El teorema de convergencia de Vitali sobre integración término a término*

por

J. R. Choksi

1. Introducción

En este artículo discutimos un teorema de convergencia debido a Vitali [29] que apareció en 1907, antes de que Lebesgue demostrara el teorema de la convergencia dominada. Este teorema es en varios sentidos más fuerte que los teoremas de convergencia usuales, y merece un reconocimiento mayor del que posee. Vitali demuestra que si una sucesión de funciones integrables f_n converge c.t.p. a una función integrable f (en un espacio de medida finita), entonces las integrales de f_n sobre cualquier subconjunto medible convergen a la correspondiente integral de f si y sólo si las integrales son uniformemente absolutamente continuas. La parte difícil es demostrar que la convergencia de las integrales sobre cualquier subconjunto medible implica la continuidad uniforme absoluta. Posteriormente (en 1915) de la Vallée Poussin [27] simplificó la demostración de Vitali (esto tampoco es bien conocido), y en 1922 Hahn [10] logró demostrar el mucho más conocido teorema de Vitali-Hahn-Saks. Actualmente, si se menciona el artículo de Vitali, es generalmente o bien como (i) un prerrequisito del teorema de Vitali-Hahn-Saks, o bien como (ii) un resultado mucho más débil, según el cual la convergencia L^1 es equivalente a la continuidad absoluta uniforme. Obsérvese que el resultado de Vitali demuestra que cuando f_n converge c.t.p. a f, la convergencia débil implica la convergencia fuerte. Nosotros ofrecemos aquí, en lenguaje y notación moderna, la demostración original de Vitali, la simplificación debida a de la Vallée Poussin, y finalmente, la demostración original del teorema de Vitali-Hahn-Saks, debida a Hahn. Esta última tampoco es muy conocida, al haber sido desbancada por la demostración de Saks [25] (y Banach [1]) basada en el lema de la Categoría de Baire. Este artículo no está dirigido a expertos en la historia del tema sino a la amplia mayoría de analistas reales que, aunque enseñan esta materia, desconocen la historia o la existencia de estas demostraciones. Los números entre corchetes hacen referencia a la bibliografía que se ha listado al final del artículo.

*Este artículo es la traducción al español de: J. R. Choksi, Vitali's convergence theorem on term by term integration, *L'Enseignement Mathématique* **47** (2001) 269–285. Queremos expresar nuestro sincero agradecimiento no sólo a los editores de *L'Enseignement Mathématique* sino al autor, J. R. Choksi, por habernos concedido su permiso para la traducción, que ha sido realizada por J. M. Almira.

Los tres teoremas de convergencia estándar son:

1. **El teorema de la convergencia monótona (MCT).** Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones no negativas medibles sobre un conjunto medible E con $f_n \leq f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\int_E \lim f_n = \lim \int_E f_n$.
2. **El lema de Fatou** (Fatou). Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas sobre un conjunto medible E, entonces $\int_E \liminf f_n \leq \liminf \int_E f_n$.

   [La no-negatividad en Fatou y las desigualdades en MCT podrían darse c.t.p.]
3. **El teorema de la convergencia dominada (DCT)** Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles sobre un conjunto medible E tales que $f_n \to f$ c.t.p. en E y si existe una función g, integrable en E con $|f_n| \leq g$ c.t.p. en E, entonces $\int_E f = \lim \int_E f_n$.

   Un caso especial es

   El teorema de la convergencia acotada (BCT). Si E es un conjunto de medida *finita*, $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles en E tales que $f_n \to f$ c.t.p. en E, y si existe un número real $M > 0$ con $|f_n| \leq M$ c.t.p. en E, entonces $\int_E f = \lim \int_E f_n$.

Normalmente los resultados anteriores se demuestran en este orden, aunque a veces BCT se demuestra antes. Posteriormente aparecen otros resultados que involucran la convergencia en media. DCT es el resultado que se usa con más frecuencia en la práctica (aunque quizás MCT posee un significado teórico más profundo: véase lo que sigue).

Históricamente, las cosas fueron diferentes. La tesis de Lebesgue [14] (a la que nos referimos como *'thèse'* en lo que sigue) apareció en 1902 en forma de artículo en *Annali di Matematica* bajo el título *Intégrale, longueur, aire.* Los intereses fundamentales de Lebesgue eran las diferentes formas de construir la integral, o primitiva, la diferenciación y el teorema fundamental del cálculo, y completar el estudio de la medida, iniciado y llevado bastante lejos por E. Borel. Los teoremas de convergencia no eran su mayor interés, y la tesis sólo contiene BCT en la página 259.

Esbozo de su demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea[1] $F_n = \bigcup_{j \geq n} \{|f_j - f| \geq \varepsilon\}$. Entonces $m(F_n) \to 0$, ya que $f_n \to f$ c.t.p. ($m(F_n)$ denota la medida de F_n). Si $E_n = E \backslash F_n$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n - \int_E f\right| &\leq \int_E |f_n - f| = \int_{E_n} |f_n - f| + \int_{F_n} |f_n - f| \\ &\leq \varepsilon m(E) + 2M m(F_n) \\ &< \varepsilon m(E) + 2\varepsilon M \quad \text{para } n \text{ suficientemente grande.}\end{aligned}$$ □

[1]A lo largo del artículo se hace uso de la siguiente notación: si f es una función definida sobre el conjunto E, entonces $\{f \geq M\}$ denota el conjunto $\{x \in E : f(x) \geq M\}$. Si P es una propiedad numérica general, $\{P(f)\}$ denota el conjunto $\{x \in E : P(f(x))\}$. (N. del traductor).

Lebesgue impartió clases sobre su nuevo trabajo en el Collège de France en 1902–03, y estas clases fueron publicadas en forma de libro bajo el título *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1.ª edición 1904 [15], al cual nos referimos en lo sucesivo como *Leçons I*). De nuevo, el único teorema de convergencia que se demuestra es BCT, en p. 114. Pero en el último capítulo (Capítulo VII) de *Leçons I* (Capítulo VII también en la versión revisada 2.ª edición, de 1928 [19], a la que nos referimos como *Leçons II*), Lebesgue enuncia el *Problema de la integración*, seis propiedades que una integral definida sobre cualquier clase adecuada de funciones acotadas debe poseer. La propiedad (6) es la propiedad de convergencia: para f_n, $f \geq 0$ y acotadas, si $f_n \leq f_{n+1}$ para todo n y $f_n \uparrow f$ entonces $\int f_n \to \int f$. Por supuesto esta versión restringida de MCT para funciones acotadas se sigue directamente de BCT. [El mejor estudio histórico de la teoría de integración hasta 1910 es Hawkins [12].]

