006. *La Gaceta* agradece al autor y a Springer-Verlag la autorización para publicarlo, y a Álex Haro su traducción.

de algunos objetos geométricos en este SPS es básico. En algunos casos el uso de un tiempo complejo y un espacio de estados-parámetros complejo puede ser esencial para revelar algunas propiedades de la dinámica real.

Objetos invariantes

Para «entender» un S.D., se pueden considerar los siguientes pasos fundamentales:

- Identificar objetos simples, tales como puntos fijos y órbitas periódicas, u otros objetos invariantes (esto es, que permanecen invariantes por un flujo o aplicación), tales como esferas, toros, etc., en el espacio de fases.
- Estudiar la estabilidad de estos objetos. Supongamos que son inestables y que es posible escapar de un entorno de ellos cuando el tiempo aumenta. Entonces queremos describir el conjunto de puntos (la variedad inestable) que tienden al objeto invariante cuando vamos hacia el pasado en el tiempo. De forma similar podemos estudiar la variedad estable (si existe), a saber, el conjunto de puntos que tienden al objeto invariante en el futuro.
- Buscar las posibles conexiones entre variedades inestable y estable de los mismos o distintos objetos invariantes. Éstas son las llamadas órbitas homoclínicas y heteroclínicas. Bajo ciertas condiciones (transversalidad de las variedades, al menos en algún sentido débil), tales conexiones dan lugar a dinámica complicada, difusión, atractores extraños, etc.

  Aunque se popularizó denotar tal comportamiento dinámico como caos, éste puede ser claramente explicado en términos de órbitas homoclínicas. El rasgo más relevante es la falta de predictibilidad, incluso en el caso determinista. Los objetos invariantes y sus posibles conexiones constituyen el «esqueleto» de la dinámica. Son una herramienta para entender la dinámica global.
- Todos los objetos y estructuras previos pueden depender de parámetros (como, por ejemplo, los parámetros físicos del modelo). Así, es interesante ver cuán estable es el comportamiento cuando los parámetros cambian, qué tipos de cambios o bifurcaciones son posibles, y los diferentes patrones de las dinámicas correspondientes. Esto puede ser útil, por ejemplo, si se puede actuar sobre los parámetros para obtener los efectos más deseables.
- En muchos casos una visión determinista de la dinámica no es posible, incluso para sistemas simples. Ésta deber ser hecha en términos probabilísticos. Esto es a fortiori cierto para S.D. no-deterministas. La «descripción» de tales S.D. debe hacerse entonces en términos de una medida que evoluciona.

Relevancia de diferentes características

Algunos escenarios típicos permiten probar la existencia de características interesantes de la dinámica como herraduras, multiplicidad de puntos fijos atractores, diferentes tipos de atractores extraños, difusión de Arnold, escisión exponencialmente pequeña de separatrices, resonancias múltiples, ondas viajeras, etc. Para entender los aspectos cualitativos del S.D. es esencial conocer esos interesantes resultados.

Pero esos resultados deben también considerarse en perspectiva. Para una familia dada de S.D., incluso si tales fenómenos ocurren de forma genérica, pueden jugar un mayor o menor papel. En otros términos, se debería «medir» si ocurren en una gran parte del SPS o si están confinados en dominios extremadamente pequeños. Puede también ocurrir que su papel dependa del tamaño de los parámetros. Un ejemplo clásico es el bien conocido hamiltoniano de Hénon-Heiles. Para una energía por debajo de $h = 0{,}05$ es difícil reconocer que contiene una cierta cantidad de comportamiento caótico, mientras que éste puede ser visualizado para $h = 0{,}10$ y es predominante para $h = 0{,}15$.

Las formas normales son una herramienta muy útil para estudiar un entorno de objetos invariantes y, en algunos casos, son suficientes para probar la existencia de una rica dinámica. Sin embargo, el dominio de validez, esto es, en qué región del SPS éstas son una aproximación suficientemente buena (para algún propósito) del verdadero sistema, ha sido mucho menos estudiado. Debería insistir de nuevo en la importancia de un acercamiento cualitativo-cuantitativo y en la dirección de los llamados «resultados inversos» (en inglés, «converse results»). Esto es, cuándo la existencia de algún objeto interesante (como los toros KAM) deja de ser cierta. La brecha entre resultados positivos y negativos es extremadamente grande en muchos problemas.

Otro punto importante es el estudio de regímenes transitorios. En muchos problemas se puede describir de forma bastante precisa los posibles estados límite del S.D. Sin embargo, dependiendo de las escalas temporales, el modelo puede no ser válido mucho antes que la dinámica se aproxime al estado límite. Los transitorios pueden ser más importantes que el límite.

