El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo

Conectando puntos: Poligonizaciones y otros problemas relacionados

por

Manuel Abellanas

Todos hemos jugado alguna vez a *conectar los puntos* para descubrir la forma que se ocultaba tras los puntos numerados. A veces la forma era la esperada. Otras el resultado final nos sorprendía. Es un juego que entretiene a los más pequeños y pone a prueba su destreza en el manejo del lápiz. Pero, ¿qué pasaría si se borrasen los números que etiquetan los puntos? Tal vez el dibujo incompleto que suele acompañar

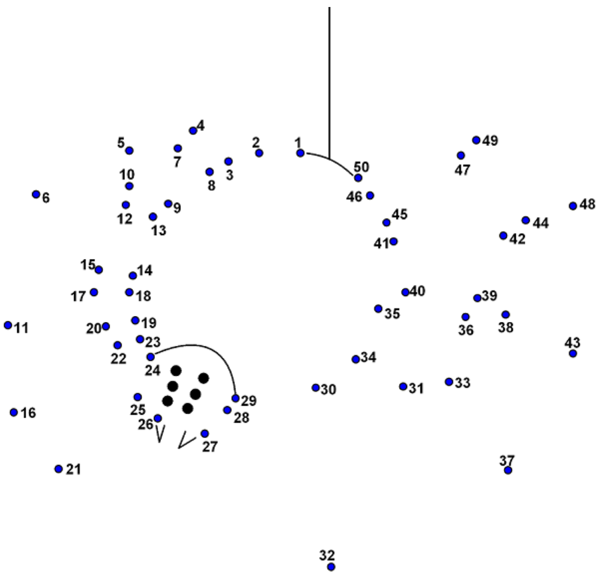

Figura 1: Conecta los puntos para descubrir lo que se esconde. (Dibujo original de Teresa.)

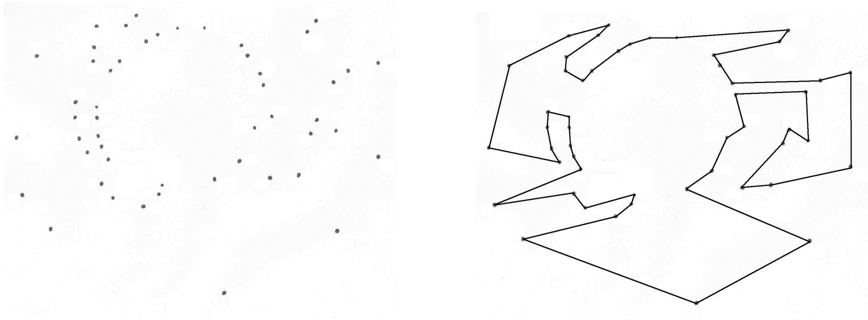

Figura 2: Si los puntos no están numerados el problema se complica: Hay más de $4\,642^{50}$ posibles soluciones [12] (y eso si no admitimos que la poligonal se corte a sí misma, porque en ese caso habría $49!/2$, que es una cantidad mucho mayor).

a los puntos ayude a imaginar la forma correcta de conectarlos. Tal vez algún otro criterio topológico o geométrico, como la proximidad entre los puntos, pueda servir de indicador.

Consideremos el siguiente juego manual: En un tablero se clavan unos cuantos clavos muy finos pero no del todo, de forma que cada clavo sobresalga un poco de la madera. El juego ahora consiste en colocar una goma elástica que quede sujeta por los clavos y de tal manera que todos los clavos intervengan sujetando la goma. Además, y aquí está la gracia del juego, la goma no debe cruzarse consigo misma.

No es difícil obtener una solución al problema que plantea este juego. Sin embargo, el problema se complica si en lugar de clavos sin grosor fijamos al tablero discos y queremos que sean éstos los encargados de sujetar la goma elástica en las condiciones dichas (es decir, de forma que la goma toque a todos los discos y no se cruce consigo misma).

Vamos a emplear estos juegos como punto de partida para hablar de algunos problemas de interés dentro de la Geometría combinatoria y algorítmica.

1. Poligonizaciones

Una *cadena poligonal* es una sucesión finita de segmentos de recta en la que el origen de un segmento coincide con el extremo final del anterior. Cuando no hay ninguna intersección entre los segmentos, salvo las mencionadas en los extremos de segmentos consecutivos, se dice que la cadena poligonal es *simple*. Si el origen del primer segmento coincide con el extremo final del último, la cadena poligonal se llama *cerrada*. Un *polígono simple* es una cadena poligonal cerrada simple con tres o más segmentos. A veces se emplea el término *polígono* para referirse a los polígonos simples. Por extensión, también se llama polígono a la región acotada del plano cuya frontera es un polígono. Un polígono queda determinado por la sucesión ordenada de sus vértices según aparecen al recorrer el polígono. Dada la lista ordenada de los vértices de un polígono, basta conectar con un segmento de recta cada uno con el siguiente, y el último con el primero, para obtener el polígono. Pero, ¿qué pasaría si conocemos los vértices pero no su orden? ¿Podremos determinar el polígono? ¿Cuántos polígonos diferentes podremos obtener a partir de los mismos vértices? ¿Hay siempre un polígono cuyos vértices coincidan con un conjunto dado de puntos? ¿Cómo obtener un polígono a partir de sus vértices?

Un polígono cuyos vértices coincidan con un conjunto finito de puntos C se dice que es una *poligonización* del conjunto C. Con esta terminología, las preguntas anteriores se convierten en los siguientes problemas de Geometría combinatoria y computacional: ¿Existe una poligonización de cualquier conjunto finito de puntos del plano? ¿Cuántas poligonizaciones tiene un conjunto de n puntos? ¿Cómo poligonizar un conjunto de puntos?

