

Sobre dos no-descubrimientos matemáticos de P. L. Chebyshev

por

Francisco Luquin

RESUMEN. En este artículo se comentan dos descubrimientos matemáticos, ninguno de los cuales es debido a Chebyshev: uno de Teoría de los Números y otro sobre ciertos mecanismos. El autor considera cuando menos curioso que, teniendo en cuenta la dedicación de Chebyshev a ambos temas, no fuera él quien finalmente realizara los correspondientes descubrimientos.

Nadie que conozca la importancia y variedad de los resultados obtenidos por Chebyshev (1821–1894), así como sus métodos utilizados, puede poner en duda que fue un gran matemático. No obstante, el objetivo de este artículo no es rememorar éstos, sino que más bien —remedando a Lewis Carroll en su *Alicia en el país de las maravillas*— es comentar dos no-descubrimientos de Chebyshev.

PRIMER NO-DESCUBRIMIENTO

Es de sobra conocido el interés que mostró Chebyshev tanto por la Teoría de los Números, y en particular por la distribución de los números primos en la serie de los números naturales (teorema del número primo, T.N.P.), como por la Teoría de la Aproximación de las Funciones. Entre otras funciones, en 1848 Chebyshev definió, para $x > 0$, la función

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad (n \text{ entero positivo})$$

con

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{si } n = p^\alpha \text{ para un cierto primo } p \text{ y un cierto } \alpha \geq 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

por medio de la cual el T.N.P. [2] se puede reformular como¹

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$$

¹Sea $\pi(x)$ el número de primos que no exceden a x . A finales del siglo XVIII, examinando tablas de números primos, Gauss y Legendre conjeturaron independientemente que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$. Tal afirmación es lo que se conoce con el nombre de T.N.P., y es equivalente a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$. Actualmente, el T.N.P. ya no es una conjetura, sino que fue demostrado por Hadamard y de la Vallée-Poussin en 1896.

Así mismo, el descubrimiento en 1853 del polinomio mónico de mínima desviación uniforme a cero en un intervalo $[a, b]$,

$$t_n(x) = 2 \left(\frac{b-a}{4} \right)^n \cos \left(n \arccos \frac{2x-b-a}{b-a} \right),$$

también es debido a tan ilustre matemático. Por cierto que, en el caso del intervalo $[-2, 2]$, el polinomio $t_n(x)$ tiene coeficientes enteros.

Pues bien, hacia 1936 Schnirelman y Guelfond [3] realizan el siguiente razonamiento:

Consideremos la magnitud

$$\rho_n^{-n} = \min_P \max_{0 \leq x \leq 1} |P(x)|,$$

donde el mínimo se extiende al conjunto de polinomios con coeficientes enteros no simultáneamente nulos de grado $\leq n$. Schnirelman demostró la existencia del límite

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n.$$

Sea $Q_n(x) \not\equiv 0$ un polinomio que alcanza la desviación mínima anterior, es decir, que verifique

$$\rho_n^{-n} = \max_{0 \leq x \leq 1} |Q_n(x)|.$$

Evidentemente

$$0 < \int_0^1 Q_n^2(x) dx \leq \rho_n^{-2n} \int_0^1 dx = \rho_n^{-2n}.$$

Multiplicando por el mínimo común múltiplo Ω_{2n+1} de $1, 2, \dots, 2n+1$, el lado derecho de la desigualdad anterior resultará un número entero que, como no puede ser nulo, tendrá que ser mayor o igual que uno, por lo que se verificará

$$1 \leq \Omega_{2n+1} \rho_n^{-2n}$$

o, equivalentemente,

$$\rho_n^{2n} \leq \Omega_{2n+1}.$$

Tomando logaritmos neperianos, y teniendo en cuenta que $\ln \Omega_x = \psi(x)$, resulta

$$\ln \rho_n \leq \frac{\psi(2n+1)}{2n},$$

de donde, tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\ln \rho \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(2n+1)}{2n}.$$