Un ejemplo elemental

Un ejemplo muy simple que podemos discutir aquí es la estabilidad de los puntos triangulares en el problema espacial restringido de tres cuerpos (3DRTBP). Éste describe el movimiento de una partícula prácticamente sin masa (digamos, un pequeño asteroide A) bajo la atracción gravitatoria de dos primarios S, J (digamos, el Sol y Júpiter) que se mueven en órbitas circulares, en $z = 0$, alrededor del centro de masas común. Sean $m_S > m_J > 0$ las masas de los primarios, $\mu = m_J/(m_S + m_J)$ la masa relativa y considemos un sistema de coordenadas rotatorio (coordenadas sinódicas) en el que los primarios estén fijos. Supongamos también que las unidades están normalizadas de tal forma que la masa total es 1, la distancia entre S y J es 1 y que el período de los primarios es 2π. Desde Euler y Lagrange sabemos que hay 5 puntos de equilibrio relativo, en $z = 0$, en los que la fuerza centrífuga cancela la atracción newtoniana. Dos de ellos, los llamados puntos triangulares L_4 y L_5, son linealmente estables para $\mu \leq \mu_1 \approx 0{,}0385$. Son también no-linealmente estables en el movimiento plano excepto para $\mu = \mu_2 \approx 0{,}0243$, $\mu_3 \approx 0{,}0135$. Los otros tres puntos de equilibrio relativo, L_1, L_2 y L_3, son llamados colineales.

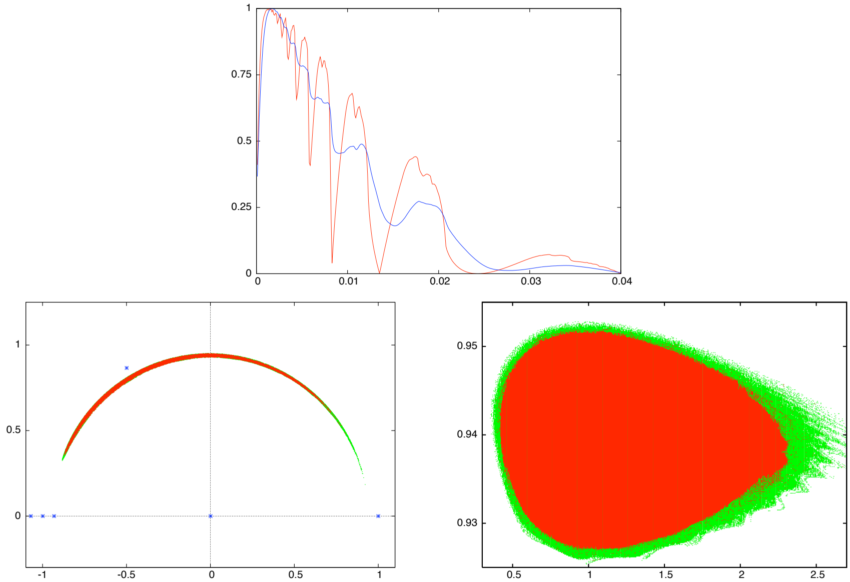

Figura 1: Arriba: Abundancia relativa de puntos en el espacio de posiciones que, empezando el movimiento con velocidad sinódica cero, no abandonan un extenso entorno de L_5 (ver texto) en 10^4 revoluciones de los primarios. En rojo[a] (resp. azul) el comportamiento como función de μ para el problema plano (resp. 3D). Las representaciones están normalizadas a un máximo de 1, que se obtiene para $\mu = 0{,}0014$ (resp. $\mu = 0{,}0017$), para el que la medida de condiciones iniciales es 0,0355 (resp. 0,0298). Todas las principales características tienen una explicación teórica. Abajo a la izquierda: Proyecciones en (x, y) de los puntos que subsisten después de 10^3 (resp. 10^5) revoluciones en verde (resp. rojo) empezando desde $z = 0{,}5$ para $\mu = 0{,}001$. En el eje x puede verse, de izquierda a derecha, las posiciones de L_1, J, L_2, S y L_3. También se muestra el punto $L_5 = (\mu - 1/2, \sqrt{3}/2, 0)$. Derecha: La misma figura en coordenadas polares centradas en el origen. El ángulo (en el eje horizontal) está contado en el sentido de las agujas del reloj empezando desde el semieje negativo de x.

[a] *Nota del traductor:* Originalmente, este artículo estaba publicado en color. Si lo ves en blanco y negro, ten en cuenta que los azules aparecen más oscuros que los rojos, y éstos a su vez más oscuros que los verdes.

