
MATEMÁTICAS EN LAS AULAS DE SECUNDARIA

Sección a cargo de

Antonio Pérez Sanz

Programas informáticos para la enseñanza de la Geometría

por

Antonio Pérez Sanz

La Geometría ha sido durante siglos uno de los pilares de la formación académica de los jóvenes desde edades muy tempranas. Relacionarse con el espacio físico que nos rodea es una necesidad imperiosa del ser humano desde su nacimiento. Por otra parte, nadie cuestiona la importancia de la geometría como formadora del razonamiento lógico. Pocos son quienes discuten su trascendencia tanto en estudios posteriores de cualquier ciencia como en el desarrollo de habilidades cotidianas.

Durante la segunda mitad del siglo pasado, la geometría perdió paulatinamente presencia en los planes de estudio. Afortunadamente, los actuales currículos de matemáticas de todos los niveles educativos confieren a esta rama de las matemáticas la importancia que nunca debió perder.

Pero a pesar de esta «recuperación» curricular de la geometría, una serie de interrogantes planean sobre el profesorado de secundaria:

¿Estamos enseñando a nuestros alumnos una geometría adecuada?

¿Es suficiente que nuestros alumnos calculen longitudes, áreas y volúmenes de figuras geométricas a partir de unos datos, despejando la magnitud desconocida de una expresión algebraica que relaciona objetos geométricos?

¿Es más importante calcular el área de un triángulo rectángulo o construir el triángulo rectángulo a partir de una circunferencia?

¿Pueden nuestros alumnos estudiar geometría analítica en segundo ciclo de educación secundaria sin conocimientos sólidos de geometría sintética?

En definitiva: ¿Qué geometría debemos enseñar?, ¿con qué herramientas metodológicas y tecnológicas?, ¿podemos seguir enseñando geometría como hace cincuenta años?

Actualmente disponemos de las herramientas necesarias para que la formación del alumno sea más completa. Los programas de geometría dinámica han demostrado en las dos últimas décadas su capacidad de ayuda al usuario para adquirir destrezas en uno de los campos más creativos de las matemáticas.

Los ejemplos más importantes para el apoyo a la enseñanza de la geometría mediante medios informáticos son los llamados programas de Geometría Dinámica. Proporcionan, sin duda una ayuda extraordinaria para la experimentación, es decir, para la construcción de conceptos y la visualización de resultados y propiedades geométricas a través de la práctica experimental. Los programas que entran en la categoría de Sistemas de Geometría Dinámica (DGS) permiten construcciones de geometría elemental, donde los elementos que se construyen se definen fundamentalmente por propiedades cualitativas no mediante ecuaciones y geometría analítica, aunque ésta esté detrás, en el funcionamiento interno del programa y en algunos casos como Geogebra también delante y en pantalla (Rafael Losada, LA GACETA 10 (2007) 1, pp. 223–239).

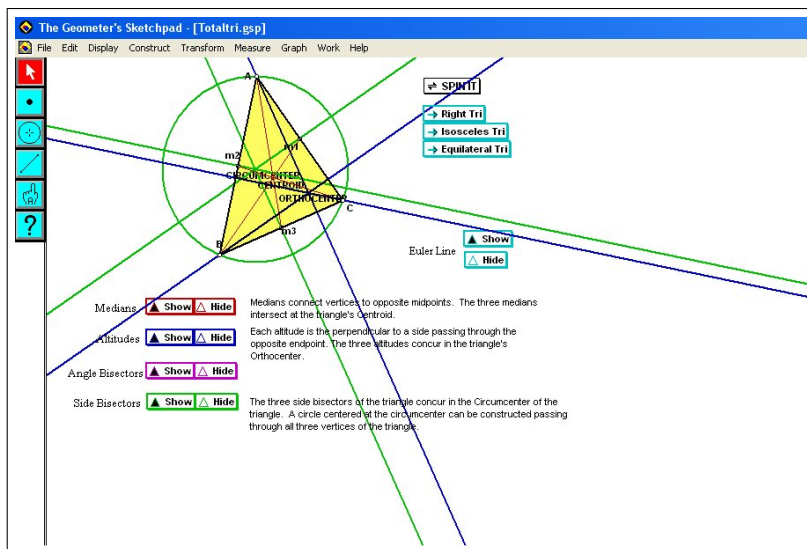
Una vez definida la construcción ésta se puede «mover» y deformar pero las condiciones que definen cada elemento permanecen invariables. Normalmente al abrir un programa de Geometría Dinámica aparece una ventana con un área de trabajo que desempeña el papel de pizarra donde se dibujan las construcciones geométricas. Además hay una barra con botones de herramientas y menús que permiten definir y establecer las características de cada elemento.

