Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

Un texto historiográfico clásico: El artículo MATEMÁTICAS de Andrei N. Kolmogórov publicado en la Enciclopedia Soviética de 1936

por

Mario H. Otero

Algunos grandes matemáticos rusos han tenido un serio amor por la historia de las matemáticas, por la filosofía de las matemáticas y ... por la historia *historia*. Kolmogórov y Arnol'd[2] lo han mostrado reiteradamente, y se puede sin dudas afirmar que el conocimiento de la historia de las matemáticas es un eficaz instrumento para el cultivo de las matemáticas mismas. Beno Eckmann ha dicho:

> "The better I got to know Kolmogorov the more I realized that his cultural universality went far beyond mathematics, into logic and foundations, into arts, poetry, history and education. His human and humanistic universality enabled him to be an extraordinary teacher"[3].

En el libro de Cristoph Scriba y Joseph W. Dauben (2002) sobre historiografía de las matemáticas se dice:

> "One final work of note from the pre-World War II period was written by Andrei Kolmogorov (1903-1987, B), one of the leading Russia's mathematicians. His article on mathematics for the

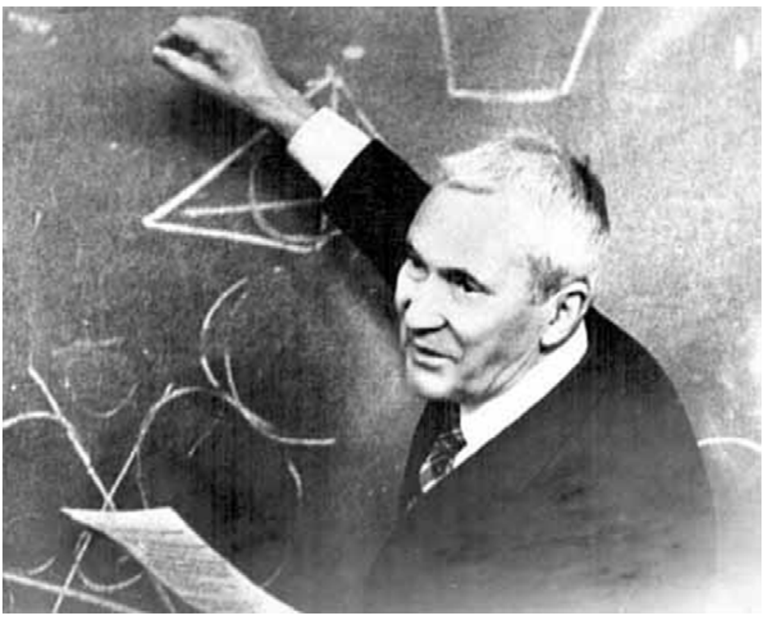
[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: `josef@us.es`

[2]Ver por ejemplo Arnol'd 2000, que es un texto serio y a la vez delicioso.

[3]*Kolmogorov and contemporary mathematics*, EMS, 2003. Debe agregarse como ilustración que Kolmogórov publicó once artículos sobre teoría de la poesía y estadística de textos.

> first edition of the *Bol'shaya Sovetskaya Entsiklopedja* (*Great Soviet Encyclopedia*) (1936) contained a well known periodization of the history of mathematics with very concise descriptions of each period. Kolmogorov divided the history of mathematics into four periods: the birth of mathematics, (6th to 5th century B. C.); the period of elementary mathematics (up to the 16th century); the establishment of mathematics of variables (to the middle of 19th century); and the period of modern mathematics. This periodization has been widely discussed by historians of mathematics (see for example Youshkevich 1994) and became universally adopted in Soviet historiography. During all of his creative life Kolmogorov was actively interested in history of mathematics. As a result, he wrote several remarkable works (for example on Newton's researches (Kolmogorov 1946)). In 1978/87 together with Youshkevich he edited three volumes on the history of mathematics of the 19th century (Kolmogorov/Youshkevich 1978/1987). He also devoted considerable energy to improving mathematical education in secondary schools, and was especially active in the reform of mathematical education (Petrova 1996)" (op. cit., p. 186-187).