La poligonización de conjuntos de puntos tiene aplicaciones en diversos campos. Una aplicación importante o, más bien, una aplicación que sería importante porque a fecha de hoy faltan algunas respuestas, tiene que ver con la *generación aleatoria de polígonos*[1]. Si existiera una manera de obtener poligonizaciones de un conjunto de puntos suficientemente genérica, podría usarse para resolver un problema nada sencillo: generar polígonos aleatorios. Esto, por sí mismo, es un problema de gran interés matemático. Además tiene un gran interés informático, pues permitiría hacer evaluaciones experimentales de algoritmos relacionados con polígonos. Y hay muchos y muy útiles en numerosas aplicaciones. El análisis de formas o el reconocimiento de patrones son campos en los que tradicionalmente se han utilizado las poligonizaciones como herramienta. Un problema clásico es el de la reconstrucción de una curva a partir de una muestra de puntos de la misma. Otro problema relacionado con las poligonizaciones es el paradigma de la optimización combinatoria: el *problema del viajante de comercio* (conocido por sus siglas en inglés, *TSP*). En su versión geométrica, el problema consiste en hallar la ruta cerrada más corta que conecta un conjunto de puntos del plano. Es fácil probar que dicha ruta debe ser un polígono simple, es decir, una de las poligonizaciones del conjunto. La dificultad para resolver el problema proviene del gran número de poligonizaciones que en general existen. De hecho, se ha demostrado que este problema, así como el de hallar poligonizaciones de área mínima o máxima, pertenecen a una clase de problemas llamados *NP* para los que no se cree que puedan existir algoritmos exactos eficientes [11, 14].

2. Algoritmos para poligonizar

Es fácil observar que, si el conjunto de puntos está contenido en una recta, no es poligonizable, pues exigimos que el polígono sea simple. En realidad, ésta es la única condición para que un conjunto de puntos no sea poligonizable. Vamos a ver algunas maneras de poligonizar un conjunto no alineado de tres o más puntos.

[1]La propia definición de *polígono aleatorio* es un tema abierto de interés. Existen varias aproximaciones al problema de dar una definición de polígono aleatorio. El caso más estudiado se refiere a polígonos con un conjunto de vértices fijos. Es decir, considera como espacio muestral equiprobable el conjunto de las poligonizaciones de un conjunto de puntos dado.

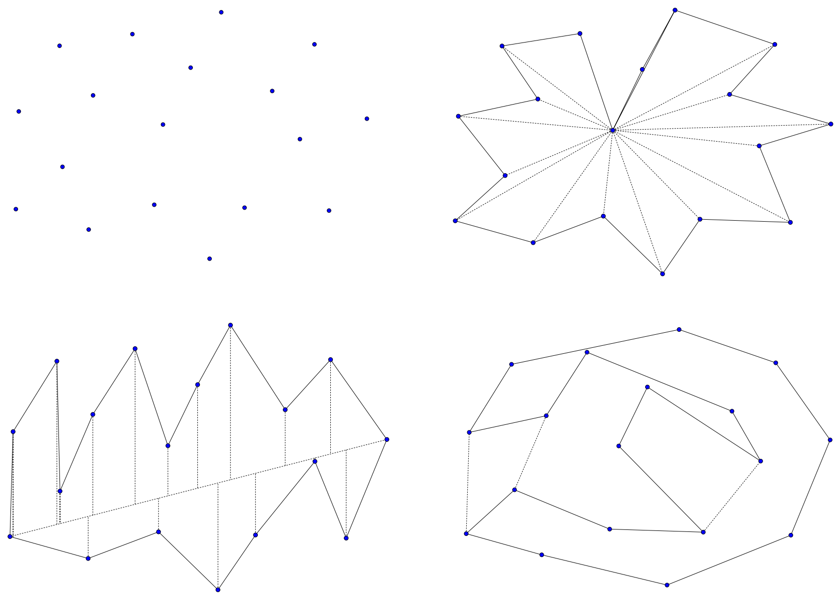

Figura 3: Distintas poligonizaciones de un mismo conjunto de puntos: estrellada, monótona y empleando las capas convexas.

2.1. Poligonización estrellada

Dado un conjunto de puntos $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $n > 2$, ordenamos los puntos angularmente respecto del primero de ellos, p_1. Si dos o más puntos están en la misma semirrecta con origen p_1, los ordenamos por sus distancias a p_1 de menor a mayor. El resultado de la ordenación determina una poligonización del conjunto S. El polígono correspondiente es un polígono estrellado, lo que significa que hay un punto que se puede conectar por un segmento a cualquier punto interior del polígono sin que el segmento corte a la frontera del polígono. En este caso dicho punto es p_1.

2.2. Poligonización monótona

Dado un conjunto de puntos $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $n > 2$, hallamos los puntos de menor y mayor abscisa $p_{\text{mín}}$ y $p_{\text{máx}}$. En caso de coincidir más de un punto con abscisa mínima o máxima, tomamos el de menor ordenada. Con el resto de los puntos formamos dos conjuntos C_{sup} y $C_{\text{ínf}}$ que contienen, respectivamente, los puntos que están por encima y por debajo del segmento de extremos $p_{\text{mín}}$ y $p_{\text{máx}}$. Si hay puntos alineados con $p_{\text{mín}}$ y $p_{\text{máx}}$ se incluyen en uno de los dos conjuntos, por ejemplo $C_{\text{ínf}}$. Los puntos de $C_{\text{ínf}}$ se ordenan por abscisas en orden creciente y los de C_{sup} también por abscisas, pero en orden decreciente. En caso de coincidir en abscisa varios puntos del mismo subconjunto, se ordenan de menor a mayor por sus ordenadas. Finalmente, concatenando $p_{\text{mín}}$ con la lista ordenada de elementos de $C_{\text{ínf}}$, y a continuación $p_{\text{máx}}$

seguido de la lista ordenada de elementos de C_{sup}, se obtiene una poligonización de los puntos de C. El polígono resultante tiene la propiedad de ser monótono en la dirección de abscisas, lo cual quiere decir que ninguna recta vertical corta al polígono en más de dos puntos.