En 1906 (cuatro años después de que la tesis de Lebesgue fuera publicada), Beppo Levi [20] demostró MCT e independientemente Fatou [7] demostró su lema. El artículo de Levi es breve y de claridad cristalina, ¡incluso si tu italiano es elemental!

Esbozo de su demostración. Sea $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ y $f = \lim f_n$ en E. Supongamos que $m(E) < \infty$. Sean $f^k = \min(f, k)$, $f_n^k = \min(f_n, k)$, $k \in \mathbb{N}$, y sean $a_k = \int_E f^k$, $a_{n,k} = \int_E f_n^k$. Entonces $a_{n,k}$ es creciente en n para k fijo, y creciente en k para n fijo, de modo que $\lim_n \lim_k a_{n,k} = \lim_k \lim_n a_{n,k}$ independientemente de si los límites son finitos o infinitos. Como f_n^k, f^k están acotadas por k (y por supuesto son ≥ 0), BCT nos da $\lim_n a_{n,k} = a_k = \int_E f^k$ para cada k. Si f y por tanto, también f_n, es integrable, entonces $\lim_k a_k = \int_E f$, $\lim_k a_{n,k} = \int_E f_n$ y, por tanto, $\int_E f = \int_E \lim f_n = \lim \int_E f_n$, por la igualdad de los límites iterados. Esto sucede si cada límite iterado es finito, en particular, si $\lim_n \int_E f_n$ es finito. Si no, ambos límites iterados son infinitos y $\lim_n \int_E f_n = +\infty$. □

La demostración de Fatou de su lema es muy parecida. Debería observarse que el largo artículo de Fatou es uno de los más importantes del siglo. Por primera vez la nueva teoría de integración se aplica a la teoría de funciones de variable compleja y también hay importantes aplicaciones al estudio de las series trigonométricas.

No es hasta 1908 que DCT aparece por primera vez en Lebesgue (1908) [16], p. 9–10, con un esbozo de la demostración. Lo mismo sucede en Lebesgue (1909) [17] al principio de p. 50. En estos artículos Lebesgue intenta aplicar sus nuevos resultados y encuentra BCT insuficiente. En Lebesgue (1910) [18], en § 15 de la página 375, la demostración de DCT se da con más detalle, todavía para conjuntos de medida finita.

Esbozo de su demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es integrable en E, existe un número $M > 0$, tal que $\int_F g < \varepsilon$, donde $F = \{g > M\}$. Entonces $\int_F |f_n - f| < 2\varepsilon$ y sobre $E \backslash F$ el resultado se sigue de BCT. □

Obsérvese que todos los teoremas demostrados hasta ahora han sido enunciados y probados para conjuntos E de medida *finita*. No parece que en la época hubiera por parte de nadie mucho interés por extender estos resultados y demostraciones para el caso $m(E) = +\infty$. Sin embargo (excluyendo, por supuesto, BCT) esto se hace fácilmente.

2. Teorema de convergencia de Vitali

En 1907, *antes* de que Lebesgue anunciara DCT, apareció un notable artículo de G. Vitali [29], que, en mi opinión, no ha recibido suficiente atención, ni siquiera de Hawkins. En él Vitali demuestra el siguiente resultado:

Sea E un conjunto de medida finita (la finitud es esencial aquí). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables tal que $f_n \to f$ c.t.p. con f finita c.t.p. Entonces f es integrable y $\int_F f_n \to \int_F f$ para todo subconjunto medible F de E, si y sólo si las integrales $\int_A f_n$ son uniformemente absolutamente continuas (uniformemente en n): dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $m(A) < \delta$, entonces $\left|\int_A f_n\right| < \varepsilon$ para todo n.

Esto implica que $\int_A |f_n| < 2\varepsilon$. Vitali llama a las sucesiones de funciones que verifican esta propiedad *equi-absolutamente continuas.* Obsérvese que este resultado se generaliza directamente a cualquier espacio de medida finita.

Vitali primero demuestra que la continuidad absoluta uniforme es suficiente para garantizar que $\int_F f_n \to \int_F f$ para todos los subconjuntos medibles F de E.

Esbozo de su demostración. Para $h \in \mathbb{N}$, sea[2] $G_h = \{|f_n| > 2^h \text{ para algún } n\}$. Si $\Gamma_h = E \backslash G_h$, entonces la sucesión $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en Γ_h para todo $h \in \mathbb{N}$. Así pues, en todos los subconjuntos medibles de Γ_h, la convergencia de las integrales se sigue de BCT. Por otra parte, G_h es una sucesión decreciente de conjuntos y $m(\bigcap_h G_h) = 0$, de modo que $m(G_h) \downarrow 0$. Se sigue que para h suficientemente grande la condición de continuidad absoluta uniforme implica que la contribución de las integrales sobre los conjuntos G_h es pequeña. □

Vitali demuestra entonces la necesidad de la condición de continuidad absoluta uniforme cuando las funciones f_n son todas no negativas.