1 . CATÁLOGO DE PROGRAMAS

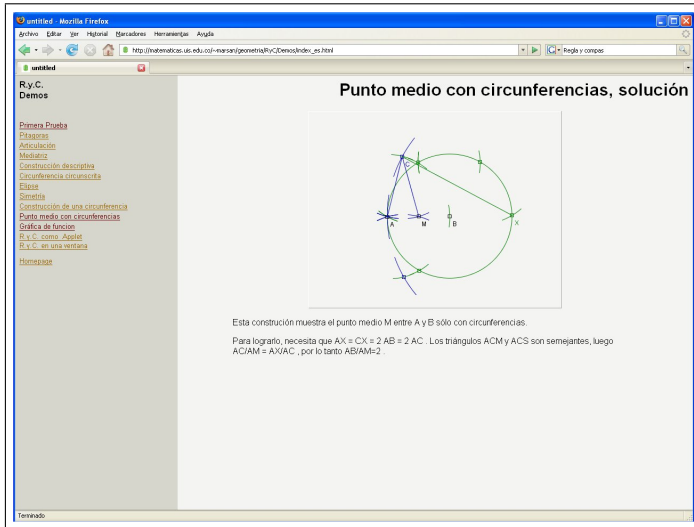
Existen varios programas de Geometría Dinámica, algunos de ellos ya presentados en números anteriores de LA GACETA, que son similares aunque cada uno tiene características especiales que le hacen mejor para algunas cosas. Una primera aproximación a un catálogo mínimo de este tipo de software no puede dejar de incluir los siguientes:

- *Cabri-Geometre*, es el más antiguo y por ello tiene la ventaja de tener el mayor número de desarrollos efectuados por usuarios, está incluso incluido en algunas calculadoras gráficas de Texas Instruments. Es sin duda el más utilizado aunque tiene algunos fallos de continuidad debidos a su codificación interna. Desarrollado por Jean- Marie Laborde y Franck Bellemain. <http://www.cabri.com>
- *Geogebra* es un programa muy similar a Cabri en cuanto a instrumentos y posibilidades pero incorporando elementos algebraicos y de cálculo. La gran ventaja sobre otros programas de geometría dinámica es la dualidad en pantalla: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. Desarrollado por Markus Hohenwarter, <http://www.geogebra.at>. Es un programa libre y gratuito, GNU General Public License. (Rafael Losada, LA GACETA 10 (2007) 1, pp. 223–239)

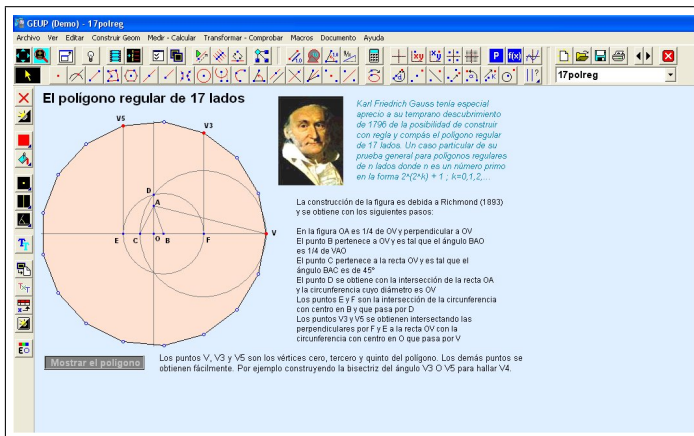
- *The Geometer's Sketchpad* es tan antiguo como Cabri y con gran difusión en Estados Unidos. Tiene todas las cualidades de Cabri y además tiene posibilidades de tratamiento y estudio de funciones, lo que permite ser utilizado también en temas distintos de los estrictamente geométricos. El inconveniente es que está en inglés. Desarrollado por Nicholas Jackiw. <http://www.dynamicgeometry.com>