Existen unos cuantos algoritmos más para poligonizar un conjunto de puntos. Por ejemplo el que emplea las *capas convexas* del conjunto de puntos como estructura a partir de la cual obtiene una poligonización [1]. Pero el inconveniente que tienen todos ellos es que dan como resultado un polígono con unas propiedades muy particulares (monótonos, estrellados, espirales, convexos, etc.). Realmente, si queremos estos algoritmos para generar polígonos aleatorios a partir de conjuntos de puntos aleatorios, podemos decir que el problema está muy lejos de estar resuelto. Claro que la propia definición de polígono aleatorio tiene su complicación. Un generador de polígonos aleatorios debería poder generar cualquier polígono con la misma probabilidad prescindiendo sólo del tamaño y la orientación del polígono. Existen algunas aproximaciones al problema. Unas emplean algoritmos deterministas, otras métodos heurísticos, y también las hay que generan tipos particulares de polígonos como los polígonos monótonos o los polígonos ortogonales que tienen sus lados paralelos a los ejes (véanse [6, 19, 18]).

3. Transformaciones locales

Un problema interesante de combinatoria enumerativa consiste en obtener la lista de todas las poligonizaciones de un conjunto dado de puntos del plano. Disponer de ella, o de un método eficiente que la genere, permitiría disponer de un generador aleatorio de poligonizaciones. Es claro que una manera de obtenerla consiste en enumerar todas las permutaciones circulares de los puntos del conjunto y analizar cada una de ellas para descartar aquéllas que no se correspondan con polígonos simples. El problema es que resulta prohibitivo desde el punto de vista de la computación. Incluso con conjuntos con pocos puntos el método sería inviable en la práctica. Un grave inconveniente del método propuesto es que una proporción muy elevada de las permutaciones da lugar a polígonos no simples que hay que descartar. Es decir, la mayor parte de la ejecución del método se malgastaría generando y analizando candidatos no válidos.

En algunos problemas de geometría combinatoria similares a éste, como, por ejemplo, la enumeración de todas las *triangulaciones*[2] de un conjunto de puntos del plano, ha dado buen resultado la técnica de las transformaciones locales. Esta técnica consiste en construir un primer elemento de la lista y, a partir de él, transformándolo sucesivamente, obtener el resto. En el caso de las triangulaciones, una transformación local muy sencilla, el intercambio de una arista, permite obtener, partiendo de cualquier triangulación, todas las demás. El intercambio consiste en eliminar una arista compartida por dos triángulos en posición convexa y sustituirla por la otra diagonal del cuadrilátero convexo unión de los dos triángulos.

[2]Una triangulación de un conjunto de puntos S es un conjunto maximal de segmentos cuyos extremos son puntos de S y cuyos interiores son disjuntos dos a dos y disjuntos con S. Tal conjunto de segmentos subdivide la envolvente convexa de S en triángulos de interiores disjuntos dos a dos.

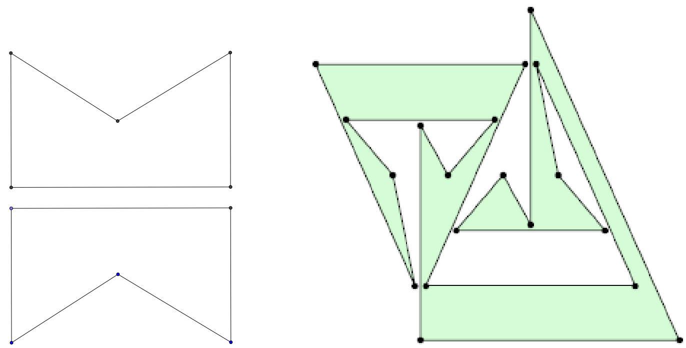

Figura 4: Izquierda: transformación I-V. Derecha: ejemplo de Hernando, Houle y Hurtado [15] en el que no se puede aplicar ninguna transformación I-V.

Lo interesante de esta técnica es que si, como en el caso descrito de las triangulaciones, la transformación que se efectúa para pasar de una configuración a la siguiente es de tamaño constante, es decir, el número de aristas que se intercambian es constante, el método resulta óptimo desde el punto de vista de la complejidad computacional, pues el tiempo total requerido es proporcional al número de elementos de la lista generada.

La piedra angular para poder aplicar un método como éste consiste en demostrar que mediante la transformación local correspondiente, aplicada sucesivas veces, es posible transformar cualquier configuración en cualquier otra. Para demostrar tal cosa, es frecuente emplear una estrategia de *pivote*. Es decir, se demuestra que desde cualquier configuración se puede alcanzar, tras las transformaciones pertinentes, una configuración canónica. Esta hace de pivote pues permite, pasando por ella, transformar una configuración en otra cualquiera. En el caso de las triangulaciones, la triangulación canónica es la triangulación de *Delaunay*[3].