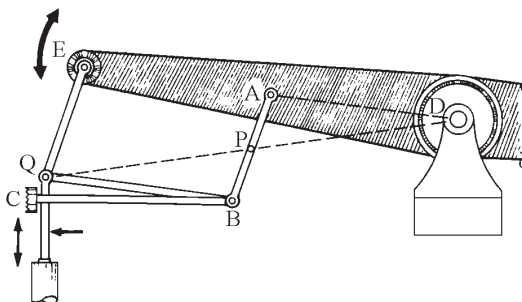
Como consecuencia, una demostración, quizás elemental, del T.N.P., podría seguirse si pudiéramos probar que $\rho = e$. Desgraciadamente $2,3629 < \rho < 2,3736$ [1, 7, 10] y este método de acotación inferior no es suficientemente efectivo. Chebyshev en 1851

demostró que, caso de existir el límite de la derecha, éste tendría que ser uno. Sin embargo no fue capaz de demostrar la existencia de este límite [2].

Desde que el profesor E. Aparicio (1926–1998) me introdujo en estos temas, cada vez que reflexiono sobre ellos me llama la atención que, siendo Chebyshev la persona adecuada y teniendo todos los conceptos necesarios, no encontrara esta relación entre el T.N.P. y el polinomio no nulo de coeficientes enteros de mínima desviación uniforme a cero.

SEGUNDO NO-DESCUBRIMIENTO

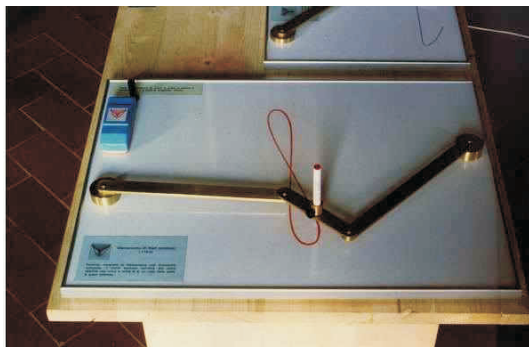
Para su exposición hagamos un poco de historia. Al inicio de la revolución industrial, y para un mejor funcionamiento de la máquina de vapor de Watt, era necesario diseñar un dispositivo capaz de transmitir al balancín el impulso del pistón en su camino ascendente, ya que, evidentemente, la cadena o engranaje al uso no servía. Además, debido a su diferente movimiento, lineal el pistón y circular el balancín, no era posible una unión directa entre ambos. El primero en dar una solución fue Watt (1736–1819), el cual diseñó un mecanismo, su famoso paralelogramo, que transformaba el movimiento circular en otro aproximadamente rectilíneo.



Balancín y paralelogramo de Watt.

En la figura, ED es el balancín, pivotado en D . $CBAD$ es el mecanismo (simple), con C fijo a la máquina, $DAEQB$ forma el pantógrafo, $AEQB$ es un paralelogramo articulado, y P un punto del eslabón intermedio AB , el cual está alineado con D y Q , así las trayectorias de P y Q serán siempre similares. Como el balancín oscila alrededor de su pivote, ajustando tanto las longitudes como la posición de los eslabones, la trayectoria total de P es una figura simétrica con forma de 8, y Watt demostró que la parte de la trayectoria de P , y por tanto de Q , correspondiente a una oscilación del balancín de no más de 20 grados arriba o abajo de la horizontal, sería aproximadamente lineal. De esta forma asegura que, al movimiento oscilatorio del balancín, le corresponda un movimiento casi lineal de la varilla del tapón conectado en P y de la varilla del pistón conectado en Q , como deseaba.

El problema suscitado era buscar un mecanismo que fuera capaz de trazar exactamente una línea recta. Además de Watt, otros autores que estudiaron y descubrieron nuevos mecanismos son Chebyshev, Oliver Evans (1755–1819), Richard Roberts



Mecanismo simple de Watt.