Esbozo de su demostración. Si las $\int f_n$ no son uniformemente absolutamente continuas, entonces para algún $\varepsilon > 0$, existe, para cada $\delta > 0$, un conjunto medible F con $m(F) < \delta$ y $n \in \mathbb{N}$ con $\int_F f_n > \varepsilon$. Sean $\delta_i > 0$ tales que $\sum \delta_i < \infty$. Para cada δ_i, existen un conjunto medible $G_i \subseteq E$ y $n_i \in \mathbb{N}$ tales que $m(G_i) < \delta_i$ y $\int_{G_i} f_{n_i} > \varepsilon$. Sea $\Gamma_r = \bigcup_{i=r}^{\infty} G_i$. Entonces Γ_r decrece con r y $m(\Gamma_r) < \sum_{i=r}^{\infty} \delta_i \to 0$ cuando $r \to \infty$. Para todo $i \geq r$, $\int_{\Gamma_r} f_{n_i} > \varepsilon$. Como $f_{n_i} \to f$ c.t.p. cuando $i \to \infty$ y $\int_{\Gamma_r} f_{n_i} \to \int_{\Gamma_r} f$ por hipótesis, obtenemos que para cada r, $\int_{\Gamma_r} f \geq \varepsilon > 0$. Sea $\Gamma = \bigcap_{r=1}^{\infty} \Gamma_r$. Entonces $m(\Gamma) = 0$, pero $\int_\Gamma f \geq \varepsilon > 0$. Contradicción. □

Finalmente Vitali demuestra la necesidad en el caso general. Si $f_n \to f$ c.t.p. en E y las f_n son *completamente integrables* en E, i.e. $\int_F f_n \to \int_F f$ para todo subconjunto medible F de E, entonces las $\int f_n$ son uniformemente absolutamente

[2] Es decir, $G_h = \{x \in E : \exists n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| > 2^h\}$.

continuas, i.e. dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que, si $m(A) < \delta$, entonces $\left|\int_A f_n\right| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Esta es la parte más profunda y difícil del artículo de Vitali y es en cierto sentido «nueva» ¡incluso transcurridos 93 años!)

Demostración (Vitali). Todos los conjuntos que aparecen en esta demostración serán medibles, incluso cuando esto no se establezca de forma explícita.

Fase I. Si $f_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya hemos visto antes que el resultado es cierto.

Fase II. Supongamos ahora que $f > 0$ c.t.p. en E. Podemos asumir que $f > 0$ en *todo* E. Observemos antes que si $f_n \to f$ acotadamente entonces BCT implica que $\int_E |f_n - f| \to 0$ cuando $n \to \infty$, y por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $F \subseteq E$ y todo $n \geq N$, tenemos que $\left|\int_F f_n - \int_F f\right| < \varepsilon$.

Sea $G_n = \{0 < f_j < 2^n,\ \forall j \geq n\}$. Entonces $G_n \subseteq G_{n+1}$ para todo n y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Se sigue que $E \backslash G_n \downarrow \emptyset$ y $m(E\backslash G_n) \downarrow 0$.

Ahora, dado $\sigma > 0$, existe $m(n,\sigma)$ tal que si $\Gamma_n \subseteq G_n$ entonces $\left|\int_{\Gamma_n} f_j - \int_{\Gamma_n} f\right| < \sigma$ para todo $j \geq m(n,\sigma)$. Sea $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \downarrow 0$. Podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$ tal que para todo subconjunto Γ_{n_i} de G_{n_i},

$$\left|\int_{\Gamma_{n_i}} f_j - \int_{\Gamma_{n_i}} f\right| < \varepsilon_i \quad \text{para } j \geq n_{i+1}. \tag{$\dagger$}$$

Para todo entero positivo $n > n_2$, existe un único $i \in \mathbb{N}$ tal que $n_{i+1} \leq n < n_{i+2}$. Para tal n, tomamos

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{si } x \in G_{n_i}, \\ 0, & \text{si } x \in E\backslash G_{n_i}. \end{cases}$$

Sean Γ un subconjunto de E y $\Gamma_{n_i} = G_{n_i} \cap \Gamma$. Para i fijo,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma_{n_i}} g_k = \lim_{k\to\infty} \int_{\Gamma_{n_i}} f_k = \int_{\Gamma_{n_i}} f\,.$$

Si $n_{i+1} \leq n < n_{i+2}$, entonces $\int_{\Gamma_{n_i}} g_n = \int_\Gamma g_n$ y por tanto, utilizando (†),

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma g_n = \lim_{i\to\infty} \int_{\Gamma_{n_i}} f = \int_\Gamma f = \int_\Gamma \lim g_n\,.$$

Así pues, las g_n son completamente integrables en E y como $g_n \geq 0$ para todo n, se sigue de la Fase I que las $\int g_n$ son uniformemente absolutamente continuas en E. Pongamos $\phi_n = f_n - g_n$. Las ϕ_n son completamente integrables en E. Para completar la demostración de la Fase II debemos probar que las $\int \phi_n$ son uniformemente absolutamente continuas. Obsérvese que si $n_{i+1} \leq n < n_{i+2}$, entonces $\phi_n(x) = 0$ para todo $x \in G_{n_i}$. Así pues, para todo $x \in E$, $\lim \phi_n(x) = 0$, y para cualquier subconjunto medible $\Omega \subset E$, $\int_\Omega \phi_n \to 0$.

Supongamos que las $\int \phi_n$ *no* son uniformemente absolutamente continuas. Entonces existe $\sigma > 0$ tal que para todo $\mu > 0$ y todo $N \in \mathbb{N}$, existen $\Gamma \subseteq E$ con

$m(\Gamma) < \mu$ y $n > N$ tales que $\left|\int_\Gamma \phi_n\right| > \sigma$. Sean $\eta_1, \eta_2, \ldots$ estrictamente positivos, y tales que $\sum \eta_i < \sigma/2$. Sea Γ_1 un subconjunto de E para el que existe $t_1 \in \mathbb{N}$ con $\left|\int_{\Gamma_1} \phi_{t_1}\right| > \sigma$. Como $\lim_{i\to\infty} \int_{G_{n_i}\cap\Gamma_1} \phi_{t_1} = \int_{\Gamma_1} \phi_{t_1}$, podemos encontrar $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\int_{G_{n_{i_1}}\cap\Gamma_1} \phi_{t_1}\right| > \sigma$. Ahora, existe $\mu_1 > 0$ tal que si $m(\Gamma) < \mu_1$, entonces $\left|\int_\Gamma \phi_{t_1}\right| < \eta_1$. Debido a nuestra asunción, existen Γ_2 tal que $m(\Gamma_2) < \mu_1$ y $t_2 \geq n_{i_1+1}$ tal que $\left|\int_{\Gamma_2} \phi_{t_2}\right| > \sigma$. Utilizando el mismo argumento, se ve que existe i_2 (necesariamente $> i_1$) tal que $\left|\int_{G_{n_{i_2}}\cap\Gamma_2} \phi_{t_2}\right| > \sigma$.