La pregunta entonces es: ¿Existen transformaciones locales de tamaño constante que permitan transformar una poligonización en otra cualquiera de un mismo conjunto de puntos? Volviendo al juego de las gomas elásticas, se puede experimentar de la siguiente manera: Una vez colocada la goma elástica poligonizando los clavos, modificamos la solución soltando la goma de uno de los clavos de forma que éste sea el único que quede libre. Después estiramos la goma por otro sitio para conseguir que el clavo suelto sujete también la goma de forma diferente a como lo hacía antes. Estas transformaciones se denotan I-V pues en ellas se sustituyen dos aristas adyacentes por la arista que cierra el triángulo que definen y viceversa (véase la figura 4). Es una transformación de tamaño constante. Se eliminan tres aristas y se añaden otras tres. En el ejemplo de Hernando, Houle y Hurtado mostrado en la figura 4 no se puede realizar ninguna transformación de este tipo. Como mencionan en [15], no se conoce una transformación local de tamaño constante capaz de transformar cual-

[3]La triangulación de Delaunay se caracteriza por la condición de tener vacíos de puntos todos los interiores de los círculos circunscritos de sus triángulos.

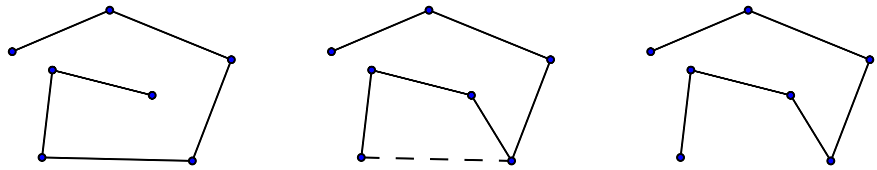

Figura 5: Transformación local en cadenas poligonales abiertas. Se añade una arista conectando uno de sus extremos a un vértice visible y se elimina la arista adecuada para obtener de nuevo una cadena poligonal abierta.

quier poligonización en otra[4]. Sólo existen soluciones parciales al problema. En [15] resuelven el problema para familias particulares de poligonizaciones y mencionan otros resultados previos similares.

No deja de ser sorprendente que la existencia de transformaciones locales de tamaño constante resulte más difícil de probar para las poligonizaciones que para estructuras aparentemente más complejas como las triangulaciones. Toda poligonización es un subgrafo de alguna triangulación (basta triangular el interior y el exterior del polígono). Sin embargo el recíproco no es cierto. En efecto, hay triangulaciones que no son grafos *hamiltonianos*[5], lo que quiere decir que no contienen como subgrafo ninguna poligonización de sus vértices. Este hecho impide emplear las transformaciones entre triangulaciones para obtener transformaciones entre poligonizaciones.

Terminamos esta sección con una propuesta que parece más sencilla: En lugar de polígonos, consideremos cadenas poligonales abiertas cuyos vértices sean los puntos de un conjunto dado. Como transformación local consideremos la siguiente: Uno de los extremos de la cadena se conecta con una arista a alguno de los vértices visibles desde él. En el grafo resultante se elimina una arista, distinta de la que se ha añadido, de forma que el grafo sea de nuevo una cadena. Nótese que para la eliminación no hay opción. La arista a eliminar queda determinada por la elección de la arista que se ha añadido (véase la figura 5). Conjeturamos que con esta transformación, que es un intercambio de una arista por otra, se puede pasar de una cadena a otra cualquiera con los mismos vértices. De forma más precisa, la conjetura es que se puede pasar de cualquier cadena a la cadena monótona en abscisas[6]. En la dirección web [7] (en la sección «cadenas poligonales») hay disponible un programa con el que se puede practicar y comprobar experimentalmente la conjetura.

[4]Recientemente se ha publicado un trabajo en el que se obtienen resultados con transformaciones que no son ni locales ni de tamaño constante (véase [9]), lo que da muestra del interés del problema así como de su dificultad.

[5]Un grafo es hamiltoniano si contiene un camino cerrado que recorre todos sus vértices sin repetir ninguno.

[6]Una cadena poligonal es monótona en abscisas si sus vértices aparecen ordenados por abscisas al recorrer la cadena de un extremo al otro.

4. Número de poligonizaciones

Nos planteamos ahora cuántas poligonizaciones diferentes tiene un conjunto de n puntos. Si no tuviéramos la condición de que el polígono sea simple, habría $(n-1)!/2$ poligonizaciones distintas, pues cada dos de las permutaciones circulares de los n puntos determinarían una poligonización. La condición de que el polígono sea simple es una condición topológica que reduce el número de poligonizaciones a una cantidad a lo sumo exponencial c^n. Las propiedades geométricas de los puntos que queremos poligonizar pueden afectar de manera decisiva en el número de poligonizaciones. Por ejemplo, la condición geométrica de los puntos del conjunto de estar en posición convexa, es decir que todos los puntos participan como vértices del cierre convexo, hace que el número de poligonizaciones se reduzca a uno: la única poligonización en este caso es la envolvente convexa del conjunto.

Contar el número de poligonizaciones que existen, bien para un conjunto determinado de n puntos, bien para conjuntos genéricos de n puntos, es un problema abierto del que existen algunas respuestas parciales. La cota superior del número de poligonizaciones que puede tener un conjunto de n puntos se ha ido ajustando en sucesivos trabajos. Se sabe que el número es exponencial c^n. Hay un buen número de trabajos en los que se obtienen cotas inferiores o superiores para la base c. Las cotas inferiores generalmente se han obtenido contando poligonizaciones de determinadas configuraciones de puntos. Así Akl obtuvo para c en 1979 el valor 2,27 [5] y García Olaverri, Noy y Tejel la mejoraron hasta 4,642 [12]. Sobre la cota superior de c el primer resultado fue 10^{13} en 1982 [4], mejorado, entre otros, por Santos y Seidel, que bajaron la cota a 199 [16]. Actualmente el mejor valor es 87, obtenido por Sharir y Welzl en 2006 [17]. Algunas de las cotas superiores proceden de resultados en los que se buscan cotas superiores para otras estructuras como *triangulaciones* o *emparejamientos* de conjuntos de puntos. Una buena referencia en la red que recopila información sobre el número de poligonizaciones de n puntos es la página de Demaine [10].