(1789–1864), Scott Russell (1808–1882), Sylvester (1814–1897), Cayley (1821–1895), Peaucellier (1832–1913), Lipkin (1851–1875), Hart (1848–1920) y Kempe (1849–1922) quien tiene un libro escrito sobre este tema.

Chebyshev fue el primer matemático interesado en la teoría de los mecanismos articulados. En sus dos primeros trabajos, motivados por el estudio del paralelogramo de Watt y aplicables a otros tipos de mecanismos, «Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes» (1854) y «Sur les question des minima qui se rattachent á la représentation approximative des fonctions» (1859), sentó tanto las bases para la Teoría de Aproximación de las funciones como para la modelización del estudio de los mecanismos. En general consideró la trayectoria trazada por un punto del mecanismo como una función $F(x; p_1, \dots, p_n)$, la cual depende de una variable x y n parámetros p_i que definen el mecanismo. A la función se le suponen ciertas propiedades de regularidad respecto a la variable y a los parámetros, y ambas pertenecen a ciertos dominios. Hay que calcular condiciones sobre los valores \bar{p}_i de los parámetros p_i que alcancen el valor

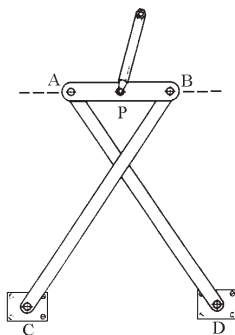
$$\min_{p_i} \max_x |F(x; p_1, \dots, p_n)| = \max_x |F(x; \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)| = L.$$

Supongamos que el número de puntos de desviación x , en los cuales F es igual a $\pm L$, es finito; sean x_1, \dots, x_μ tales puntos. Chebyshev demuestra que, si un sistema determinado de valores de parámetros \bar{p}_i alcanza el mínimo, entonces, o bien $\mu \geq n + 1$, o el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1\mu} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{n\mu} \end{pmatrix},$$

con $P_{ik} = \frac{\partial F}{\partial p_i}(x_k) \equiv \frac{\partial F}{\partial p_i}(x_k; \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$, es menor que μ .

El primer mecanismo presentado por Chebyshev es la variación del mecanismo simple de Watt que se observa en la figura, y con el que mejora la aproximación rectilínea de éste.



El primer mecanismo de Chebyshev.

En él las manivelas AD y CB son de la misma longitud, y el punto P que ejecuta el movimiento deseado se encuentra en mitad de la biela AB . Aplicando el teorema precedente a la función que determina el movimiento del punto P encontramos que su movimiento se aproxima lo más posible a una línea recta si las magnitudes del mecanismo verifican:

- (1) La distancia de los ejes de rotación de las manivelas es igual a un tercio de la suma de las longitudes de las dos manivelas y de la biela, es decir $CD = (AD + CB + AB)/3$.
- (2) La longitud de la biela debe exceder a un cuarto la de la manivela, $AB > AD/4$.

Bajo estas condiciones, y tomando por unidad de longitud la de las manivelas, demuestra que la longitud de la biela a está determinada por la ecuación

$$l^2 = \frac{(5 - 2a)(2a + 1)(4a - 1)}{(a + 2)^2},$$

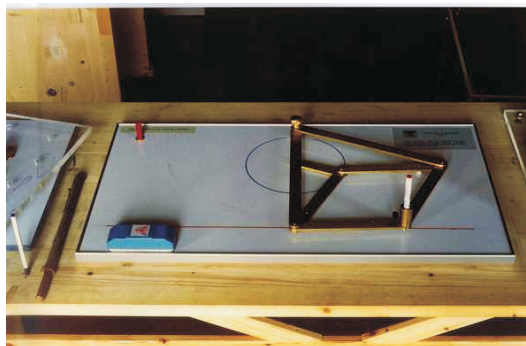
donde l designa la longitud de la cuerda paralela a CD que sostiene el arco de trayectoria trazado por el punto P en su recorrido.