- *Cinderella*, tiene la ventaja de estar programado en Java, posee potentes algoritmos utilizando geometría proyectiva compleja, un comprobador automático de resultados y la posibilidad de realizar construcciones y visualizar en geometría esférica e hiperbólica. Por el lado negativo no admite «macros», pequeñas construcciones auxiliares que son de utilidad. (Antonio F. Costa, LA GACETA 4 (2001) 1, pp. 273–278)
- *R y C* (Regla y Compás), está también programado en Java, está traducido al castellano y tiene la ventaja de ser de libre uso y gratuito. Permite la exportación de ficheros a formato `html` para visualizarlos con cualquier navegador. Tiene prestaciones similares a Cinderella o Cabri aunque es menos versátil. Desarrollado por R. Grothmann. <http://matematicas.uis.edu.co/marsan/geometria/RyC/Demos/index.es.html>



- *GEUP* está también en castellano y programado por un español: Ramón Álvarez Galván. De características similares a Cabri. Se puede descargar una versión de prueba desde la página <http://www.geup.net>.

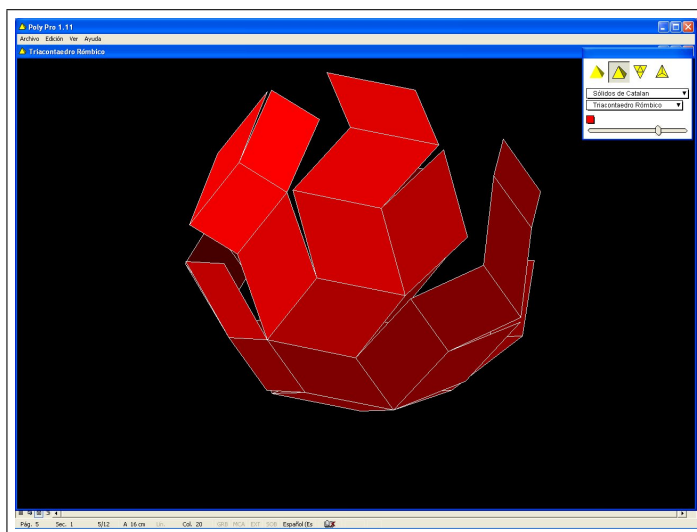


- *WinGeom* es otro excelente programa geométrico que no tiene nada que envidiar a los programas comerciales. Permite trabajar con herramientas de construcción y medida tanto en el plano como en el espacio. Incorpora la posibilidad de trabajar con geometría esférica e hiperbólica. Forma parte de un conjunto de distintos programas conocido con el nombre de «Peanut Software» desarrollado por Rick Parris del Departamento de

Matemáticas de la Phillips Exeter Academy (USA). Descarga e información: <http://math.exeter.edu/rparris/>

Seguramente lo mejor para estudiar cuerpos geométricos sea el modelo sólido real, es decir, el propio cuerpo. Pero a veces no es tan fácil disponer de todos los cuerpos geométricos y en cantidad y tamaño suficiente. Por eso viene bien disponer de programas que permiten visualizar estos cuerpos de forma dinámica. Existen muchos programas de características similares, reseñaremos uno de ellos.

- *Poly Pro* es un programa para visualizar, analizar, desarrollar y estudiar las formas poliédricas. Puede mostrar poliedros en tres modos principales:
 - como imagen tridimensional,
 - como una red bidimensional aplanada, como un desarrollo plano
 - como una incrustación topológica en el plano.



Las imágenes tridimensionales pueden girarse y plegarse/desplegarse en forma interactiva. Los modelos físicos se pueden construir imprimiendo la red bidimensional aplastada, recortando luego el perímetro, plegando las aristas y finalmente pegando las caras vecinas. Poly Pro agrega la posibilidad de exportar los modelos tridimensionales usando formatos estándar para datos tridimensionales. El modelo exportado puede importarse en otros programas de modelado.