En el caso 3D estos puntos parecen ser inestables, porque no hay manera de impedir la difusión de Arnold. Pero, aunque puntos cercanos puedan escapar, lo hacen de una forma extremadamente lenta. Se ha demostrado la existencia de «dominios de práctica estabilidad», en los que el movimiento está confinado por, digamos, intervalos de tiempo del orden de la edad del sistema solar. Una cuestión relevante es qué objetos aparecen en lo que puede ser considerado una «cuasi-frontera» que separa regiones de difusión muy lenta de otras con escape rápido. Estos objetos tienen codimensión 1 en el espacio de fases y, aunque no confinan el movimiento, escapar

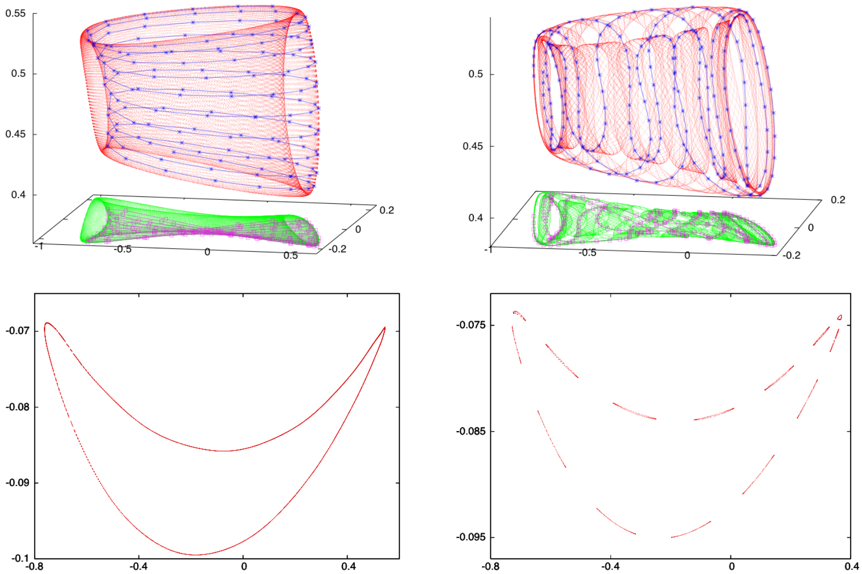

Figura 2: Arriba: Secciones de Poincaré con $z = 0$ de algunos toros 3D con condiciones iniciales sobre $z = 0{,}5$ cerca de la frontera inferior de la parte roja de la figura 1 y ángulo $\approx 2\pi/3$, que dan lugar a toros 2D en esta sección. Variables representadas: $x, \dot{y} - 0{,}9\dot{z}, \dot{z}$. También se muestran las proyecciones sobre un plano $z =$ cte. Resultados similares se obtienen para todos los toros cercanos a la frontera. Izquierda: un toro cercano a la cuasi-frontera. Derecha: un toro dentro del dominio de práctica estabilidad, pero cerca de su frontera, y cercano (en la sección de Poincaré) a un toro invariante 1D. Algunos iterados de la aplicación de Poincaré (unidos por líneas) se muestran en azul. En el dibujo de la derecha los iterados se muestran cada 14 iteraciones, para evidenciar una resonancia próxima. Abajo: Proyecciones sobre $x, \dot{y} - 0{,}87\dot{z}$ de una rebanada de los dibujos de arriba. Como rebanada se ha tomado $|\dot{z} - 0{,}47| < 10^{-5}$. Muestran claramente que, en el espacio de fases, los toros 3D son cercanos a las variedades invariantes de toros hiperbólicos 2D.

de sus intrincados pliegues puede tomar un tiempo muy largo.

Las figuras 1 y 2 ilustran algunas de las características del problema. El «dominio de práctica estabilidad» está definido por órbitas que empiezan con velocidad sinódica cero desde un punto dado en el espacio 3D de posiciones. Esto permite muestrear un conjunto de medida positiva en el espacio de fases porque la mayoría de puntos que no escapan dan lugar a toros 3D. Como criterio de escape tomamos: no acercarse a S o a J a una distancia $< 0{,}1$ y la proyección de (x, y) no debería contener puntos por debajo de una cierta y crítica (por ejemplo $y = -0{,}2$). Nótese que la parte «roja» de la figura 1, abajo, está llena de minúsculas zonas de resonancia, que no son visibles con la resolución usada.