También prueba que este arco estará totalmente comprendido entre dos rectas paralelas cuyas distancias a la línea que une los centros de rotación de las manivelas son iguales respectivamente a

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1 - a)(2 + a)}, \quad \sqrt{\frac{4}{9}(1 - a)(2 + a) + \frac{(4a - 1)^3}{12(a + 2)^2}}.$$

En su artículo siguiente, «Sur les parallélogrammes», después de dar una clasificación de los paralelogramos atendiendo al número de eslabones, uniones y pivotes, estudia la composición de mecanismos. Si ya en un mecanismo es bastante aceptable su aproximación rectilínea, al considerar la composición de dos, uniendo de cierta manera el segundo mecanismo al punto de trazado del primero, la aproximación que se consigue es ostensiblemente mejor.

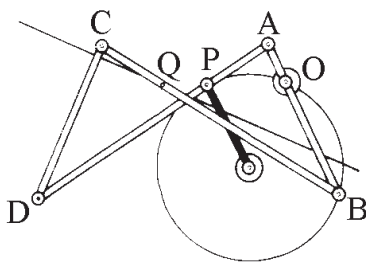
El primero en resolver este problema de rectitud fue el general de ingenieros de la armada francesa Charles-Nicolas Peaucellier quien, en 1864, ochenta años después del descubrimiento de Watt, diseñó un mecanismo, una especie de compás compuesto, formado por siete eslabones y seis pivotes, dos de ellos fijos, que construye mecánicamente la figura inversa de una línea dada. Recordemos que fue Apolonio de Perga (262 a.C.) quien introdujo la inversión en un círculo en su obra *Plane Loci*.



Mecanismo de Peaucellier.

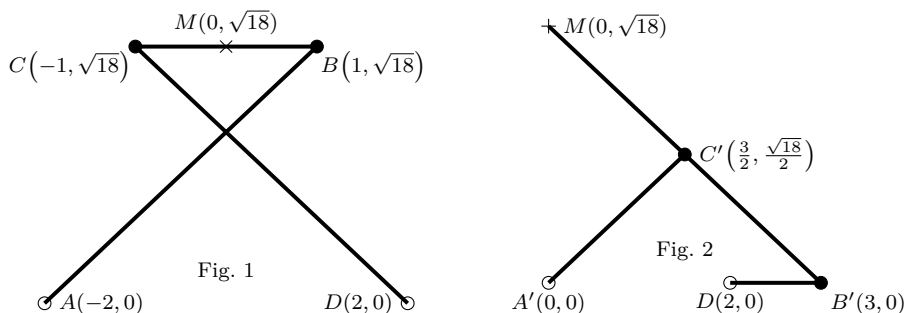
No obstante, el importante descubrimiento de Peaucellier pasó en principio desapercibido, ya que lo hizo público en una carta remitida a *Nouvelles Annales de Mathématiques*, donde afirmaba tener una solución positiva pero sin dar detalles de su construcción, siendo redescubierto 7 años más tarde por un estudiante ruso llamado Lippman Lipkin, alumno de Chebyshev, quien publicó la primera solución detallada.

Harry Hart, de la Academia de Woolwich, construyó en 1874 un mecanismo de cinco eslabones, formado por un paralelogramo cruzado al cual se le añade un nuevo eslabón, que también convierte el movimiento circular en un movimiento rectilíneo exacto. Una línea recta paralela a la recta unión de dos vértices no consecutivos corta a los lados cruzados y a uno de los otros en tres puntos Q , P y O . Fijando O , P y Q describen curvas inversas.



Mecanismo de Hart.

Desde 1852 hasta el final de sus días, Chebyshev continuó muy interesado en el tema relacionado con los mecanismos y sus aplicaciones prácticas, como se manifiesta en la gran cantidad de artículos que escribió, unos 15. Construyó nuevos mecanismos que trazaban la misma trayectoria que otros mecanismos dados. Por ejemplo, los puntos de trazado M de los dos mecanismos mostrados en la figura realizan idéntica trayectoria. Aquí los puntos A, D y A', D' son pivotes fijos, mientras que los B, C, B' y C' son móviles. El de la izquierda (fig. 1), es el primer mecanismo de Chebyshev ya comentado.