Los poliedros que presentan son:

- Poliedros regulares. Sólidos platónicos
- Poliedros arquimedianos
- Prismas y antiprismas
- Sólidos de Johnson
- Deltaedros
- Sólidos de Catalan
- Dipirámides y deltoedros: duales de prismas y antiprismas
- Esferas y domos geodésicos

Es un programa shareware que se puede obtener en castellano en esta web: <http://www.peda.com/>

Puede servir tanto en secundaria como en primaria para «presentar» poliedros virtuales.

2 . VALORACIÓN DIDÁCTICA

Como las características y aplicaciones de casi todos los programas reseñados son muy similares y en vista del excelente estudio sobre Geogebra realizado en esta misma sección en el número anterior por Rafael Losada, presentaré una valoración del potencial didáctico de uno de ellos, quizás el más popular y conocido hasta ahora entre el profesorado de secundaria.

3 . CABRI II PLUS. CABRIWEB

El programa Cabri-Geometre II fue diseñado por Jean Marie Laborde y Franck Bellemain en la Universidad Joseph Fourier de Grenoble (Francia) y experimentado en sus aulas. Web: <http://www.cabri.com/>



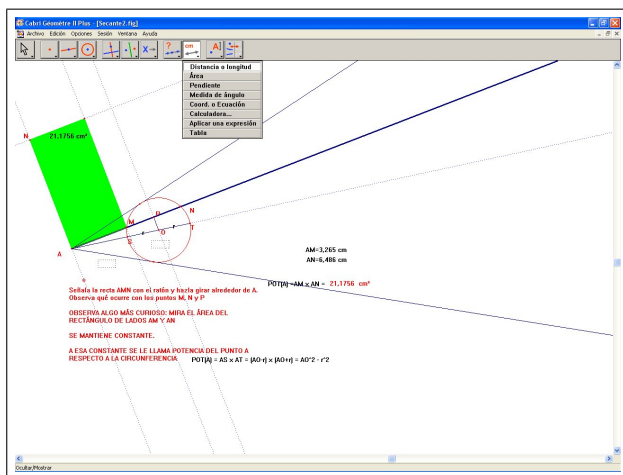
3.1 . DESCRIPCIÓN

Se trata de un excelente programa diseñado para construir geometría. Permite construir objetos geométricos, visualizarlos de forma dinámica, manipularlos, transformarlos y realizar medidas sobre ellos. Permite estudiar en el plano, y ahora con Cabri 3D también en el espacio todo, tipo de propiedades geométricas y lugares geométricos de forma sencilla e intuitiva. Muy fácil de utilizar para los alumnos.

El programa permite realizar con el ordenador todas las construcciones que se pueden realizar con regla, compás y las herramientas habituales de dibujo, pero con este programa se pueden manipular directamente las figuras construidas en la pantalla mediante el arrastre con el ratón de ciertas partes de ellas. De hecho, una vez elaborada una figura geométrica, Cabri reconoce cuáles son las partes (de dicha figura) que pueden ser arrastradas. Es fundamental señalar que esto ocurre, sin alterar las relaciones estructurales entre las partes constitutivas de la figura, lo que le convierte en una herramienta muy valiosa para el estudio de invariantes y propiedades geométricas de carácter general de los objetos geométricos. En concreto es un instrumento de primer orden para el estudio dinámico de lugares geométricos

3.2 . CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES

Es un programa fundamentalmente gráfico que funciona a través de un menú basado en botones para acceder a las distintas funciones.



Permite construir:

- Puntos: aislados, sobre un objeto, como intersección.
- Figuras rectilíneas: rectas, semirrectas, segmentos, vectores, triángulos, polígonos y polígonos regulares.

- Figuras curvilíneas: circunferencias, arcos de circunferencia, cónicas...
- Construcciones y herramientas: punto medio, recta perpendicular, recta paralela, mediatriz, bisectriz, suma de vectores, construcciones con compás, transferir medidas, lugares geométricos...
- Movimientos en el plano: simetría central y axial, traslación, rotación, homotecia e inversión...
- Determinación de posiciones relativas: pertenece un punto a un objeto, están alineados tres puntos, es equidistante, son paralelas dos rectas, son perpendiculares...
- Medidas: coordenada, distancia, longitud, área, ángulo, pendiente, ecuación, valores numéricos de expresiones algebraicas, crear tablas...
- Elementos de edición: texto sobre objetos, números, expresiones...
- Marcas sobre objetos: ángulos, hacer trazas, animar objetos...
- Elementos de diseño gráfico: color, espesor, llenado, ocultar, mostrar, aspecto, punteado, ejes, cuadrícula...