Este largo párrafo resulta más que suficiente para subrayar la importancia del texto que presentamos.



1

Probablemente no sería una *boutade* afirmar que, si se borraran todos los registros históricos de las matemáticas en el siglo veinte, menos la enorme y profunda obra de Kolmogórov, con sólo ella se podría tener una idea bien aproximada de lo que fue el desarrollo de esas disciplinas en dicho siglo[4]. Rolando Rebolledo resumió así un aspecto de su visión de Kolmogórov:

> "Los matemáticos de este siglo se acostumbraron a encontrar su nombre en relación con muchas teorías distintas, marcando siempre contribuciones fundamentales. La teoría de series trigonométricas, la teoría de la medida, la teoría de conjuntos, la teoría de la integral, la lógica constructiva, la topología, la teoría de la aproximación, la teoría de probabilidades, la teoría de procesos estocásticos, teoría de la información, estadística matemática, sistemas dinámicos, autómatas finitos, teoría de algoritmos, lingüística matemática, teoría de la turbulencia, mecánica celeste, ecuaciones diferenciales, el 13º problema de Hilbert, balística, y las aplicaciones de las matemáticas a problemas de la biología, la geología, la cristalización de metales, la creación poética a partir de los estudios de lingüística matemática, y muchas otras".

De esas especialidades y, además, de interfaces entre las mismas, son los trabajos de Kolmogórov. Desde "Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout", publicada en 1923 en *Fundamenta Mathematicae*, hasta el libro *Probability theory and mathematical statistics* (Nauka, Moscú, 1986), es una cascada de textos éditos de valor fundamental. Entre medias, destaca en la memoria de todos el clásico *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Springer, Berlín, 1933), que fundó la teoría de probabilidades en la moderna teoría de la medida[5].

---

[4]Existen numerosos estudios sobre su obra que sería aquí muy largo de enumerar. La bibliografía sólo contiene algunos, pocos, títulos a los que, por razones especiales, incluimos.

[5]Traducción inglesa como *Foundations of the theory of probability*, New York, 1950. Acerca de esta cuestión, consúltese un texto excepcional como es el de Jan von Plato, *Creating modern probability; its mathematics, physics, and philosophy in historical perspective* (Cambridge University, Cambridge, 1994), particularmente esclarecedor para el período que va desde 1919 a 1933.

Vladimir Arnol'd trabajó con Kolmogórov en 1957[6]. Compartieron, en gran medida, una misma filosofía básica de las matemáticas; así, dice de modo bien redondo:

> "Mathematics is a part of physics. Physics is an experimental science, a part of natural science. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap. The Jacobi identity (which forces the heights of a triangle to cross at one point) is an experimental fact in the same way as that the Earth is round (that is, homeomorphic to a ball). But it can be discovered with less expense.
>
> In the middle of the twentieth century it was attempted to divide physics and mathematics. The consequence turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science and, of ours in total ignorance of any other sciences. They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students, then to school children (forgetting Hardy's warning that ugly mathematics has no permanent place under the sun)". (Arnol'd 1997)

A tal punto que cita a Hilbert cuando en 1930 dijo que la geometría "no es nada más que una rama de la física", y las verdades geométricas no son esencialmente diferentes de las físicas en ningún aspecto. El primer párrafo del texto citado no se contradice más que aparentemente con otras afirmaciones del mismo autor tales como: "In mathematics we always encounter mysterious analogies..." (Arnol'd, 2000).

En cuanto a Kolmogórov ¿hubiera dicho cosas muy distintas? No. En efecto le dijo a Arnol'd:

> My papers in topology have never been understood in a proper way. You see, I started out from physical concepts –from hydrodynamics and electromagnetic theory, and not at all from combinatorics.