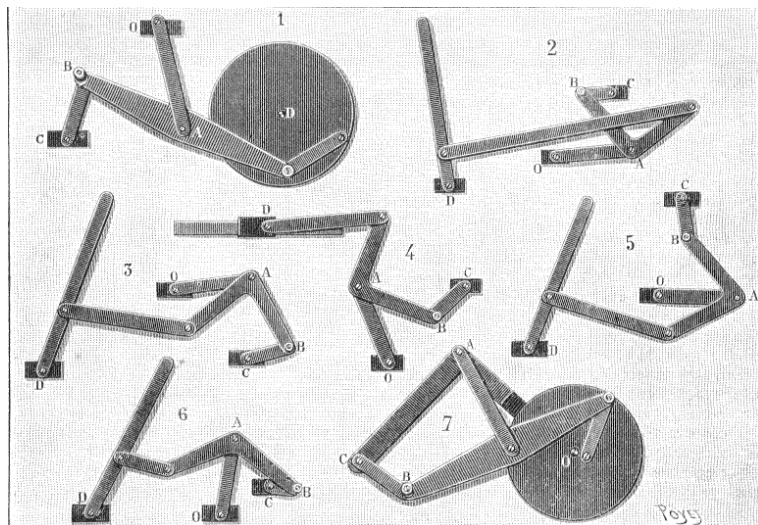
Esquema de dos mecanismos de Chebyshev que trazan la misma trayectoria.

Consideró una variante de estos mecanismos cuyo esquema coincide con los de las figuras anteriores, a los que añadió un nuevo segmento de longitud arbitraria con origen en M y perpendicular a la recta que une los puntos de rotación fijos cuando el mecanismo está en su posición media (como la de las figuras), y en cuyo otro extremo situó su punto de trazado. Así mismo estudió mecanismos de tres elementos en donde la biela, en vez de ser un segmento, tenía forma de triángulo. Estudió uno muy simple similar al de la derecha (fig. 2), pero donde el eslabón MB' , en vez de recto, es una línea quebrada en C' , en el cual el extremo M describe una especie de cadena de tres eslabones, comprendida entre dos líneas paralelas a los puntos de unión de los eslabones. La anchura de esta franja puede controlarse por medio del ángulo formado por el eslabón quebrado. También estudió los casos de mecanismos en donde la trayectoria de su punto trazador era lo más aproximada posible a un círculo dado.

Chebyshev fue muy crítico con los mecanismos. Primero, según él, por la pobre aproximación rectilínea de sus trayectorias; y, segundo, aun cuando ya se había conseguido convertir exactamente el movimiento circular en rectilíneo, por el número de eslabones y pivotes que los formaban, los cuales dificultaban su construcción y hacían peligroso su uso en la práctica.

Chebyshev no solo describió sus mecanismos con gran profusión de detalles prácticos, sino que construyó o diseñó un gran número de ellos procurando su exhibición al público, principalmente en las exposiciones universales de la época. Destacaremos los siete modelos expuestos en el «Conservatoire des arts et métiers» de París [11].

En el marcado como 1, el movimiento circular de la manivela CB se transforma en movimiento rotatorio de la rueda alrededor del centro D , sin punto muerto.

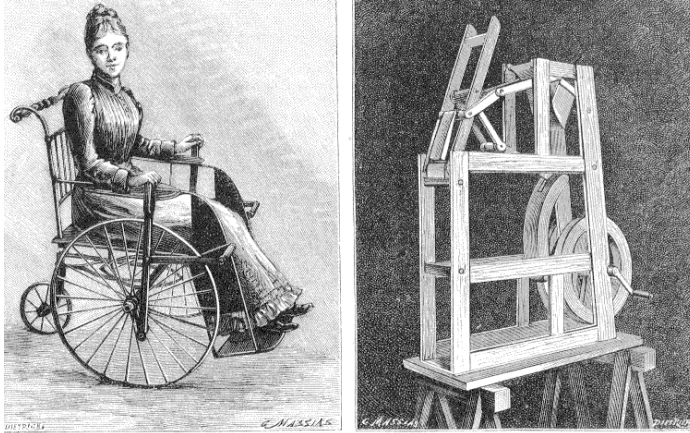


Siete mecanismos articulados de Chebyshev expuestos en París.