5. Peso de una poligonización

La *profundidad* de un punto respecto de un conjunto de puntos del plano mide la centralidad del punto en el conjunto. Hay varias maneras de definirla. Una forma clásica en Estadística de definir la profundidad de un punto respecto de una muestra bivariante es por medio de las capas convexas. Los puntos que son vértices de la envolvente convexa del conjunto se consideran de profundidad uno. Si se suprimen éstos de la muestra, los vértices de la envolvente convexa del conjunto que resulta son los de profundidad dos. De forma recursiva se definen los de profundidad k. Es decir, un punto tiene profundidad k si hay que eliminar $k-1$ capas convexas al conjunto para que aparezca en la envolvente convexa de los puntos que quedan. La profundidad de la muestra se define como la mayor de las profundidades de sus puntos. La profundidad de un conjunto de n puntos del plano puede variar entre uno y $\lceil n/3 \rceil$. Si los puntos están en posición convexa, todos tienen profundidad uno. Para alcanzar la máxima profundidad, las capas convexas deben estar formadas por el menor número de vértices, es decir, han de ser triángulos salvo la capa más profunda. De ahí el valor $\lceil n/3 \rceil$.

Si un segmento conecta dos puntos de un conjunto que tienen la misma profundidad, se dice que tiene peso cero. En general, el peso de un segmento que conecta dos puntos de profundidades i y j se dice que tiene peso $|i-j|$. Es decir, el peso mide la diferencia entre las profundidades de los extremos del segmento. De esta manera, a las poligonizaciones de un conjunto de n puntos se les puede asignar un peso que corresponde a la suma de los pesos de sus aristas.

En análisis de formas, el peso de un polígono se puede emplear como parámetro para medir lo complicada que es su forma. Cuanto menor sea el peso, más se acerca a una forma convexa, que se puede considerar la más sencilla. El peso de una poligonización es un parámetro que interesa optimizar en algunas aplicaciones. También tiene interés en sí mismo en problemas de Geometría combinatoria.

¿Cuál es el peso mínimo y el máximo que puede tener una poligonización de n puntos? El peso depende de la profundidad del conjunto de los puntos. Si la profundidad del conjunto es uno, quiere decir que los puntos están en posición convexa y la única poligonización posible es su envolvente convexa, que tiene peso cero. Si la profundidad del conjunto es k, el mínimo peso que puede tener una poligonización es $2(k-1)$. En efecto, veamos en primer lugar que ese valor se puede obtener para cualquier conjunto de puntos de profundidad k. Existe una forma de poligonizar un conjunto que emplea las capas convexas del conjunto como punto de partida (véase la figura 3). A partir de ellas, cada capa se conecta con la siguiente más profunda sustituyendo dos aristas a_i, b_i de la capa i y a_{i+1}, b_{i+1} de la capa $i+1$ por las aristas a_i, a_{i+1} y b_i, b_{i+1}. Las operaciones de intercambio de aristas como ésta son una herramienta básica muy útil en la teoría de grafos geométricos, como se ha mencionado en la sección 3. En [1] se demuestra que el intercambio de aristas descrito es siempre posible. De esta forma se obtiene una poligonización en la que el peso de todas las aristas es cero, salvo las que conectan capas convexas consecutivas que tienen peso uno. Como entre cada dos capas consecutivas hay exactamente dos aristas, el peso total es $2(k-1)$. Ahora hay que probar que no existe una poligonización de peso menor que $2(k-1)$ si el conjunto tiene profundidad k. Obsérvese que, sea cual sea la poligonización elegida, si la recorremos empezando en un vértice de la envolvente convexa, pasaremos por todos los puntos hasta volver de nuevo al de partida. Eso implica que llegaremos a cada una de las capas convexas y, en particular, a la de profundidad k. Para llegar de la primera capa a la capa k, necesariamente la suma de los pesos de las aristas recorridas será mayor o igual a $k-1$. Lo mismo ocurrirá para regresar de la capa k a la de partida. En consecuencia, el peso total será mayor o igual a $2(k-1)$.

Como hemos visto, el peso mínimo que puede tener una poligonización de un conjunto de puntos del plano es $2(k-1)$, siendo k la profundidad del conjunto. Además siempre se puede alcanzar ese peso mínimo empleando el método descrito para conectar los puntos. En el otro extremo la pregunta es: ¿Cuál es el peso máximo que se puede conseguir al poligonizar un conjunto de n puntos? En [1] se demuestra que asintóticamente el peso máximo que se puede alcanzar al poligonizar n puntos es $n^2/6$, y que se puede llegar a ese valor si n es múltiplo de 6. El máximo $n^2/6$ se

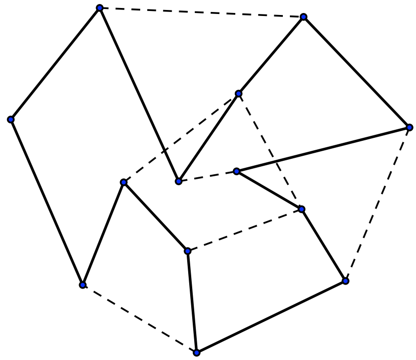

Figura 6: Sucesión de profundidades: $1, 3, 2, 1, 1, 3, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1$. En trazo discontinuo las capas convexas.

logra en configuraciones de puntos cuyas capas convexas son triángulos y hay una cantidad par de ellas. Naturalmente la forma de conectar los puntos es esencial para alcanzar el máximo.