Es más, Arnol'd agrega en aquel trabajo de 1997:

> Kolmogorov in return expressed to Hilbert his own worries that our culture would probably not survive for so long a period: the united bureaucrats of all countries would soon be able to stop all kind of

[6] El año 1956 Kolmogórov llegó a la conclusión de que cada función continua, de cualquier número de variables, puede ser representada como la composición de funciones continuas de tres variables. Redujo así el problema 13° de Hilbert a un problema de representación de funciones sobre árboles en tres dimensiones, que fue resuelto en 1957 por Arnol'd bajo la dirección de Kolmogórov. La respuesta a la conjetura de Hilbert era negativa: toda función continua de tres variables puede ser representada como composición de funciones continuas de dos variables (Rebolledo 1993).

> creativity making further mathematical discoveries impossible, as are geographical discoveries today[7].

2

¿Cuál era el estado de la historiografía de la ciencia en 1936, cuando se publica el artículo de Kolmogórov? Daré sólo un par de apuntes.

Thomas S. Kuhn (1979, 121) sostuvo que hasta 1950 solo media docena de personas estaban empleadas en EE.UU. y Canadá como historiadores de la ciencia, y la veintena de personas que publicaban sobre el tema venían de otros campos, normalmente las ciencias mismas o la bibliofilia. La situación habría cambiado radicalmente en los treinta años siguientes, hasta llegar a unos 200 o 300 especialistas, un gran incremento en creación de revistas, muchas de ellas especializadas por disciplinas, y la desaparición de los amateurs.

No debe olvidarse que de 1954 a 1979 es el ascenso de la Guerra Fría. Y, por otra parte, que Europa y otros sitios no eran desiertos en historia de la ciencia como el ombliguismo de Kuhn parece creer. En las regiones "salvajes" del Río de la Plata, Aldo Mieli –sin contar a Rodolfo Mondolfo en un campo bien lindante– y otros hacían lo suyo. Y, obviamente, en Europa y en otros continentes ya se producía, por lo menos desde fines del diecinueve, historiografía seria de las matemáticas. Decir Paul Tannery (1843-1904) es apenas nombrar uno de sus autores. De justicia sería también recordar la rica tradición alemana en historia de las matemáticas, lamentablemente desmembrada durante los años 1930.

Respecto a la situación en Rusia, dícese que es bien conocido el texto de Boris Hessen (1931) sobre las condiciones socioeconómicas de la mecánica de Newton[8]. Se sabe, sí, el gran efecto que produjo la delegación soviética en el Congreso de Historia de la Ciencia celebrado en Londres en 1931[9]. En dicho evento se cumplió que no sólo la filosofía es lucha de clases en la teoría (como decía Althusser), sino que también la historia de la ciencia lo es. Esa presentación de Hessen y otras ponencias de la misma delegación también impulsaron los estudios históricos en Gran Bretaña, mayormente a favor –la obra de Needham es un ejemplo grande entre otros–, pero también en contra, allí como en otros sitios. Además, esos hechos constituyeron un impulso significa-

[7]El libro publicado por A. N. Shiryaev en 2000 es especialmente interesante y posee una amplísima bibliografía de Kolmogórov. En particular el artículo de Arnol'd contenido en este libro es fascinante.

[8]Pero se le atribuye a Hessen un carácter externalista extremo. Pablo Huerga (2005) ha demostrado que está lejos de serlo, pero además su libro de 1999 presenta un conjunto de textos antecedentes iluminadores.

[9]Muchos textos lo describen, entre ellos Otero (1979).

tivo para el desarrollo de la historia de la ciencia como profesión, aunque Kuhn no quisiera acordarse de esa circunstancia anterior a las fechas de su relato[10].