El 2 representa un mecanismo donde el movimiento circular produce el movimiento de la palanca D que pasa rápidamente de una de sus posiciones extremas a la otra. En el 3, la palanca D se para por algún tiempo a la mitad de una de sus carreras. El 4 representa un sistema donde el movimiento circular de la manivela BC se transforma en movimiento con retorno rápido del punto D , muy poco diferente del movimiento rectilíneo. En el 5, a una vuelta de la manivela BC corresponden dos oscilaciones completas de la palanca D . En el sistema 6, la palanca D realiza un movimiento brusco y por último, el 7 transforma el movimiento circular de la manivela BC en movimiento circular de la rueda O con la siguiente particularidad: mientras que la manivela BC da una vuelta, la rueda O gira cuatro o dos veces según el sentido de rotación. De todos estos mecanismos, el último es el único que realiza la transformación del movimiento con puntos muertos.

Como aplicaciones [11] de estos sistemas articulados tenemos que el sistema 3 puede utilizarse en las máquinas de coser, en las cuales es importante que la aguja se detenga un momento a la mitad de su carrera. Cuando se quiere hacer girar una rueda sin el concurso de engranajes y cadenas, se puede utilizar el sistema 1; el velocípedo para mujeres de la figura es un ejemplo de este caso. La máquina de expurgar grano, que necesita un movimiento brusco, usa el sistema 6, mientras que el barco utiliza una combinación de todos ellos para transformar el movimiento circular de la manivela en movimiento alternativo de las paletas, con el fin de propulsarlo.

En la última figura presentamos el denominado mecanismo plantígrado, que imita los movimientos al andar de un cuadrúpedo [12]. Las proporciones de este mecanismo



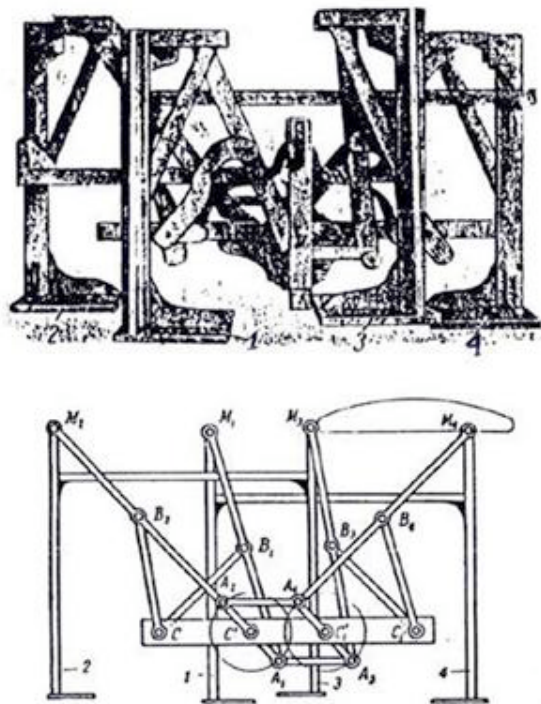
Arriba: velocípedo y máquina de expurgar grano expuestos en Chicago. Abajo: barco dibujado a partir de una fotografía.

han de ser:

$$\begin{aligned}
 A_1B_1 &= B_1C = B_1M_1 = A_2B_2 = B_2C = B_2M_2 \\
 &= A_3B_3 = B_3C_1 = B_3M_3 = A_4B_4 = B_4C_1 = B_4M_4 = 1; \\
 A_1C' &= A_2C' = A_3C'_1 = A_4C'_1 = 0,355; \\
 CC' &= C_1C'_1 = 0,785; \\
 A_2A_4 &= A_1A_3 = C'C'_1 = 0,634.
 \end{aligned}$$