6. Sucesiones de profundidades

Cada poligonización de un conjunto de n puntos determina una sucesión circular de n enteros comprendidos entre 1 y k, siendo k la profundidad del conjunto. La sucesión está formada por las profundidades de los vértices de la poligonización en el mismo orden en el que aparecen los puntos en el polígono. A esta sucesión se le llama *sucesión de profundidades* de la poligonización. En la figura 6 se muestra la sucesión de profundidades de un polígono.

Relacionados con las sucesiones de profundidades hay varios problemas de interés. Uno es la caracterización de estas sucesiones. ¿Qué propiedades tienen las sucesiones de profundidades? ¿Qué propiedades las caracterizan?

La sucesión $1, 1, \ldots, 1$ corresponde a un polígono convexo, ya que, como sabemos, todos sus vértices tienen profundidad uno. Ésta será siempre la sucesión de profundidades que se obtendrá al poligonizar un conjunto de puntos en posición convexa. La sucesión $1, 2, 1, 1, \ldots, 1$ es la que se obtiene siempre al poligonizar un conjunto en el que todos los puntos, salvo uno, están en la envolvente convexa. Es claro que si la profundidad del conjunto S es k, cada entero entre 1 y $k-1$ debe aparecer al menos tres veces en cualquier sucesión de profundidades asociada a una poligonización de S, pues todas las capas convexas, salvo la más profunda, deben tener al menos tres vértices.

Esta última propiedad no es suficiente para que una sucesión de enteros sea realizable como sucesión de profundidades. Basta ver que la sucesión $1, 3, 1, 3, 1, 2, 2, 2$ no es realizable. En efecto, los dos puntos de la tercera capa convexa deben estar conectados por segmentos con los puntos de la primera capa, y sólo con éstos. Pero como los tres puntos de la segunda capa deben estar conectados entre sí, las conexiones entre las capas 1 y 3 deben tener lugar a través de una única arista de la segunda capa convexa. Esta restricción implica que los tres puntos de la primera capa deben estar en un semiplano de los determinados por la arista mencionada de la segunda capa, pero que no contiene al tercero de los puntos de la segunda capa. Por tanto es imposible que la segunda capa convexa esté contenida en la primera, lo cual contradice la definición de las capas convexas.

La sucesión $1, 3, 1, 3, 1, 2, 2, 2$ es, de hecho, la más sencilla de las sucesiones no realizables cumpliendo la condición de tener al menos tres elementos de cada valor entero salvo el mayor de ellos. Cualquier sucesión con menos elementos o menos capas convexas que ésta es realizable. Curiosamente la sucesión $1, 3, 1, 3, 1, 2, 2, 2, 2$ es realizable, como se muestra en [2].

El problema de caracterizar las sucesiones de enteros que son realizables como sucesiones de profundidades sigue abierto. Hay resultados parciales. En [1] se prueba que las sucesiones *unimodales*[7] son realizables, siempre que cumplan la condición de tener al menos tres elementos de cada nivel salvo quizás el último. En [8] se demuestra que las sucesiones en las que la diferencia entre dos términos consecutivos no es mayor que uno son siempre realizables y en [2] se generalizan los casos anteriores y se definen otras familias de sucesiones realizables.

7. Conectando discos

Pensemos ahora qué pasa si en lugar de puntos queremos conectar otros objetos de dimensión mayor. Por ejemplo objetos unidimensionales como segmentos, u objetos bidimensionales como triángulos, o discos.

La idea sigue siendo jugar a conectar los objetos mediante una goma elástica que tiende a contraerse si no se lo impiden los objetos. Pensemos en unos discos de madera de un grosor suficiente para sujetar la goma elástica. El juego consiste en pegar los discos en un tablero sin que se toquen entre ellos y a continuación tratar de colocar una goma elástica de forma que toque a todos ellos una vez alcanzada su posición de equilibrio, pero sin cruzarse consigo misma.

Si pensamos en discos muy pequeños, el problema se reduce al de las poligonizaciones de puntos (véase la figura 7). A partir de esta idea, uno puede pensar en reducir los discos de tamaño hasta que se asemejen a puntos (lo cual podría hacerse considerando sus centros), poligonizar, con alguno de los algoritmos que conocemos, esos puntos y, finalmente, recuperar el tamaño de los discos. Como se muestra en la figura 7 esta idea no funciona. Puede ocurrir que al recuperar los discos su tamaño, la goma elástica se encuentre consigo misma dejando de ser simple.

El problema tiene una apariencia similar al de las poligonizaciones, pero no es así. Es un problema bien distinto. Veamos algunas diferencias.

En la poligonización de puntos, los puntos que pertenecen a la envolvente convexa siempre son vértices convexos de cualquier poligonización. La figura 8 muestra que

[7]Una sucesión de enteros $a_1, \ldots, a_n$ es unimodal si $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_i \geq a_{i+1} \geq \cdots \geq a_n$ para algún valor i, $1 \leq i \leq n$.