Cabri tiene un problema nada desdeñable, su dificultad de exportar sus gráficos y sus animaciones a otras aplicaciones más familiares para el usuario.

Hace unos años los creadores de Cabri han lanzado el Proyecto CabriWeb, que permite disfrutar de las aplicaciones con animaciones y la posibilidad de manipulación de los objetos geométricos a través de cualquier navegador de Internet mediante applets de Java. Ahora Cabri puede traducir sus aplicaciones al lenguaje Java y permite verlas en ficheros html sin necesidad de tener el programa cargado en el ordenador. La idea es simple: una aplicación llamada CabriWeb que traduce directamente un fichero de Cabri a un fichero html con un applet de Java incluido.

La aplicación está en la red (en <http://www.cabri.net/cabrijava/>) con manual incluido.

3.3 . APLICACIONES EN CLASE

El programa permite estudiar figuras geométricas en movimiento. Esta facultad nos permitirá:

- Estudio de la rigidez y deformabilidad de una figura.
- Movimientos que conservan algunas propiedades.
- Definición apropiada de figuras en el Cabri con el fin de que tengan propiedades invariantes si son sometidas a movimientos de sus componentes.

La definición de una figura a través de elementos distintos permite comprobar de forma aproximada algunas propiedades de simetría e igualdad:

- Definición de una figura mediante movimientos y simetrías y posterior estudio métrico.
- Comprobación de teoremas (Pitágoras, Tales, etc.) en figuras con elementos móviles.

La facilidad de definición de movimientos, semejanzas y simetrías y la posibilidad de ocultar líneas auxiliares nos permiten la búsqueda de elementos notables entre figuras homólogas:

- Búsqueda por tanteo del centro y ángulo de giro o de ejes de simetría.
- Construcción de vectores de traslación.
- Construcción de figuras mediante movimientos.

Es muy interesante la combinación de elementos fijos y móviles para estudiar cómo cambian algunas relaciones según la distinta posición de algunos elementos:

- Diferencias entre altura, bisectriz y mediana en un triángulo. Relaciones métricas.
- Tangentes, cuerdas y secantes a una circunferencia.
- Cuerda común a dos circunferencias.

La posibilidad de definir macros permitirá a los alumnos mayores sintetizar en pocos elementos la definición de una figura:

- Construcción de paralelogramos mediante traslaciones, ángulos o puntos.
- Dibujo de polígonos regulares mediante giros y simetrías.
- Construcción de figuras nuevas mediante movimientos de otras conocidas.

En concreto en el segundo ciclo de la ESO el programa se puede utilizar para estudiar los siguientes contenidos:

- Figuras semejantes
- Teorema de Tales.
- Semejanza de triángulos.
- Relación entre las áreas de figuras semejantes.
- Teorema del cateto y Teorema de la altura.
- Ángulos y áreas.
- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Relaciones fundamentales.
- Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera.

- Vectores. Operaciones.
- Vector que une dos puntos.
- Ecuación de la recta.
- Ecuación de la circunferencia.

3.4 . VALORACIÓN DIDÁCTICA

El programa es de fácil manejo y no requiere de mucho tiempo y esfuerzo para su aprendizaje. Al tratarse de un programa de dibujo se pueden comprobar los aciertos y errores de la construcción de forma automática. La manipulación directa de los objetos geométricos hace posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles para el alumno. Además, su conocimiento queda marcado por relación directa entre percepción y conceptualización durante la interacción con el programa y la socialización en el marco de la clase. Cabri incorpora herramientas de medida directa de los objetos construidos lo que permite desarrollar no sólo un enfoque sintético de la geometría sino que hace posible abordar problemas métricos sobre objetos geométricos reales, algo poco trabajado en clase hasta ahora. Dado el control formal del entorno, las experiencias desarrolladas pueden considerarse como genuinas investigaciones geométricas. La visualización y las representaciones externas permiten atender otro problema medular del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas: el problema de la validación de los enunciados matemáticos y de la comprobación de los resultados.