Así pues, 1931 es un hito a tener en cuenta, a no olvidar descuidadamente o aún cuidadamente. Probablemente lo de 1931 –o su preparación, el trabajo de investigación anterior de esta fecha– no haya sido ajeno al hecho de que un excelso matemático, con estudios de historia reconocidos, dedicara su tiempo a hacer un aporte muy significativo en historia de las matemáticas. Porque si bien el título del trabajo es *Matemáticas*, de hecho el contenido es una periodización y sobre todo un aporte de fondo a la historia de esa disciplina.

3

La estructura básica del documento es como sigue:

I. Definición del objeto de las matemáticas, conexión con las otras ciencias y la técnica,

II. Historia de las matemáticas hasta el siglo XIX, y

III. Las matemáticas contemporáneas,

con diversas subpartes tanto en II como en III, y una Conclusión. La consideración histórica cubre la mayor parte del texto, y la parte sistemática (sin perjuicio de fragmentos sistemáticos en la parte histórica) cubre los apartados I, III. 1, y la Conclusión. Esos trozos sistemáticos explican ciertas vueltas atrás en el texto.

En lo que sigue, igual que arriba, preferimos apuntar las líneas filosóficas de la construcción historiográfica de Kolmogórov, más que su parte histórica, por dos razones: porque las líneas interpretativas digamos filosóficas del trabajo presuponen esa construcción historiográfica, y porque de otro modo habríamos tendido a reduplicar el texto, siendo lo mejor remitir a la lectura del mismo. Si se pudiera afirmar que el artículo que presentamos es esquemático –que estrictamente no lo es– habría que tener en cuenta que el trabajo de Kolmogórov "Newton and contemporary mathematical thought", tanto en sus consideraciones históricas como en sus aspectos matemáticos, es de gran precisión.

Normal en la Unión Soviética de los años treinta es que el trabajo comience con una referencia a Friedrich Engels (1820-1895), inteligentemente interpretada de manera que resulte adecuada para el tema en cuestión. Frente a la afirmación de Engels de que, para investigar en forma pura, en matemáticas es necesario separar esas formas de su contenido, Kolmogórov señala la riqueza de contenido que las ciencias y las técnicas exigen estudiar –en forma creciente– y al cual las matemáticas están indisolublemente unidas.

[10]Steve Fuller (2000) señaló extensamente las condiciones políticas en que se dio toda la obra de Kuhn.

Engels indudablemente seguía la concepción de matemáticas puras que se desarrolla desde por lo menos 1810 con Humboldt –y todas las matemáticas alemanas[11]–, la cual sostiene un tipo de neohumanismo en el que matemáticas y filología están unidas, y que ha sido expuesto y criticado magníficamente por Lewis Pyenson (1983). Kolmogórov por su parte es partidario en 1936, *avant la lettre*, de dicha crítica, lo que no es menor.

Más allá de las críticas válidas que se puedan realizar a la noción de dialéctica, debe admitirse que la distinción neohumanista de forma pura, o de matemáticas puras, ya no se sostiene en 1936, por más que les pesase a los matemáticos "puros" de su época. Kolmogórov así lo constata lúcidamente. Que el campo de aplicación de las matemáticas no está limitado, que de todos modos los modelos no agotan la realidad ni la concreción de los fenómenos reales[12], que la lógica intenta aislar éstos de su forma, son elementos a considerar para mostrar que sólo un análisis dialéctico de los fenómenos puede tenerlos en cuenta íntegramente. Los ejemplos de Kolmogórov así lo muestran.

Cuando nuestro autor trata el problema de la función de las matemáticas en la relación entre las ciencias y la realidad, se refiere específicamente a la aplicación de las matemáticas a esas ciencias. Se presenta el tema del vaivén entre el caso empírico estudiado y su esquematización matemática, vaivén que permite evitar los inconvenientes de los extremos metodológicos, la recurrencia a lo empírico directo y el opuesto recurso de modelos demasiado abstractos. Así, en la mecánica celeste, concebir los cuerpos como simples puntos de masa cede el paso con, por ejemplo, el caso de la luna. Los ejemplos de Kolmogórov están muy bien elegidos y los multiplica. Para no tomar más que uno solo, podemos señalar el análisis, con profundidad y donaire, de la relación entre la teoría macroscópica de la difusión y la teoría estadística correspondiente.