Ahora, existe $\mu_2 > 0$ tal que, si $m(\Gamma) < \mu_2$, entonces

$$\left|\int_\Gamma \phi_{t_j}\right| < \eta_2\,,\ j = 1, 2\,.$$

Existe un subconjunto Γ_3 con $m(\Gamma_3) < \mu_2$ y $t_3 \geq n_{i_2+1}$, tal que $\left|\int_{\Gamma_3} \phi_{t_3}\right| > \sigma$. De nuevo podemos encontrar $i_3 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\int_{G_{n_{i_3}}\cap\Gamma_3} \phi_{t_3}\right| > \sigma$. Ahora, existe $\mu_3 > 0$ tal que, si $m(\Gamma) < \mu_3$, entonces

$$\left|\int_\Gamma \phi_{t_j}\right| < \eta_3\,,\ j = 1, 2, 3\,.$$

Continuamos de esta forma para obtener una sucesión creciente $i_j, \mu_j > 0$, $t_j \geq n_{i_{j-1}+1}$ y conjuntos Γ_j tales que $m(\Gamma_j) < \mu_{j-1}$ y $\left|\int_{\Gamma_j} \phi_{t_k}\right| < \eta_{j-1}$, $k = 1, 2, \ldots, j-1$, pero $\left|\int_{G_{n_{i_j}}\cap\Gamma_j} \phi_{t_j}\right| > \sigma$. Sea

$$\Omega_j = \{x \in G_{n_{i_j}} \cap \Gamma_j \text{ tal que } \phi_{t_j}(x) \neq 0\}.$$

Afirmamos que los conjuntos Ω_j son disjuntos. Como $t_j \geq n_{i_{j-1}+1}$ tenemos que $\phi_{t_j} = 0$ en $G_{n_{i_{j-1}}}$ y por tanto $\phi_{t_{j+1}} = 0$ en $G_{n_{i_j}}$. De modo que $\Omega_{j+1} \cap G_{n_{i_j}} = \emptyset$. Como G_n crece con n, i.e. $G_n \subseteq G_{n+1}$ para todo n, se sigue que $\Omega_{j+1} \cap \Omega_k = \emptyset$ si $k = 1, 2, \ldots, j$ y por tanto los Ω_j son todos disjuntos. Tomemos $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$. Entonces, como $\phi_{t_j} = 0$ en $\Omega_1, \ldots, \Omega_{j-1}$,

$$\int_\Omega \phi_{t_j} = \int_{\Omega_j} \phi_{t_j} + \sum_{h=1}^\infty \int_{\Omega_{j+h}} \phi_{t_j}\,.$$

Pero $\left|\int_{\Omega_j} \phi_{t_j}\right| > \sigma$ y $\left|\int_{\Omega_{j+h}} \phi_{t_j}\right| < \eta_{j+h-1}$, de modo que $\left|\sum_{h=1}^\infty \int_{\Omega_{j+h}} \phi_{t_j}\right| < \sigma/2$.

Por tanto $\left|\int_\Omega \phi_{t_j}\right| > \sigma/2$ para todo j. Pero como las ϕ_n son completamente integrables y $\phi_n(x) \to 0$ para todo $x \in E$ se sigue que $\int_\Omega \phi_{t_j} \to 0$ cuando $j \to \infty$. Esto es una contradicción, lo que completa de demostración de la Fase II.

Fase III. En el caso general, pongamos $g_n = f_n - f + 1$. Entonces $g_n \to 1$ c.t.p. en E y g_n es completamente integrable. Por tanto, como se ha visto en la Fase II, el resultado es cierto para las g_n, i.e., las $\int g_n$ son uniformemente absolutamente continuas. Se sigue que sucede lo mismo para las $\int f_n$, completando la demostración. $\square$

2.1. Comentarios

El concepto de integrabilidad completa de una sucesión es más débil que la convergencia secuencial débil en L^1. Por supuesto, Vitali no estaba al corriente en 1907 de la convergencia en L^1 (fuerte o débil) y su significado. Utilizando la demostración de Vitali de que la integrabilidad completa implica la continuidad absoluta uniforme, vemos que también implica la convergencia en L^1. Pero una demostración *directa* de que la integrabilidad completa implica la convergencia L^1 (sin hacer uso del resultado de Vitali) parece difícil.

Un hecho a destacar en este artículo es que todos los resultados se enuncian y demuestran en términos de series de funciones en vez de sucesiones. Así pues, tenemos que observar que una «serie cuyas sumas parciales son todas no negativas» se corresponde con una sucesión de términos no negativos y *no* confundir esto con «una serie de términos no negativos», lo que se corresponde, por supuesto, con ¡una sucesión creciente de términos no negativos!

El teorema de Vitali es obviamente una generalización de BCT. Él observa que el teorema MCT de Beppo Levi se sigue del de Vitali. Por supuesto, lo mismo sucede con DCT, pero Vitali no conocía DCT en aquel momento.

¡Me gustaría saber más sobre la historia y el uso de este resultado entre 1907 y 1939! Hawkins [12] menciona el artículo, pero sólo menciona un resultado que aparece al final del artículo y que yo considero mucho menos importante. En una nota a pie de página, en la p. 50 de su artículo de 1909 [17], Lebesgue dice que DCT y MCT son casos especiales del teorema de convergencia de Vitali. También afirma que DCT se puede extender a conjuntos de medida infinita. En la página 365 del artículo de 1910 [18] de nuevo hace referencia al teorema de Vitali, diciendo que da una condición necesaria y suficiente para la integración término a término. En *Leçons II* [19] (p. 131) Lebesgue simplemente cita el artículo: *M. Vitali a écrit sur ce sujet un très important Mémoire, que je ne puis ici que signaler*. Esto sucede justo antes de introducir DCT. En 1913, Camp, en un artículo bastante enrevesado [2], da una generalización del teorema de Vitali a varias variables.

En 1915, de la Vallée Poussin escribió un largo artículo [27] titulado *Sur l'intégrale de Lebesgue*; este artículo es complementario a su libro *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire* [28], escrito aproximadamente en la misma fecha. En el artículo, en la sección sobre teoremas de convergencia, de la Vallée Poussin discute el trabajo de Vitali y, en la demostración del Teorema 4, p. 448–450, simplifica considerablemente la parte difícil de la demostración de Vitali. Damos un esbozo de su argumento.