3.5 . METODOLOGÍA DE USO

Cabri facilita una metodología activa en la que los alumnos además de construir figuras, pueden experimentar con ellas, comprobar conjeturas, descubrir propiedades y, en definitiva, hacer geometría. El papel del profesor será, fundamentalmente, el de preparar el material impreso de apoyo, observar y ayudar para resolver las dudas particulares de cada equipo, el de motivar para la actividad y promover la reflexión, el intercambio de conjeturas y conclusiones, etc.

Se puede plantear dos posibilidades de uso del programa:

- El trabajo con toda la clase en el aula de informática con equipos estables de dos alumnos por ordenador con prácticas guiadas y desarrollando auténticas investigaciones geométricas y de descubrimiento de propiedades de los objetos estudiados. En este caso, las actividades han de ser auto-explicativas para que los alumnos vayan teniendo cada vez más autonomía. También serán necesarias explicaciones al grupo (sobre todo al comienzo de cada sesión en que conviene aclarar el sentido de lo que se va hacer y puede que también cómo transcurrió la sesión anterior).

- El uso como pizarra digital en la clase ordinaria por parte del profesor o de los alumnos para poner de manifiesto propiedades de las figuras y cuerpos, relaciones entre los elementos de las figuras, resultados métricos, para mostrar situaciones y realizar comprobaciones.

Mediante la aplicación CabriWeb se pueden pasar los modelos a formato `html` lo que hace posible verlos con un navegador en ordenadores que no tienen el programa Cabri cargado.

Existen muchas y muy buenas direcciones de Internet con aplicaciones didácticas desarrolladas con estos programas. Entre ellas hay que destacar:

- Curso de Geometría, de José Manuel Arranz. 2º Premio materiales CNI-CE 2005, <http://mimosa.cnice.mecd.es/clobo/geoweb/2eso.htm>
- Geometría con Cabri, <http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/>
- Modelos de máquinas y mosaicos con Cabri, de José Antonio Mora, <http://teleline.terra.es/personal/joseantm/>
- Más modelos de Carmen Arriero e Isabel García, <http://platea.cnice.mecd.es/~mcarrier/>
- Colección de aplicaciones de Carlos Fleitas en la web del IES Marqués de Santillana de Colmenar Viejo, <http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm>
- Algunos ejemplos en la página del IES Salvador Dalí, <http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1/index.html>

4 . CONCLUSIÓN

Al fin parece posible, si la estabilización de los currículos lo permite de manera definitiva o al menos durante unos pocos años, que la geometría recupere el sitio que nunca debía haber perdido en las aulas de primaria y de secundaria. Y no nos referimos exclusivamente a la geometría analítica. La geometría sintética, la geometría descriptiva, la que estudia además de medidas, relaciones y propiedades de las formas y figuras, desaparecida durante muchos años de las aulas, debe volver a ellas por el bien de todos. Es por otra parte la rama de las matemáticas más fácilmente visualizable y manipulable.

Apuntaba Miguel de Guzmán, hace diez años, (El Rincón de la pizarra, Pirámide 1996), que era muy razonable pensar que el reforzamiento de la visualización que se percibe en la actualidad en el quehacer matemático en general y en los procesos de transmisión de las formas consagradas de proceder ha de conducir a una mayor facilidad de los futuros matemáticos y usuarios de las matemáticas; y añadido yo que también de los profesores y sobre todo de los estudiantes de matemáticas en cualquier nivel educativo. En la actualidad las tecnologías de la información y de la comunicación y el software propio de

matemáticas hacen posible, e incluso necesario, reivindicar no sólo un rincón de la pizarra para visualizar las ideas matemáticas, sino en el caso de la geometría la pizarra completa; y mejor si es digital.

Hoy en día la dotación de los centros de secundaria con aulas de informática, proyectores, pizarras digitales... y la existencia y accesibilidad de un software potente y atractivo hacen posible que la aproximación de los jóvenes a la geometría se produzca como una verdadera actividad matemática: como una actividad de auténtica investigación. Los programas estudiados nos permiten convertir nuestras aulas en auténticos laboratorios de geometría. No los desaprovechemos.