Las variedades de codimensión 1 involucradas en las cuasi-fronteras incluyen las variedades inestable/estable de la variedad central de L_3 en el problema plano. El problema 3D es más complicado, porque en ese caso incluyen las variedades centrales de algunas familias de órbitas periódicas de tipo elíptico-hiperbólico. Una computación sistemática de estos objetos ofrece varias dificultades no triviales, incluso numéricamente, en problemas tan simples como este ejemplo. Para valores muy pequeños de μ se dispone de alguna información analítica, pero el valor $\mu = 0{,}001$ utilizado en la figura 2, cercano al caso real Sol-Júpiter, no se puede considerar pequeño.

PERSPECTIVAS

El estatus presente en el área de los S.D. es interesante y prometedor. Pero creo que hay que desarrollar nuevas herramientas y enfoques. Podemos esperar los siguientes progresos:

a) El dominio de aplicabilidad de los S.D. se incrementará. Ofrecen una herramienta única para entender sistemas complejos. Aspectos cualitativos y cuantitativos se fusionarán.

b) Las metodologías típicas de S.D. de «dimensión baja» usadas en EDO y aplicaciones discretas se extenderán a las áreas mucho más difíciles de EDP, ecuaciones con retardo, y ecuaciones con componentes estocásticas. Por razones obvias, el estado de la cuestión en estos dominios está muy lejos del de las EDO.

c) La modelización fiable se extenderá más allá de los dominios «clásicos» (algunas partes de física, química y tecnología) para alcanzar nuevos fenómenos a escalas nanométricas y más allá, incluyendo aplicaciones a biología, medicina, comunicaciones y otras áreas. Esto requerirá un gran esfuerzo y cambio de mentalidad de las comunidades relacionadas (y no sólo por parte de los matemáticos. . .).

d) Los resultados teóricos cambiarán hacia métodos constructivos y eficientes. Se pondrá un fuerte énfasis en estimaciones precisas de dominios de validez y resultados inversos, intentando cubrir la brecha entre los dominios probados de validez y los que parecen ser los verdaderos dominios basados en evidencias físicas o numéricas.

e) La validación de computaciones numéricas (rigurosas y eficientes estimaciones del error, computación de objetos invariantes lejos de casos perturbativos, demostraciones asistidas por ordenador) serán un trabajo rutinario en un futuro cercano.

f) Se realizará un gran esfuerzo en entender regímenes transitorios. No deberíamos olvidar que nuestro mundo está en permanente estado transitorio. Dependiendo de las escalas temporales, no se puede desatender la influencia de los cambios en el modelo.

g) Desde un punto de vista teórico, las Matemáticas tienen herramientas con un gran dominio de aplicabilidad pero que dan una información reducida, y herramientas que proporcionan una descripción muy detallada aunque bastante localizada. Sería deseable encontrar nuevos campos que aprovechen las ventajas de ambos enfoques.

h) Teniendo en cuenta que muchas descripciones son únicamente posibles usando medidas probabilísticas y su evolución, parece que los computadores digitales actuales no son la mejor opción. Quizás computadores basados en mecánica cuántica serán una solución deseable. Pero no parece que esto pueda ocurrir en un futuro cercano.

Conclusiones

Los Sistemas Dinámicos ofrecen un contexto, un marco teórico y una metodología, tanto para problemas abstractos como concretos, que hace posible aplicarlos en todas las áreas de la Ciencia y la Tecnología. Por otro lado, permiten estudiar no sólo el comportamiento de una solución de un modelo matemático, sino también características de la totalidad de soluciones. Es también posible estudiar cambios respecto a parámetros, la robustez de un modelo y cómo controlarlo.

Los aspectos cualitativos y cuantitativos se refuerzan mutuamente y son complementarios. Existen modelos paradigmáticos que ayudan a entender modelos más complejos y que aparecen con una cierta «universalidad» (esto es, deberían aparecer bajo ciertas condiciones).

El desarrollo de los Sistemas Dinámicos, de las Matemáticas y la Ciencia en general (seguidas de cerca por la Tecnología) está en el presente en un punto muy interesante y potencialmente prometedor. La Humanidad tiene que enfrentarse a muchos problemas y tiene herramientas que pueden permitir resolverlos. Sólo es cuestión de tener un auténtico deseo de acometerlos. Para conseguir este objetivo habrá que cambiar, posiblemente, una parte de la maquinaria que mueve actualmente la sociedad.

Carles Simó, Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi, Universitat de Barcelona, Gran Via 585, 08007 Barcelona
Correo electrónico: carles@maia.ub.es

Traducido por Álex Haro, Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi, Universitat de Barcelona, Gran Via 585, 08007 Barcelona