Claramente basta demostrar que si $f_n \to 0$ en E y las $\int f_n$ *no* son uniformemente absolutamente continuas en E, entonces existe $F \subseteq E$ tal que $\int_F f_n \not\to 0$. (Sabemos que esto es cierto si $f_n \geq 0$ en E.) Sea A_m una sucesión (que elegiremos posteriormente) tal que $0 < A_m < A_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y $A_m \to +\infty$, y sea $E_m = \{x \in E : |f_n(x)| > A_m \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$. Obsérvese que la medida de E_m tiende a cero.

Sea $\varepsilon = \limsup \int_E |f_n|$. Entonces $\varepsilon > 0$ y $\int |f_n|$ son uniformemente absolutamente continuas. Sea $\omega > 0$ con $\omega < \varepsilon/6$. Es muy sencillo elegir A_m de forma que para cada $m \in \mathbb{N}$, exista $n \in \mathbb{N}$ tal que las siguientes tres desigualdades se satisfagan:

$$\int_{E\setminus E_m} |f_n| < \omega\,, \quad \int_{E_m} |f_n| > \varepsilon - \omega\,, \quad \int_{E_{m+1}} |f_n| < \omega. \tag{‡}$$

Esto se hace inductivamente: para cada m, podemos encontrar [un] n tal que las primeras dos desigualdades se verifiquen y entonces elegir $A_{m+1}(> A_m)$ dependiendo de n de modo que la tercera se satisfaga. Además podemos elegir n creciente y tendiendo a infinito con m.

Claramente (‡) implica que $\int_{E_m\setminus E_{m+1}} |f_n| > \varepsilon - 2\omega$, y por tanto existe $F_m \subseteq E_m\setminus E_{m+1}$ tal que $\left|\int_{F_m} f_n\right| > (\varepsilon - 2\omega)/2$. Tomemos $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ (unión disjunta). Obsérvese que $F_i \subseteq E\setminus E_m$ para $i = 1, \dots, m-1$ y $F_h \subseteq E_{m+1}$ para $h = m+1, m+2, \dots$ Por tanto, para cada m y su correspondiente n,

$$\begin{aligned}
\left|\int_F f_n\right| &\geq \left|\int_{F_m} f_n\right| - \sum_{i=1}^{m-1}\left|\int_{F_i} f_n\right| - \sum_{h=m+1}^{\infty}\left|\int_{F_h} f_n\right| \\
&\geq \left|\int_{F_m} f_n\right| - \int_{E\setminus E_m} |f_n| - \int_{E_{m+1}} |f_n| \\
&> \frac{\varepsilon - 2\omega}{2} - \omega - \omega = \frac{\varepsilon}{2} - 3\omega\,,
\end{aligned}$$

que es positivo, pues $\omega < \varepsilon/6$. Por tanto $\int_F f_n \not\to 0$, completando la demostración.

El argumento es muy similar a la Fase 1 de la demostración de Hahn del teorema de Vitali-Hahn-Saks [10] dada en § 3, y es al menos concebible que Hahn tomase el impulso inicial para su prueba del artículo de la Vallée Poussin. En [27], Teorema 5, p. 450, de la Vallée Poussin demuestra que la continuidad uniforme absoluta de las $\int f_n$ en un espacio de medida finita no-atómica es equivalente a:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$, tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\{|f_n|>K\}} |f_n| < \varepsilon$.

Esto fue redescubierto por Doob [3] 24 años después. El nuevo criterio se llamó *integrabilidad uniforme*, y fue usado extensivamente por Doob en su estudio de las martingalas. En 1918, H. Hahn [9, p. 1774] demostró, utilizando el resultado de Vitali, que la integrabilidad completa implica la convergencia fuerte en L^1: esto prueba que Hahn conocía el artículo de Vitali. ¡Sin embargo el artículo de la Vallée Poussin parece virtualmente desconocido! Supe de él gracias al excelente conjunto de referencias bibliográficas que aparece en la p. 223 de Hahn y Rosenthal [11]. Nagumo [21] discute el teorema refiriéndose a Vitali, lo utiliza, y da una condición necesaria y suficiente para la continuidad absoluta uniforme. El mismo Vitali no parece haber trabajado más en esta materia. Ver el artículo biográfico de A. Tonolo [26].

Entre los libros más conocidos de análisis real escritos antes de la Segunda Guerra Mundial sólo el de Hobson [13] hace referencia al artículo de Vitali en p. 296–299. El libro de Hobson también contiene lo que probablemente sea el primer intento de generalizar el resultado de Vitali a conjuntos de medida infinita. Estas generalizaciones son todas, en mi opinión, algo artificiales.

A partir de los años cincuenta algunos libros sobre analisis y/o probabilidad han incluido el concepto de continuidad absoluta uniforme o integrabilidad uniforme, pero frecuentemente sin mencionar a Vitali. Además, donde hay referencias a Vitali, el resultado que se le atribuye es frecuentemente la equivalencia de la continuidad absoluta uniforme y la convergencia fuerte en L^1, que se sigue de la parte sencilla del trabajo de Vitali, mientras que la integrabilidad completa no se menciona. Rudin, *Real and Complex Analysis* [24], es una excepción —en las tres ediciones—; sin embargo, aunque en la primera edición se da el teorema de convergencia de Vitali, para la tercera edición éste ha cambiado al teorema de Vitali-Hahn-Saks. Dunford-Schwartz [6] contiene un tratamiento comprensivo en los Capítulos III y IV. Pero lamentablemente hay un desliz en el enunciado del teorema de convergencia de Vitali en la página 234.

3. El teorema de Vitali-Hahn-Saks

Se considera como origen de este resultado al teorema de convergencia de Vitali. Fue enunciado y demostrado primero por H. Hahn [10] en 1922. A continuación reproducimos el enunciado y la demostración de Hahn. (Tanto este resultado como el Corolario 3 reciben usualmente el nombre de «teorema de Vitali-Hahn-Saks». El resultado es evidentemente más fuerte que el teorema de convergencia de Vitali.)