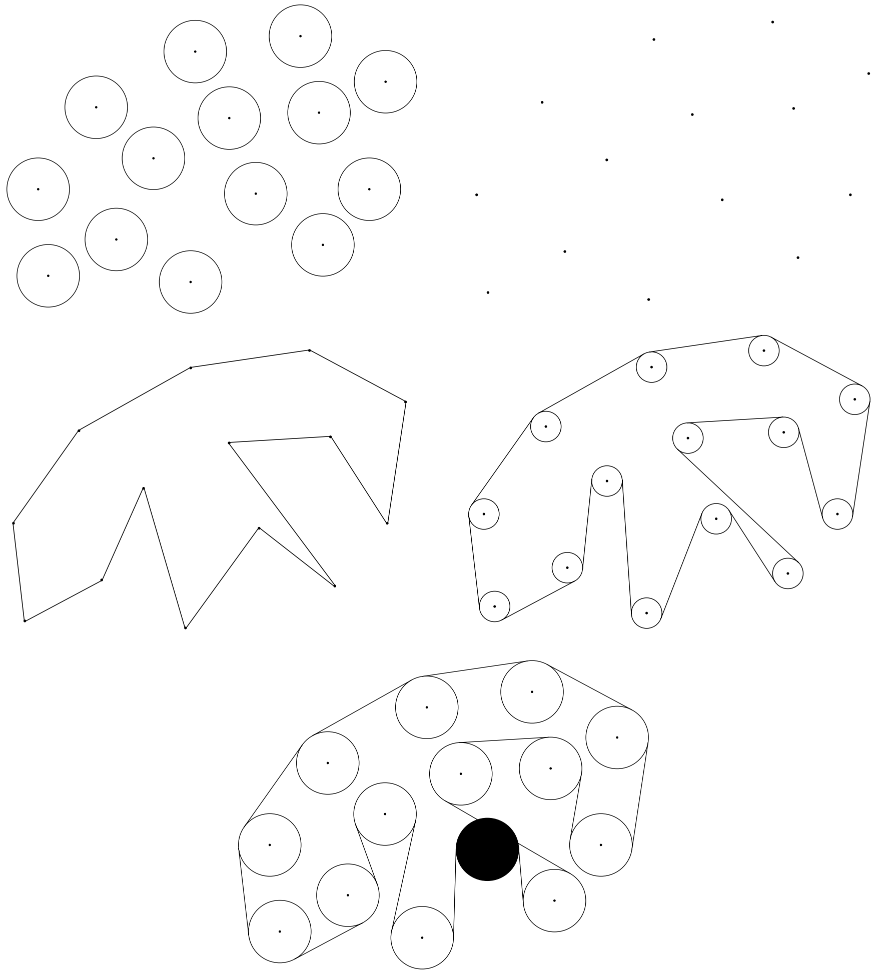

Figura 7: No toda poligonización de los centros da lugar a una solución para los discos.

puede haber varias alternativas a la hora de conectar los discos que participan en la envolvente convexa, por lo que no siempre determinan arcos convexos.

Además, al recorrer cualquier poligonización, los vértices de la envolvente convexa siempre aparecen en ella en el mismo orden en el que lo hacen al recorrer la envolvente convexa. En el caso de discos no siempre es así. Puede ocurrir que un disco aparezca varias veces en la envolvente convexa si es suficientemente grande con respecto a los demás (véase la figura 9).

Otra diferencia, en el caso de discos, es que siempre que no tengan todos radio cero, el hecho de estar alineados no es un inconveniente sino todo lo contrario. Siempre se pueden conectar cuando los centros están alineados y alguno no tiene radio cero.

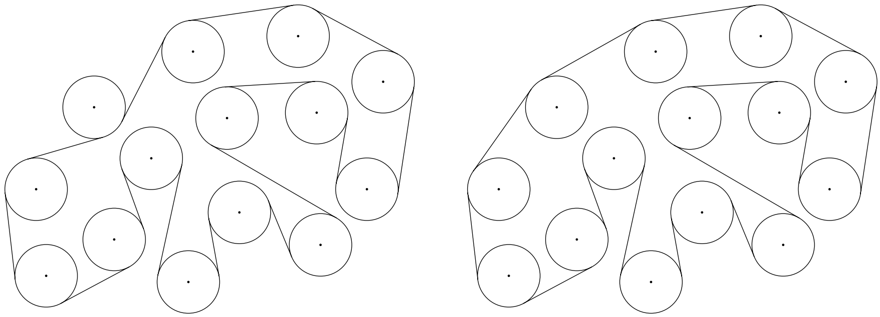

Figura 8: Diferentes opciones para conectar los discos de la envolvente convexa.

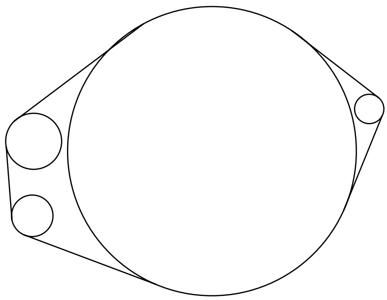

Figura 9: Un disco puede aparecer varias veces en la envolvente convexa.

Pero posiblemente lo que más diferencia el problema con discos es la existencia de casos no alineados para los que no hay solución. Hay conjuntos de discos disjuntos dos a dos que no admiten ser conectados con una goma elástica simple. En la figura 10 se muestra un ejemplo con 7 discos. No se conoce un ejemplo no realizable con menos de 7 discos. En la misma figura se muestra un ejemplo con segmentos que tampoco tiene solución para indicar que el problema puede no tener solución también con figuras unidimensionales.

En el ejemplo mostrado, es esencial la diferencia de tamaño de los discos. No se conoce un ejemplo no realizable en el que los discos sean todos del mismo tamaño. Tampoco se conoce si existe siempre solución en el caso de discos de igual radio. Conjeturamos que sí, que todo conjunto de discos de igual radio, disjuntos dos a dos, se puede conectar con una goma elástica simple. Pero hasta la fecha no hay una demostración.