En el esquema no es difícil observar el mecanismo de la fig. 2 utilizado en cada pata del cuadrúpedo, por lo tanto sus dimensiones tienen que verificar las condiciones (1)

y (2). También está marcada la trayectoria trazada por el punto M_4 . Los puntos M_1 , M_2 y M_3 realizan un recorrido similar.



Mecanismo plantígrado.

Citaremos también aquí su famoso aritmómetro o máquina de calcular, por ser el mecanismo más elaborado concebido por Chebyshev. Fue construido por la firma Gautier de París.

Si tenemos en cuenta la excelencia de los resultados conseguidos por Chebyshev en cualquier tema que trató, y dado que su interés por los mecanismos ha quedado patente, resulta cuando menos chocante que no construyese uno que fuese capaz de trazar exactamente una línea recta; más aún si consideramos que contaba sólo 50 años cuando Lipkin, su alumno, lo presentó. Más sorprendente es, todavía, la atribución que algunos autores [13] sostienen (sin citar referencia alguna) de una demostración de Chebyshev de la imposibilidad de construir un mecanismo de cinco eslabones de estas características.

AGRADECIMIENTOS. Agradezco al *referee* sus útiles comentarios. Así mismo quiero dejar constancia de que las ilustraciones utilizadas han sido tomadas de [11, 12, 13].

REFERENCIAS

- [1] J. M. ALMIRA Y N. DEL TORO, Sobre aproximación con polinomios de coeficientes enteros, *La Gaceta de la RSME* **6** (2003), 377–403.
- [2] T. M. APOSTOL, *Introducción a la Teoría Analítica de Números*, Editorial Reverté, 1980.
- [3] A. O. GELFOND, Commentary on the papers “On the estimation of the number of primes not exceeding a given value” and “On prime numbers”, *Collected works of P. L. Chebyshev*, vol. 1, Akad. Nauk SSSR, Moscow-Leningrad (1946), 285–288. (En ruso.)
- [4] H. HART, On certain conversions of motion, *Messenger of Math.* **4** (1874), 82–88.
- [5] L. LIPKIN, Dispositif articulé pour la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en mouvement rectiligne, *Revue anivers. des Mines et de la Métallurgie de Liège* **30**, 4^e livraison, (1871), 149–150.
- [6] A. MARKOFF Y N. SONIN, *Oeuvres de P. L. Tchebycheff*, 2 Vols., St. Petersburg, 1899/1907. (Reimpreso por Chelsea, New York, 1952.)
- [7] H. L. MONTGOMERY, *Ten Lectures on the interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 84, A.M.S., Providence, RI, 1994.
- [8] A. PEAUCELLIER, Lettre au rédacteur des Nouvelles Annales de Mathématique, *Nouv. Ann. de Math., 2^e serie*, **3** (1864), 414–415.
- [9] A. PEAUCELLIER, Note sur une question de géométrie de compás, *Nouv. Ann. de Math., 2^e serie*, **12** (1873), 71–73.
- [10] I. E. PRITSKER, Small polynomials with integer coefficients, *J. d'Analyse Math.* **96** (2005), 151–190.
- [11] X. . . , INGÉNIEUR, Tiges articulées de M. Tchebicheff, *La Nature, Revue des Sciences et de leurs applications aux arts et à l'industrie*, Paris, G. Masson, Éditeur, Libraire de l'Académie de Médecine, (1893), 40–43.
- [12] A. ZAVROTSKY, Centenario de la muerte de Panucio L. Chebyshev, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* **4**, n.º 2, (1997), 89–92.
- [13] <http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/index.html>
<http://staff.science.uva.nl/~leo/lego/linkages.html>
<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/invert.shtml>