Teorema 1 (H. Hahn [10], Thm. XXI, p. 45–50). *Si $m(E) < \infty$, f_n integrable en E, y para cada $F \subseteq E$ medible,* $\lim_{n\to\infty} \int_F f_n$ *existe y es finito, entonces $\int f_n$ son uniformemente absolutamente continuas.*

Demostración. De nuevo, todos los conjuntos que aparecen en esta prueba serán medibles. Supongamos que las integrales no son uniformemente absolutamente continuas. Entonces existe $\varepsilon > 0$ con la propiedad de que para cada $N \in \mathbb{N}$ y cada $\sigma > 0$ hay un conjunto medible Z con $m(Z) < \sigma$ y $n_0 > N$ con $\int_Z |f_{n_0}| > \varepsilon$. Considerando los conjuntos donde $f_{n_0} \geq 0$ y $f_{n_0} \leq 0$, obtenemos para cada $N \in \mathbb{N}$, un conjunto M con $m(M) < \sigma$ y $n_0 > N$ con $\left|\int_M f_{n_0}\right| > \varepsilon/2$.

Fase 1. Probamos que existe una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos M_ν y una sucesión creciente de enteros positivos n_ν tales que

$$\left|\int_{M_\nu} f_{n_\nu}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } \nu \in \mathbb{N}\,.$$

Comenzamos eligiendo un subconjunto propio Z_1 de E y $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que $\left|\int_{Z_1} f_{n_1}\right| > \varepsilon/2$. Observemos que existe $\sigma > 0$ suficientemente pequeño como para que si $Z' \subset Z_1$ satisface $m(Z') < \sigma$, entonces aún tenemos que $\left|\int_{Z_1\setminus Z'} f_{n_1}\right| > \varepsilon/2$. Ahora, por nuestra asunción obtenemos $n_2 > n_1$ y un conjunto Z_2 tal que $m(Z_2) < \sigma$ y $\left|\int_{Z_2} f_{n_2}\right| > \varepsilon/2$. Como $m(Z_1 \cap Z_2) < \sigma$, tenemos que $\left|\int_{Z_1\setminus Z_1\cap Z_2} f_{n_1}\right| > \varepsilon/2$ y $\left|\int_{Z_2} f_{n_2}\right| > \varepsilon/2$.

Del mismo modo obtenemos $n_3 > n_2$ y un conjunto Z_3 de medida suficientemente pequeña tal que

$$\left|\int_{Z_1\setminus Z_1\cap(Z_2\cup Z_3)} f_{n_1}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\,; \quad \left|\int_{Z_2\setminus(Z_2\cap Z_3)} f_{n_2}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\,; \quad \left|\int_{Z_3} f_{n_3}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Continuamos de este modo para obtener una sucesión estrictamente creciente n_ν y conjuntos Z_ν, tales que

$$\left|\int_{Z_1\setminus Z_1\cap(Z_2\cup\cdots\cup Z_\nu)} f_{n_1}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\,; \quad \left|\int_{Z_2\setminus Z_2\cap(Z_3\cup\cdots\cup Z_\nu)} f_{n_2}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\,; \ldots; \ \left|\int_{Z_\nu} f_{n_\nu}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Sean

$$\begin{aligned} M_1 &= Z_1 \setminus Z_1 \cap \bigcup_{j=2}^{\infty} Z_j\,,\\ M_2 &= Z_2 \setminus Z_2 \cap \bigcup_{j=3}^{\infty} Z_j\,,\\ &\vdots \qquad \vdots\\ M_\nu &= Z_\nu \setminus Z_\nu \cap \bigcup_{j=\nu+1}^{\infty} Z_j\,. \end{aligned}$$

Los M_ν son disjuntos dos a dos y $\left|\int_{M_\nu} f_{n_\nu}\right| \geq \varepsilon/2$ para todo ν, lo que completa la demostración de la Fase 1.

Fase 2. Sabemos que para cada conjunto medible M, $\lim_{n\to\infty}\int_M f_n$ existe y es finito. Utilizando la Fase 1 vamos a probar que $\lim_{n\to\infty}\int_M f_n$ no existe para cierto M —esto completará la demostración del teorema—. Sean M_1 y n_1 como en la Fase 1. Tomamos $G_1 = M_1$ y $\nu_1 = 1$, de modo que $n_{\nu_1} = n_1$. Por la continuidad absoluta de $\int f_{n_1}$, existe $\rho_1 > 0$ tal que si $m(Z) < \rho_1$, entonces $\left|\int_Z f_{n_1}\right| < \varepsilon/12$. Como $\lim_{n\to\infty}\int_{G_1} f_n$ existe (y es finito), entonces existe $N_1 > n_1$ tal que

$$\left|\int_{G_1} f_n - \int_{G_1} f_{n'}\right| < \frac{\varepsilon}{12} \quad \text{si } n \geq N_1,\, n' \geq N_1\,.$$

Ahora, existe σ_1, $0 < \sigma_1 < \rho_1$, tal que si $m(Z) < \sigma_1$ entonces $\left|\int_Z f_{N_1}\right| < \varepsilon/12$. Como los conjuntos M_ν son subconjuntos medibles disjuntos de E y $m(E) < \infty$, existe ν_2 tal que $n_{\nu_2} > N_1$ y $\sum_{\nu=\nu_2}^{\infty} m(M_\nu) < \sigma_1$. Tomemos $G_2 = M_{\nu_1} \cup M_{\nu_2}$.