Aparte la conexión de las matemáticas con el desarrollo de la ciencia natural, más allá de las respuestas a los requerimientos directos de las otras ciencias, aparecen necesidades internas. Se podría decir que ellas derivaron gradualmente hacia aquella concepción purista de las matemáticas que el neohumanismo recogió. Y "se pasó a puntos de vista muy generalizados". Kolmogórov señala cómo la estructura de los cristales y, más tarde, la física cuántica tomaron como instrumento la teoría de grupos. Igualmente los cálculos vectorial y tensorial aparecieron como instrumentos de la mecánica y de la física.

De allí, de necesidades externas e internas, se dio la expansión del objeto de las matemáticas, llevando a otra forma de concebir expresiones tales como 'formas espaciales' y 'relaciones cuantitativas', que pasan a ser un objeto de atención significativo. De todo ese proceso surge la necesidad de justificación rigurosa del cambio en las matemáticas. Nuestro autor señala el retra-

[11]Tal como las conoció nuestro Eduardo García de Zúñiga en 1903 a 1905 en Berlin-Charlottenburg. Véase Scriba & Dauben (2002), texto sobre Eduardo García de Zúñiga.

[12]Idea enfatizada por Lenin en su *Materialismo y empiriocritismo*.

so de una presentación rigurosa, matemática, del cálculo de probabilidades, que fue uno de sus principales aportes. El método axiomático, expuesto por Kolmogórov de modo moderno –que es el de Hilbert en los *Grundlagen der Geometrie*–, respondió a necesidades más amplias de fundamentación, las que a su vez llevaron a desarrollos importantes en lógica matemática aplicada a las matemáticas.

La Conclusión, por su parte, no se refiere a los logros de todo el trabajo sino a la situación contemporánea, en los años 1936 a 1954. Centralmente apunta a la diversificación, a la aparición de nuevas ramas de las matemáticas y empieza enumerando la teoría de los algoritmos, la teoría de la información, la teoría de los juegos, la investigación operacional[13], ... y prosigue la enumeración que parece prodigiosa y explosiva.

El trabajo destaca fuertemente la producción matemática presoviética y soviética, cada una con sus características, y respecto a la producción en el extranjero, señala cómo la institucionalización de sociedades científicas en los siglos 17 y 18, o la celebración de congresos y de congresos internacionales a fines del 19, contribuyeron al desarrollo de las matemáticas contemporáneas. Quizás la llamativa omisión de una referencia a las publicaciones matemáticas periódicas sea porque su importancia se da por supuesta.

[13]Resulta especialmente interesante el estudio de Sonia Brentjes sobre los desarrollos paralelos de la investigación operativa en la Unión Soviética y EE.UU. Quizá convenga señalar aquí que esta destacadísima investigadora de la Universidad de Leipzig en la RDA ganó, luego de reunificarse Alemania, el concurso para sustituir a Christoph Scriba en la Universidad de Hamburgo al jubilarse éste... y que luego de ello se resolvió que no había fondos presupuestarios para que ocupara el cargo.

Referencias

[1] Vladimir Arnol'd, *On teaching mathematics*, Paris, 1997.

[2] [—], *Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts?*, International Mathematical Union, 2000 /conferencia/.

[3] [—], En A. N. Kolmogorov. A. N. Shiryaev *et al. Kolmogorov in perspective*, London Mathematical Society, London, 2000.

[4] Steve Fuller, *Thomas Kuhn; a philosophical history for our times*, University of Chicago, Chicago, 2000.