REFERENCIAS

- [1] J. M. ARRANZ, *Análisis de estructuras geométricas con CABRI II. El lenguaje de las matemáticas en sus aplicaciones*. MEC. Madrid 2002. pp. 11–45.
- [2] M. DE GUZMÁN, *La experiencia de descubrir en Geometría*. Nivola, 2002.
- [3] M. DE GUZMÁN, *El rincón de la pizarra*. Pirámide, 1996.
- [4] MEC, *La Enseñanza de las Matemáticas a Debate: Referentes Europeos*. Madrid, 2001.
- [5] MEC, *Marcos teóricos de PISA 2003*. INECSE, Madrid, 2004.
- [6] MEC, *Metodología y aplicaciones de las matemáticas en la ESO*. Madrid, 2004.
- [7] NTCM, *Principios y estándares para la Educación Matemática del NCTM*. (National Council of Teachers of Mathematics). SAEM Thales. Granada 2003.
- [8] NTCM, *Principles for School Mathematics, The Technology Principle*. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM). <http://standards.nctm.org/document/chapter2/techn.htm>
- [9] A. PÉREZ SANZ, *El lenguaje de las matemáticas en sus aplicaciones*. MEC, Madrid 2002, Págs. 201–221.
- [10] A. PÉREZ SANZ, *Integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en las clases de Matemáticas*. Proyecto de investigación CAM, 2006.
- [11] A. PÉREZ SANZ, Lenguajes gráficos en Matemáticas. *Revista de Didáctica de las Matemáticas* UNO (1995) 4.
- [12] A. PÉREZ SANZ, Matemáticas en Internet, *Cuadernos de Pedagogía* 288 Febrero 2000.
- [13] A. PÉREZ SANZ, *Internet en el aula de secundaria, Unaventana al mundo matemático. Usos matemáticos de Internet*, MEC, Madrid, 2005.

- [14] SECRETARÍAS DE COMERCIO Y EDUCACIÓN DE LOS ESTADOS UNIDOS, *Informe «2020 Visions, Transforming Education and Training Through Advanced Technologies»*, 2002.
<http://www.ta.doc.gov/reports/TechPolicy/2020Visions.pdf>.
Visiones 2020: Los Sistemas de Aprendizaje de Próxima Generación.
Visiones 2020: Viñetas sobre las Futuras Tecnologías de Aprendizaje.
<http://www.ta.doc.gov/reports/TechPolicy/2020Visions.pdf>
- [15] VV.AA, *Matemáticas para el siglo XXI*. Universitat Jaume I, Valencia, 2006.
- [16] VV.AA, *El currículo de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. GRAÓ, Barcelona, 2000.
- [17] VV.AA, *Enseñar matemáticas*. GRAÓ, Barcelona, 1996.

PÁGINAS DE INTERNET

José Antonio Arranz,

<http://roble.pntic.mec.es/%7Ejarran2/>

Página de aplicaciones educativas de Cabri-Geometre II y Cabri-java.

Curso de Geometría. 2º Premio materiales CNICE 2005,

<http://mimosa.cnice.mecd.es/clobo/geoweb/2eso.htm>

Página de aplicaciones educativas de Cabri-Geometre II y Cabri-java.

José Antonio Mora,

<http://www.terra.es/personal/joseantm/>

Página de aplicaciones educativos de Cabri-Geometre II y Cabri-java y propuestas didácticas completas de aplicación de estos programas.

Carmen Arriero e Isabel García,

<http://platea.cnice.mecd.es/~mcarrier/>.

Modelos de Cabri.

Antonio Pérez. Matemáticas,

<http://platea.pntic.mec.es/aperez4/>

IES Marqués de Santillana, Colmenar,

<http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/matem/inddep.htm>

Excelente página con unas cuantas propuestas de temas de geometría dinámica tratados con programas informáticos.

IES Salvador Dalí, Madrid,

<http://centros5.pntic.mec.es/ies.salvador.dali1>

Página del departamento de matemáticas. Incluye materiales para el aula y los materiales elaborados en el proyecto Más allá de la tiza y la pizarra, premio de la CAM en 2001.

IES Pravia,

<http://www.iespravia.com/mates/prog/programacion/indice.htm>

Programación y recursos de matemáticas por niveles.

Antonio Pérez Sanz
Catedrático de Matemáticas
IES Salvador Dalí, Madrid
Correo electrónico: aperez@rsme.es