Ahora existe ρ_2, $0 < \rho_2 < \sigma_1$, tal que si $m(Z) < \rho_2$ entonces $\left|\int_Z f_{n_{\nu_2}}\right| < \varepsilon/12$. Como $\lim_{n\to\infty}\int_{G_2} f_n$ existe, entonces existe $N_2 > n_{\nu_2}$ tal que

$$\left|\int_{G_2} f_n - \int_{G_2} f_{n'}\right| < \frac{\varepsilon}{12} \quad \text{si } n \geq N_2,\, n' \geq N_2\,.$$

De nuevo existe σ_2, $0 < \sigma_2 < \rho_2$ tal que si $m(Z) < \sigma_2$, entonces $\left|\int_Z f_{N_2}\right| < \varepsilon/12$; y existe ν_3, con $n_{\nu_3} > N_2$ y $\sum_{\nu=\nu_3}^{\infty} m(M_\nu) < \sigma_2$. Tomemos $G_3 = M_{\nu_1} \cup M_{\nu_2} \cup M_{\nu_3}$. Si continuamos el proceso, obtenemos:

Dos sucesiones de enteros positivos n_{ν_j} y N_j tales que

$$n_{\nu_1} < N_1 < n_{\nu_2} < N_2 < \ldots < n_{\nu_i} < N_i < \cdots . \tag{I}$$

Dos sucesiones de números positivos ρ_j y σ_j tales que

$$\rho_1 > \sigma_1 > \rho_2 > \sigma_2 > \ldots > \rho_i > \sigma_i > \cdots . \tag{II}$$

Éstas (junto con los M_ν y f_n) poseen las propiedades:

$$\sum_{\nu=\nu_{i+1}}^{\infty} m(M_\nu) < \sigma_i < \rho_i\,, \tag{III}$$

donde los M_ν son como en la Fase 1;

$$\left|\int_Z f_{n_{\nu_i}}\right| < \frac{\varepsilon}{12} \qquad \text{si } m(Z) < \rho_i, \tag{IV}$$

$$\left|\int_Z f_{N_i}\right| < \frac{\varepsilon}{12} \qquad \text{si } m(Z) < \sigma_i. \tag{V}$$

Además, si $G_i = \bigcup_{j=1}^{i} M_{\nu_j}$, entonces

$$\left|\int_{G_i} f_n - \int_{G_i} f_{n'}\right| < \frac{\varepsilon}{12} \qquad \text{si } n \geq N_i,\ n' \geq N_i. \tag{VI}$$

Recordemos de la Fase 1 que

$$\left|\int_{M_{\nu_i}} f_{n_{\nu_i}}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } \nu_i. \tag{VII}$$

Tomemos ahora $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_{\nu_i}$ (recuérdese que estos conjuntos son disjuntos) y $R_i = M \backslash G_i$. Ahora

$$\begin{aligned}
&\left|\int_M f_{N_{i-1}} - \int_M f_{n_{\nu_i}}\right| \qquad\qquad\qquad \text{(VIII)}\\
&\quad = \left|\int_{G_{i-1}} f_{N_{i-1}} - \int_{G_{i-1}} f_{n_{\nu_i}} + \int_{R_{i-1}} f_{N_{i-1}} - \int_{M_{\nu_i}} f_{n_{\nu_i}} - \int_{R_i} f_{n_{\nu_i}}\right|\\
&\quad \geq \left|\int_{M_{\nu_i}} f_{n_{\nu_i}}\right| - \left|\int_{G_{i-1}} f_{N_{i-1}} - \int_{G_{i-1}} f_{n_{\nu_i}}\right| - \left|\int_{R_{i-1}} f_{N_{i-1}}\right| - \left|\int_{R_i} f_{n_{\nu_i}}\right|.
\end{aligned}$$

Por (VI), $\left|\int_{G_{i-1}} f_{N_{i-1}} - \int_{G_{i-1}} f_{n_{\nu_i}}\right| < \varepsilon/12$. Como $m(R_{i-1}) < \sigma_{i-1}$, por (V), $\left|\int_{R_{i-1}} f_{N_{i-1}}\right| < \varepsilon/12$; y como $m(R_i) < \rho_i$, por (IV), $\left|\int_{R_i} f_{n_{\nu_i}}\right| < \varepsilon/12$. Estas afirmaciones unidas a (VII) demuestran que (VIII) implica que

$$\left|\int_M f_{N_{i-1}} - \int_M f_{n_{\nu_i}}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{12} - \frac{\varepsilon}{12} - \frac{\varepsilon}{12} = \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}\,.$$

Por lo tanto, $\int_M f_n$ no puede tener un límite finito para $n \to \infty$, lo que contradice nuestra hipótesis y completa la demostración de (la Fase 2 y) el teorema. □

Nota. Es fácil demostrar también que las $\int_E f_n$ están uniformemente acotadas.

Corolario 2. *Bajo las mismas hipótesis del teorema la función de conjuntos* $\nu(F) = \lim_{n\to\infty} \int_F f_n$ *es absolutamente continua respecto a* m *y en consecuencia es numerablemente aditiva y es la integral de una función integrable* f.

Corolario 3 (Teorema de Vitali-Hahn-Saks). *Si* ν_n *es una sucesión de funciones de conjunto numerablemente aditivas finitas sobre una* σ*-algebra* $\mathbf{M}$ *de subconjuntos de* E *y* $\lim_{n\to\infty} \nu_n(F)$ *existe y es finito para todo* $F \in \mathbf{M}$*, entonces este límite es numerablemente aditivo en* $(E, \mathbf{M})$.

Demostración. Pongamos $m(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\nu_n|(F)}{|\nu_n|(E)}$, donde $|\nu_n|$ es la variación total de ν_n. Entonces m es una medida finita en E y cada ν_n es absolutamente continua respecto a m. Por el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym, $\nu_n = \int f_n\, dm$ para ciertas f_n integrables. Apliquemos el teorema y el Corolario 2. □

Nota. Como ya observamos, la demostración anterior es la primera prueba del teorema de Vitali-Hahn-Saks. Obsérvese que en la prueba no se hace uso del teorema de la Categoría de Baire. La demostración es un tanto similar a la prueba de Vitali de su teorema de convergencia, e incluso más aún a la demostración de la Vallée Poussin, aunque no se hace referencia a Vitali ni a de la Vallée Poussin. Hahn referencia sin embargo el artículo de B. H. Camp [2], que generaliza el resultado de Vitali a varias variables. [Por otra parte] Camp menciona a Vitali. El Corolario 3 fue enunciado y probado primero por Nikodym [22], [23], diez años después de Hahn. La demostración es directa, pero Nikodym observa que es análogo al teorema de Hahn para integrales. Él también dice que sus resultados están *en solidarité étroite avec des théorèmes de M. H. Hahn*. No observa que su resultado es un corolario inmediato del de Hahn. Esto es un tanto sorprendente, ya que sólo hace falta utilizar un famoso resultado que él acababa de probar: el teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym.