8. Comentarios finales

Se han presentado varios problemas de carácter topológico - geométrico - combinatorio relacionados con las poligonizaciones de puntos en el plano. Por supuesto que la generalización de estos problemas a dimensiones mayores tienen interés (y

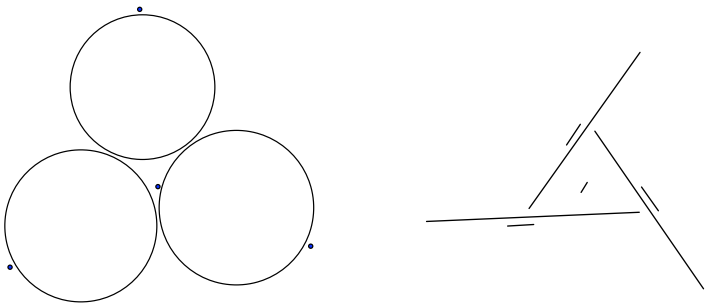

Figura 10: Izquierda: Conjunto de 7 discos que no se pueden conectar con una goma elástica simple. Los puntos representan 4 discos suficientemente pequeños. En particular, el disco que está rodeado por los tres grandes, tiene un tamaño y posición tales que no se ve desde el exterior de los discos, es decir, no existe una semirrecta que comience en él y que no corte a alguno de los discos grandes. Derecha: Ejemplo similar con segmentos.

también más dificultad). Véase, por ejemplo, [3], sobre el caso tridimensional.

La intención de este artículo es provocar el interés del lector por los problemas abiertos que se mencionan en él. Alguno de ellos, como el de los intercambios de aristas en cadenas poligonales abiertas que transforman una cadena en otra con los mismos vértices, deberían tener respuesta si la citada intención tiene éxito.

También la conjetura de que todo conjunto de discos de igual radio disjuntos dos a dos se puede conectar con una goma elástica debería ser demostrada por alguno de los lectores.

En la práctica, en ejemplos concretos, los dos problemas se resuelven fácilmente. Pero, como dijo Groucho Marx, *«Claro que lo entiendo. Incluso un niño de cuatro años podría entenderlo. ¡Que me traigan un niño de cuatro años!»*

Agradecimientos: El autor agradece a Gregorio Hernández Peñalver y a Ferran Hurtado los comentarios y sugerencias que han servido para mejorar este artículo.

Referencias

[1] M. Abellanas, J. García López, G. Hernández Peñalver, F. Hurtado, O. Serra y J. Urrutia, Onion Polygonizations, *Inf. Process. Lett.* **57(3)** (1996), 165–173.

[2] M. Abellanas, A. García Olaverri y F. J. Tejel, Notas sobre sucesiones de profundidades realizables, *Actas de los VII Encuentros de Geometría Computacional*, Universidad Politécnica de Madrid (1997), 121–130.

[3] P. Agarwal, F. Hurtado, G. Toussaint y J. Trias, On Polyhedra Induced by Point Sets in Space, *Discrete Applied Mathematics* **156(1)** (2008), 132–144.

[4] M. Ajtai, V. Chvátal, M. M. Newborn y E. Szemerédi, Crossing-free subgraphs, publicado en *Theory and Practice of Combinatorics*, volumen **12** de *Annals of Discrete Mathematics* y volumen **60** de *North-Holland Mathematics Studies* (1982), 9–12.

[5] S. G. Akl, A lower bound on the maximum number of crossing-free Hamiltonian cycles in a rectilinear drawing of K_n, *Ars Combinatoria* **7** (1979), 7–18.

[6] T. Auer y M. Held, Heuristics for the Generation of Random Polygons, *Proc. 8th Canad. Conf. Comput. Geometry*, Carleton University Press, F. Fiala, E. Kranakis y J.-R. Sack (eds.), Ottawa, Canada (1996), 38–44.

[7] U. Berzal y J. de Diego, Intercambios de aristas en grafos geométicos (Proyecto de la Facultad de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid, dirigido por M. Abellanas), `http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/tfcs/flips/Intercambios/Intercambios.html`

[8] D. Bremner, E. Guévremont y T. Shermer, A note on the characterization of depth sequences of simple polygons, *Snapshots of Computational Geometry* **3**, McGill University, Montreal (1994), 92–99.

[9] M. Damian, R. Flatland, J. O'Rourke y S. Ramaswami, Connecting Polygonizations via Stretches and Twangs, *25th Symp. on Theor. Aspects of Computer Science (STACS)*, Bordeaux, IBFI Schloss Dagstuhl (2008), 217–228.

[10] E. Demaine, Simple Polygonizations, `http://erikdemaine.org/polygonization/`

[11] S. P. Fekete, On simple polygonalizations with optimal area, *Discrete and Computational Geometry* **23** (2000), 73–110.

[12] A. García Olaverri, M. Noy y A. Tejel, Lower bounds on the number of crossing-free subgraphs of K_n, *Proceedings of the 7th Canadian Conference on Computational Geometry* (1995), 97–102.

[13] A. García Olaverri y A. Tejel, A lower bound for the number of polygonizations of N points in the plane, *Ars Combinatoria* **49** (1998), 3–19.

[14] M. R. Garey y D. S. Johnson, *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness,* W. H. Freeman, New York (1979).

[15] C. Hernando, F. Hurtado y M. Houle, On Local Transformation of Polygons with Visibility Properties, *Theoretical Computer Science* **289(2)** (2002), 919–937.

[16] F. Santos y R. Seidel, A better upper bound on the number of triangulations of a planar point set, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* **102(1)** (2003), 186–193.

[17] M. Sharir y E. Welzl, On the Number of Crossing-Free Matchings, Cycles, and Partitions, *SIAM J. Comput.* **36(3)** (2006), 695–720.

[18] A. P. Tomás y A. L. Bajuelos, Generating Random Orthogonal Polygons, *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, Springer-Verlag **3040** (2004), 364–373.

[19] C. Zhu, G. Sundaram, J. Snoeyink y J. S. B. Mitchell, Generating Random Polygons with Given Vertices, *Computational Geometry T&A* **6** (1996), 277–290.

Manuel Abellanas, Dpto. de Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid

Correo electrónico: `manuel.abellanas@upm.es`

Página web: `http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas`