Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

John G. Thompson y los grupos finitos[1]

por

Gabriel Navarro

1 La Conjetura de Frobenius

En el *New York Times* de 24 de Abril de 1959 aparecía un artículo titulado

50-YEAR PROBLEM IN MATH IS SOLVED

Student, 26, Proves Finite Conjecture

John Thompson. Fuente: P. R. Halmos, *I have a photographic memory*, AMS, 1987.

El estudiante era John Thompson, y el problema que se había resuelto era la conjetura de Frobenius sobre automorfismos sin puntos fijos. Aunque el periodista no lo menciona, empezaba la era moderna de la Teoría de Grupos Finitos.

Me doy cuenta de que algunas frases relacionadas con la importancia matemática de Thompson parecen exageradas. Pero no lo son. Por ejemplo, Ron Solomon dice en **[8]** a propósito de uno de los artículos más famosos de la historia de las matemáticas (W. Feit, J. Thompson, Solvability of Groups of Odd Order,

[1]Este artículo está financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia proyecto MTM2004-06067-C02-01

Pacific J. Math. **13** (1963), 775-1029): "*...a moment in the evolution of finite group theory analogous to the emergence of fish onto dry land*".

Sin embargo, la medalla Fields no le fue concedida a Thompson por ninguno de estos dos resultados sino por la clasificación de los grupos finitos simples minimales.

John Griggs Thompson nació el 13 de Octubre de 1932 en Ottawa, Kansas (USA). Estudió Matemáticas en Yale, doctorándose en la Universidad de Chicago en 1959 bajo la dirección del famoso y recientemente fallecido Saunders MacLane. La Universidad de Chicago era en aquellos años (como todavía lo es ahora) uno de los centros principales de la teoría de grupos en el mundo. Su tesis doctoral *"A proof that a finite group with a fixed-point-free automorphism of prime order is nilpotent"* resolvió una vieja conjetura de Frobenius. Como exactamente refleja el título de la tesis, Thompson probó que si α es un automorfismo de orden primo de un grupo finito G tal que $\alpha(x) \neq x$ para todo $x \neq 1$, entonces G es nilpotente. Pero no fue la solución de esta conjetura lo más maravilloso del caso, sino la creación de nuevas técnicas revolucionarias en la teoría de grupos, que nadie había sospechado que existían hasta ese momento. John Thompson había inventado la *teoría local de grupos finitos*, que tan fundamental resultaría en la clasificación de los grupos finitos simples.

2 LOS GRUPOS SIMPLES SON COMO LOS NÚMEROS PRIMOS

Salvando las (enormes) distancias, se podría decir que los grupos simples juegan en la teoría de grupos finitos el papel que los números primos hacen en la teoría de números. Recordamos que un subgrupo N de un grupo G se dice **normal** (y se escribe $N \triangleleft G$) si

$$Ng = gN$$

para todo $g \in G$. El concepto de subgrupo normal es esencial en la teoría de grupos pues permite definir un nuevo grupo G/N (llamado **cociente**). Los elementos de este nuevo grupo son los subconjuntos

$$Ng \mid g \in G$$

que se multiplican como subconjuntos de G. (Si G es finito, entonces el orden de este nuevo grupo es $|G/N| = |G|/|N|$.) Como no puede ser de otra manera, la estructura de G/N está estrechamente ligada a la de G. Si conocemos los grupos N y G/N (pongamos por caso, al probar un cierto teorema por inducción) obtenemos una valiosa información que seguramente nos ayudará a conocer mejor G. Pero ¿y si G no tiene subgrupos normales $1 < N < G$?

Un grupo G es **simple** si no tiene subgrupos normales (salvo 1 y G). Decíamos antes que los grupos simples son como los números primos... Pero ¿en qué sentido? Si G es un grupo finito, de entre los subgrupos normales de G (distintos de G) podemos elegir N con orden lo mayor posible. De la maximalidad de N como normal, fácilmente se deduce que el grupo $S = G/N$ es simple. Repitiendo este proceso, podemos hallar una serie de subgrupos

$$1 = N_k \triangleleft N_{k-1} \triangleleft N_1 \triangleleft N_0 = G$$

con cocientes $S_i = N_i/N_{i+1}$ simples. El Teorema de Jordan-Hölder afirma que el conjunto de estos grupos simples S_i (los **factores de composición**) está unívocamente determinado por G, es decir no depende de la serie elegida. Todo grupo finito, pues, se *construye* a partir de grupos simples. Parece razonable pensar que si queremos entender los grupos finitos, debamos empezar entendiendo los grupos simples.

3 Quiénes son los grupos simples

Dicho de otro modo: ¿quiénes son los grupos que no poseen subgrupos normales?

Hay grupos simples que lo son porque sencillamente no tienen *espacio* para tener ningún subgrupo. Estos son los grupos que tienen p elementos, donde p es un número primo. Estos grupos, como el grupo de raíces p-ésimas complejas de la unidad, son cíclicos y no tienen gran interés como grupos simples. Los grupos finitos cuyos factores de composición son todos cíclicos se llaman **resolubles** y fueron descubiertos por Abel y Galois en su estudio de la resolución de ecuaciones polinómicas por radicales. Los grupos resolubles, que tan ligados están a los números primos, tienen propiedades aritméticas fascinantes.

Aparte de los cíclicos de orden un número primo p, existen, claro está, otros grupos simples. Los grupos alternados A_n de las permutaciones pares de un conjunto con n elementos son grupos simples para todo natural n mayor o igual que cinco. (La simplicidad de estos grupos alternados explica que para $n \geq 5$ haya polimonios racionales de grado n cuyos ceros no son expresables mediante radicales).

Pero la familia más numerosa de grupos simples son los grupos $G(q)$ llamados de *tipo Lie* asociados a espacios vectoriales finitos de tamaño q y a ciertas geometrías. Galois ya conocía alguno de estos grupos, como el grupo proyectivo especial de matrices sobre el cuerpo de q elementos, de determinante uno, sobre su centro. Casi todos los grupos de tipo Lie (excepto los llamados *excepcionales*) eran ya conocidos a principios de siglo XX como grupos clásicos análogos a los correspondientes sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, y fueron estudiados entre otros por Jordan ó Dickson. En los años 1950, Chevalley dio una teoría uniforme para ellos.

Mucho antes, en 1861, Mathieu había descubierto cinco grupos simples que no eran alternados, y que tampoco iban a a pertenecer a ninguna de las distintas familias de los grupos de tipo Lie. Estos grupos fueron llamados *esporádicos*, y constituían un gran misterio. ¿Habría más como ellos? ¿Cuántos?

Si había más, ¿cómo se iban a encontrar? Esta fue la pregunta fundamental de la teoría de grupos durante décadas. Casi un siglo después de Mathieu, Janko detectó otro grupo esporádico que había permanecido oculto, a pesar de su tamaño relativamente pequeño: 175.560 elementos. A partir del descubrimiento de Janko fueron encontrándose grupos simples esporádicos hasta llegar a 26. J. Thompson también descubrió su grupo esporádico, que se denomina Th y cuyo orden es

$$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 53 \cdot 72 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31\,.$$

El grupo esporádico de mayor tamaño es M, el *monstruo*, de orden alrededor de 10^{54} elementos.

4 El Teorema del Orden Impar

Todos los grupos simples no abelianos de los que hemos hablado tienen orden par. El famoso teorema de Feit y Thompson dice que éste es en realidad el caso general.

De acuerdo con Richard Brauer ([**3**]) ya en los años 1920 se mencionaba como una vieja conjetura que los grupos simples no abelianos debían tener orden par. Brauer, cuando describe el trabajo de Thompson en el congreso en el que éste recibe la medalla Fields, dice acerca de la conjetura: *"While it was usually mentioned in courses on algebra, it is only fair to say that nobody ever did anything about it, simply because nobody had any idea how to get even started"*.

Como leemos, nadie tenía la menor idea de cómo empezar a demostrar este teorema. J. Thompson, con la ayuda de su recién construida teoría local y, Walter Feit, utilizando la teoría de caracteres, asumieron el reto de probarlo. La importancia del Teorema de Feit-Thompson sobre la paridad de los grupos simples no abelianos (o equivalentemente, sobre la resolubilidad de los grupos de orden impar) es imposible de exagerar. Es un teorema de una complejidad enorme, de nuevas ideas y técnicas para la teoría de grupos. 30 años después de probarse, todavía se han publicado dos libros en Cambridge University Press ([**1**], [**6**]) en los que se analiza la demostración y se simplifican algunos casos. (El lector encontrará valiosa información sobre el teorema del orden impar y W. Feit, en el artículo [**7**] dedicado a la memoria de éste).

5 Grupos Simples Minimales

A partir del Teorema de Feit-Thompson, los grupos simples tenían orden par y por tanto contenían *involuciones*, es decir, elementos $t \neq 1$ con $t^2 = 1$. Este fue el primer paso, y quizá el más grande, en la clasificación de los mismos. El segundo fue la idea maravillosa de Richard Brauer de clasificar los grupos simples de acuerdo con cómo era el subgrupo

$$\mathbf{C}_G(t) = \{g \in G \,|\, tg = gt\}\,.$$

Pero el trabajo por el que J. Thompson recibió la medalla Field (en el ICM de Niza, 1970) fue por la clasificación de los grupos no resolubles cuyos subgrupos propios son resolubles ([**9**]), un paso esencial y de enorme impacto en la clasificación de los grupos finitos simples. Por ejemplo, como consecuencia del trabajo de Thompson, el orden de todo grupo simple no cíclico debía ser divisible por 3 ó por 5.

La clasificación de los grupos simples, uno de los hitos de la Matemática del siglo XX, establece que todo grupo simple no cíclico es alternado, de tipo Lie o uno de los 26 esporádicos. La contribución de John Thompson en la misma fue, como hemos visto, fundamental.

6 Después de la Clasificación

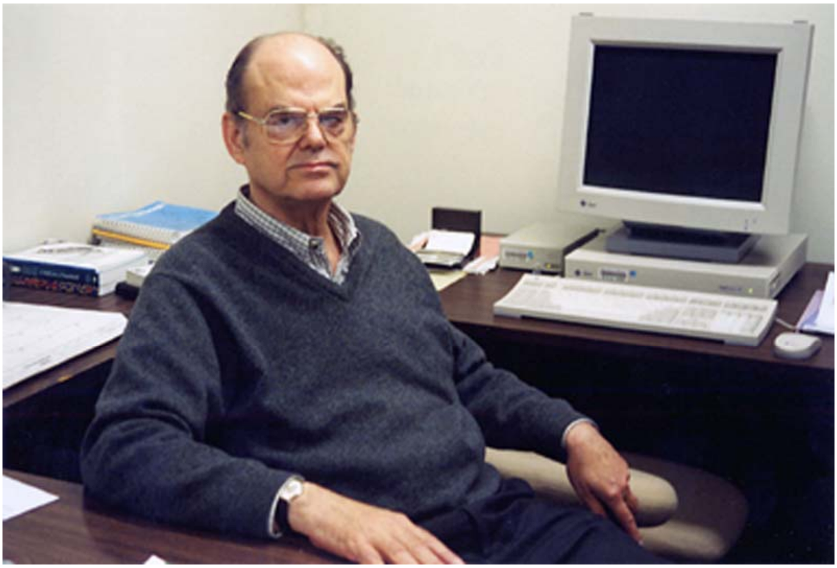
En 1983, Daniel Gorenstein, arquitecto principal de la clasificación y el más entusiasta promotor de la misma, anunció que la Clasificación de los Grupos Simples estaba finalizada. Esta decisión estuvo sin duda marcada por la polémica. Muchas voces autorizadas han coincidido en que el anuncio fue algo precipitado, pues había especialmente un caso (el llamado caso "quasithin"), no publicado, que no había sido analizado por el suficiente número de especialistas. (Debemos recordar al lector que la Clasificación es un proyecto de miles de páginas, y de centenares de artículos de investigación). Hoy en día, con la reciente publicación por M. Asbascher y S. Smith de la demostración de este caso, no hay ninguna duda de que la Clasificación es correcta, y su prueba completa.

Después del anuncio de Gorenstein, Thompson siguió trabajando en grupos finitos (como por ejemplo en la conjetura $k(B)$ de Brauer), pero también en otros problemas fundamentales de otros campos de las Matemáticas. Los resultados obtenidos por Thompson en teoría de códigos contribuyeron años más tarde a la demostración por C. W. H. Lam de la inexistencia de planos proyectivos finitos de orden 10, uno de los grandes problemas en Combinatoria. Pero donde Thompson ha trabajado más activamente en los últimos años ha sido en el Problema Inverso de Galois, propuesto por Emmy Noether: si G es un grupo finito, ¿existe una extensión de Galois $L/\mathbb{Q}$ tal que el grupo de Galois de la extensión $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sea isomorfo a G? Entre los resultados de Thompson en este campo está un criterio que, en particular, implica que tal extensión existe cuando el grupo G es el Monstruo.

Del trabajo de Thompson sobre el Problema Inverso de Galois se dice en [**4**]: *"Thompson's work may well be the most important advance since Hilbert's time"*.

J. Thompson fue profesor en la Universidad de Chicago (1962-1968), Rouse Ball Professor of Mathematics en la Universidad de Cambridge (1970-1993), y desde 1993 es Profesor de Investigación en la Universidad de Florida. Es Doctor Honoris Causa por las universidades de Illinois (1968), Yale (1975), Chicago (1985) y Oxford (1987, [**2**]). Entre otros galardones, Thompson es Cole Prize de la American Mathematical Society (1966), miembro de la National Academy of Sciences (1971) y de la Royal Society de Londres (1979), Poincaré Medal de la Academie des Sciences (1992, Paris), y Wolf Prize (1992) entregado por el Presidente de Israel. En el año 2000 se le concedió la National Medal of Science por el Presidente Clinton.

Los estudiantes de Thompson, entre los que destacamos a D. Benson, L. Dornhoff, P. Ferguson, D. Goldschmidt, R. Griess, C. Ho, R. Lyons, D. Mason, R. Sandling o A. Whitcomb, han tenido una influencia extrema en la teoría de grupos finitos.



J. Thompson en su despacho en la University of Florida, en Gainesville (cortesía de Jane Campion).

REFERENCIAS

[1] H. BENDER, G. GLAUBERMAN, *Local analysis for the odd order theorem*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 188. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[2] G. W. BOND, Eulogy: J. G. Thompson, *Bull. London Math. Soc* **19** (1987) 6, 635–636.

[3] R. BRAUER, On the work of John Thompson, *Actes du Congrès International des Mathématiciens*, Nice, 1970 **1** (Paris, 1971), 15–16.

[4] Carleson and Thompson receive Wolf Prize, *Notices Amer. Math. Soc.* **39** (1992) 4, 321–322.

[5] W. Feit, J. Thompson, Solvability of Groups of Odd Order, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 775–1029.

[6] T. Peterfalvi, *Character theory for the odd order theorem.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 272. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[7] L. Scott, R. Solomon, J. Thompson, J. Walter, E. Zelmanov, Walter Feit (1930-2004), *Notices Amer. Math. Soc.* **52** (2005) 7.

[8] R. Solomon, A brief history of the classification of the finite simple groups, *Bull. Amer. Math. Soc.* (N. S.) **38** (2001), 315–352.

[9] J. Thompson, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968) 383–437.

Gabriel Navarro
Facultat de Matemàtiques
Universitat de València
Burjassot, València 46100, España
Correo electrónico: gabriel.navarro@uv.es