La demostración de Hahn precede en diez años a la prueba basada en el teorema de la Categoría de Baire, debida a Saks [25], quien también demuestra el Corolario 2. Parece que esta demostración fue descubierta independientemente por Banach, y se incluye en la edición polaca de su libro sobre operadores lineales, *Teorja Operacyj* [1], aunque no se incluye en la edición francesa, mucho más conocida. Saks menciona el resultado de Hahn, pero no el de Vitali. Esta demostración se da en muchos libros. Un estudio muy detallado (que incluye generalizaciones a medidas vectoriales) de los teoremas de Vitali y Vitali-Hahn-Saks se da en los Capítulos III y IV de Dunford-Schwartz [6]. Concretamente, en las páginas 122, 150 y 234 del Capítulo III y las páginas 292–295, 306 y 389 del Capítulo IV. La página 389 también contiene referencias a algunas generalizaciones interesantes, especialmente del Corolario 3, debidas a Dubrovsky y Cafiero. Una demostración del Corolario 3 anterior fue obtenido en 1945 por Y. Dubrovsky [5]. Es una prueba parecida a las demostraciones de Hahn y Nikodym. Esta prueba fue simplificada por Y. N. Dowker [4]. Su argumento se da en las páginas 32–35 del pequeño libro de N. Friedman sobre Teoría Ergódica [8]. Nadie menciona a Hahn, aunque Dowker menciona a Saks.

Agradecimientos. Quiero expresar mi agradecimiento a varios matemáticos que me ayudaron discutiendo la importancia de los distintos artículos que se mencionan aquí, y proporcionándome bibliografía. En orden alfabético, son: Richard Duncan, Victor Havin, Andrés del Junco, Paul Koosis, Raghavan Narasimhan, John Taylor y Robert Vermes. También le estoy agradecido a S. D. Chatterji, que me hizo la observación de que en el texto de Dunford-Schwartz [6], especialmente en el Capítulo IV, hay mucho más material relevante del que yo conocía con anterioridad.

Referencias

[1] S. Banach, *Teorja Operacyj*, Warsaw, 1931.

[2] B. H. Camp, Singular multiple integrals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913), 42–64.

[3] J. L. Doob, Regularity properties of certain chance variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* **47** (1940), 455–486.

[4] Y. N. Dowker, Finite and σ-finite invariant measures, *Ann. of Math.* **54** (1951), 595–608.

[5] Y. Dubrovsky, On some properties of completely additive set functions (en ruso), *Izvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **9** (1945), 311–320.

[6] N. Dunford y J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, Interscience, New York, 1958.

[7] P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta Math.* **30** (1906), 335–400.

[8] N. A. Friedman, *Introduction to Ergodic Theory*, Van Nostrand, 1970.

[9] H. Hahn, Einige Anwendungen der Theorie der singulären Integrale, *Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien IIa* **127** (1918), 1763–1785.

[10] ———, Über Folgen linearer Operationen, *Monatshefte für Math. und Physik* **32** (1922), 3–88.

[11] H. Hahn y A. Rosenthal, *Set Functions*, University of New Mexico Press, Albuquerque, 1948.

[12] T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration, its origins and development*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1975.

[13] E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series*, Vol. II, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1926.

[14] H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, *Annali di Matematica Pura Appl. (3)* **7** (1902), 251–359 (citado como «*thèse*»).

[15] ———, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthiers-Villars, Paris, 1904 (citado como «*Leçons I*»).

[16] ———, Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm, *Bull. Soc. Math. France* **36** (1908), 3–19.

[17] ———, Sur les intégrales singulières, *Ann. Fac. Sci. Toulouse (3)* **1** (1909), 25–117.

[18] ———, Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Ann. Sci. École Normale Supérieure (3)* **27** (1910), 361–450.

[19] ———, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*[3], 2e éd., Gauthiers-Villars, Paris, 1928. Reimpreso con correcciones por Chelsea, New York, 1973 (citado como «*Leçons II*»).

[20] B. Levi, Sopra l'integrazione delle serie, *Rendiconti Istituto Lombardo Scienze e Lettere (2)* **39** (1906), 775–780.

[21] M. Nagumo, Über die Konvergenz der Integrale der Funktionenfolgen und ihre Anwendungen auf das gewöhnliche Differentialgleichungssystem, *Japanese J. Math.* **5** (1928), 97–125; **6** (1929), 173–182.

[22] O. M. Nikodym, Sur les familles bornées de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait, *Monatshefte für Math. und Physik* **40** (1933), 418–426.

[23] ———, Sur les suites convergentes de fonctions parfaitement additives d'ensemble abstrait, *ibid.*, 427–432.

[24] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1st ed., 1966; 2nd ed., 1974; 3rd ed., 1987.

[25] S. Saks, On some functionals, I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **35** (1933), 549–556; II, *ibid.* **41** (1937), 160–170; Addition, *ibid.* **35** (1933), 967–974.

[26] A. Tonolo, Commemorazione di Giuseppe Vitali, *Rendiconti Sem. Mat. dell'Univ. di Padova* **3** (1932), 67–81.

[27] C. J. de la Vallée Poussin, Sur l'intégrale de Lebesgue, *Trans. Amer. Math. Soc.* **16** (1915), 435–501.

[28] ———, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, Gauthier-Villars, Paris, 1916.

[29] G. Vitali, Sull'integrazione per serie, *Rendiconti Circolo Mat. Palermo* **23** (1907), 137–155.

J. R. Choksi, Dept. of Mathematics and Statistics, McGill University, Burnside Hall, 805 Sherbrooke St W., Montreal, Quebec, H3A 2K6, Canadá
Correo electrónico: `choksi@math.mcgill.ca`

Traducido del inglés por J. M. Almira, Dpto. de Matemáticas, Universidad de Jaén
Correo electrónico: `jmalmira@ujaen.es`

[3]Los trabajos de Lebesgue han sido publicados de forma conjunta como: Lebesgue, Henri Léon, *Œuvres Scientifiques*, 5 volumes, *L'Enseignement Mathématique*, Institut de Mathématiques, Univ. de Genève, 1972. El vol. 1 contiene *«thèse»*; el vol. 2 contiene *Leçons I* y Lebesgue (1910); el vol. 3 contiene Lebesgue (1908) y (1909). *Leçons II no* está incluido.