Cómo conectar matrices de determinante positivo por el procedimiento de eliminación de Gauss-Jordan*

por

Juan Campos

Resumen. En esta nota se da una nueva demostración de la conexión por arcos del grupo de la matrices regulares de determinante positivo. La idea es construir un camino que conecta cualquier matriz de determinante positivo con la matriz identidad, camino que va uniendo los pasos de un particular procedimiento de eliminación de Gauss-Jordan que evita el intercambio de filas.

1. Introducción

Dadas $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, un camino que une A con B es una función $\gamma : [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$ continua tal que $\gamma(0) = A$ y $\gamma(1) = B$. Obviamente dos matrices se pueden conectar por un camino, pero si ambas son regulares este camino no tiene por qué estar formado por matrices regulares; aún más, en general no tiene por qué existir un camino formado por matrices regulares. La continuidad de la función determinante permite reconocer fácilmente que una condición necesaria para su existencia es que el determinante de ambas matrices tenga el mismo signo. Esta condición resulta ser también suficiente, lo cual se deduce del siguiente teorema:

Teorema Principal. *Dada una matriz regular A con determinante positivo, existe un camino γ uniendo A con la identidad tal que*

$$\det(\gamma(t)) > 0 \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Desde un punto de vista abstracto este teorema muestra que la componente conexa principal (aquella que contiene al elemento neutro) en el grupo topológico de las matrices regulares, son la matrices de determinante positivo. Aunque la topología de este tipo de grupos es bastante conocida, sin embargo la demostración de este hecho se presenta como no trivial, y en el libro [3] se piden nuevas demostraciones (en [2] se pueden encontrar más citas en esta línea). En 1998 apareció una nota [2] en donde se presenta una demostración usando controlabilidad y asignación de valores propios. Se puede encontrar otra demostración en el libro [4].

En esta nota se presenta una nueva demostración usando trasformaciones elementales en el contexto del método reducción de Gauss-Jordan que puede encontrarse

*Financiado por el proyecto BFM2002-01308 del MCYT.

en muchos manuales de álgebra lineal como por ejemplo [1]. La idea es crear un procedimiento de eliminación de variables que no use el intercambio de filas. El camino se obtendrá uniendo los pasos de dicho procedimiento.

A modo de complemento cabe señalar que con un procedimiento similar se podría demostrar la conexión del conjunto de matrices de determinante negativo. También se puede pensar que dicho conjunto se obtiene al barrer una matriz fija con todas las de determinante positivo, llegando por fin a demostrar por tanto que el grupo lineal de matrices regulares tiene exactamente dos componentes.

2. Demostración del teorema principal

Siguiendo la notación de [1], vamos a llamar a la operación «suma a una fila un múltiplo de otra» operación elemental de tercer tipo. La demostración del susodicho teorema necesita dos proposiciones.

PROPOSICIÓN 1. *Sea A una matriz cuadrada y sea A' la matriz obtenida tras una transformación de tercer tipo. Entonces dichas matrices pueden ser unidas por un camino γ que verifica*

$$\det(\gamma(t)) = \textit{constante para } t \in [0,1].$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $E(i,j,\alpha)$ la operación «suma α veces la fila i a la fila j», entonces A' se obtendrá de A mediante $E(i_0,j_0,\alpha_0)$ para ciertos $i_0, j_0 \in \{1,\dots,n\}$ y $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Para cada cada $t \in [0,1]$ efectuemos en A la operación $E(i_0,j_0,t\alpha_0)$ y llamamos a la matriz resultante $\gamma(t)$. La función γ así construida es el camino deseado pues esta operación no varía el determinante. $\square$

PROPOSICIÓN 2. *Sea A una matriz cuadrada con determinante 1, entonces esta matriz se puede reducir a la matriz identidad usando sólo transformaciones elementales de tercer tipo.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración usa el procedimiento de eliminación de Gauss-Jordan. Este procedimiento lleva una matriz general a su forma escalonada reducida (en nuestro caso es la identidad), en un número finito de pasos, usando tres tipos de operaciones elementales. Vamos a ver que, en este caso, sólo es necesaria la operación de tercer tipo. Pongámonos pues en el contexto donde se usan las otras dos operaciones (véase la figura 1).

En esta situación, en el procedimiento original se suelen distinguir dos casos, $a_{i,i} \neq 0$ y $a_{i,i} = 0$. En el primero se obtiene un 1 principal multiplicando por $a_{i,i}^{-1}$, mientras que en el segundo se efectúa un cambio de columnas y se aplica el primer caso.

En nuestro contexto distinguimos tres casos:

1. Si existe $j > i$ tal que $a_{j,i} \neq 0$, hacemos la operación $E(i,j,\alpha)$ donde α se obtiene resolviendo la ecuación

$$a_{i,i} + \alpha a_{j,i} = 1.$$

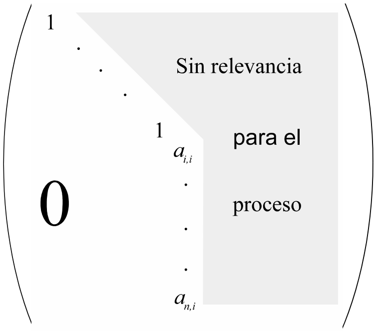

Figura 1: Una matriz como las de la Proposición 2.

2. Si $i \neq n$ y $a_{j,i}$ es cero para cada $j > i$, entonces $a_{i,i}$ es necesariamente no cero y basta con sumar la fila i a la fila $i+1$ para estar en el primer caso.
3. Si $i = n$ entonces la matriz es ya triangular y, en consecuencia, $a_{n,n}$ es el determinante de la matriz original, igual a 1 por hipótesis. Por tanto, no es necesaria ninguna operación elemental. □

Demostración del teorema principal. Sea A una matriz con determinante positivo y sea $\lambda > 0$ tal que $\det(\lambda A) = 1$. Llamamos $A_1 = \lambda A$ y con la Proposición 2 generamos una secuencia $A_2, A_3, \ldots, A_k = I_n$, donde para ir de A_{i-1} a A_i, $i = 2, \ldots, k$, es suficiente efectuar una operación elemental de tercer tipo. Ahora conectamos todas esas matrices: A con A_1 mediante el camino $\gamma_1(t) = (1 - t + t\lambda)A$ y para cada i desde 2 hasta k, A_{i-1} con A_i mediante el camino $\gamma_i(t)$ que proporciona la Proposición 1. Finalmente unimos todos esos caminos en la forma estándar en la teoría de lazos definiendo

$$\gamma(t) = \gamma_i(kt - i + 1) \text{ para } t \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right],$$

y con esto se acaba la demostración. □

Referencias

[1] H. Anton, *Introducción al álgebra lineal*, Editorial Limusa, México, 1990.

[2] A. Bhaya, Real matrices with positive determinant are homotopic to the identity, *S.I.A.M. Review* **40** (1998), 335–340.

[3] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications,* 3rd. ed., Academic Press, New York, 1988.

[4] F. R. Warner, *Foundations of Differenciable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill.-London, 1971.

J. Campos, Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Granada, 18071 Granada
Correo electrónico: `campos@ugr.es`