[5] Boris Hessen, Las raíces socioeconómicas de la mecánica de Newton. En N. Bujarin (ed.), *Science at the crossroads*, London, 1931. Editado y comentado junto a tros textos en P. Huerga, *La ciencia en la encrucijada* (Pentalfa, Oviedo, 1999).

[6] Pablo Huerga, *Raíces filosóficas de Boris Mihailovich Hessen; crítica al mito del externalismo del histórico informe presentado al congreso de Londres de 1931.* `http://galileo.fcien.edu.uy`, sección *Textos G*, julio de 2005.

[7] Andrei Kolmogórov, Newton and contemporary mathematical thought. En A. N. Shiryaev *et al. Kolmogorov in perspective*, London Mathematical Society, London, 2000.

[8] Andrei N. Kolmogórov & A. P. Yushkevich, *Mathematics of the 19th century*, Birkhäuser, Basel, 1996.

[9] Thomas S. Kuhn, History of science. En Peter D. Asquith & Henry E. Kyburg, *Current research in philosophy of science*, Philosophy of Science Association, East Lansing MI, 1979.

[10] Mario H. Otero, Historia de la ciencia e ideología. En M. H. Otero (ed.), *Ideología y ciencias sociales*, Universidad Nacional Autónoma de México, Médico DF, 1979.

[11] Lewis Pyenson, *Neohumanism and the persistence of pure mathematics in Wilhelmian Germany*, American Philosophical Society, Philadelphia, 1983.

[12] Rolando Rebolledo, *Kolmogórov y su época: el pensamiento y la acción.* University of Leeds, Leeds, 1996.

[13] Christoph Scriba & Joseph W. Dauben, *Writing the history of mathematics: its historical development.* Birkhäuser, Basel, 2002.

[14] A. N. Shiryaev *et al.*, *Kolmogorov in perspective.*

[15] Adolf Yushkievich, A. N. Kolmogorov, *O sushchnosti matematiki I periodizacii ee istorii.* MIT, v.35, 1994.

Mario H. Otero
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay
Correo electrónico: `mhotero@adinet.com.uy`

Matemáticas[14]

por

Andrei Nikolaievich Kolmogórov

I. Definición del objeto de las matemáticas, conexión con las otras ciencias y la técnica

Matemáticas ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\alpha$, griego, de $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ – conocimiento, ciencia), la ciencia sobre las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real.

"Las matemáticas puras tienen como objeto las formas espaciales y las relaciones cuantitativas del mundo real, y partieron siempre de la realidad. El hecho de que este material tenga una forma extremadamente abstracta, sólo puede oscurecer ligeramente su origen del mundo exterior. Pero para estar en situación de investigar estas formas y relaciones en forma pura, es necesario separarlas totalmente de su contenido, dejando este último de lado como algo indiferente" (Engels F., ver Marx K. Engels F., *Obras*, 2 edic., vol. 20, p. 37).

El carácter abstracto de las matemáticas, sin embargo, no indica su separación de la realidad material. En relación indisoluble con las demandas de la tecnología y de la ciencia natural el volumen de relaciones cuantitativas y de formas espaciales estudiadas por las matemáticas crece continuamente, de manera que la determinación general de las matemáticas sea llenada por un contenido cada vez más rico.

[14]Artículo publicado en la *Enciclopedia Soviética* de 1936 (con versiones posteriores en 1954 y 1982). Su valiosísima traducción del ruso corresponde a Benito Fernández y Enrique Pastor, con la intermediación amable e intensa de Pablo Huerga Melcón (todos ellos profesores del IES Rosario de Acuña, instituto público de Gijón desde el que han realizado el trabajo principal, más cuando no sabemos de ninguna otra traducción del texto a un idioma "occidental").

Por estimar que carecía de sentido en el contexto de esta traducción, hemos eliminado las referencias cruzadas a otros artículos de la *Enciclopedia*. Concretamente, Kolmogórov remitía a las entradas: cálculo de fluxiones; coordenadas; fórmula de Cardano; geometría de Lobachevski; geometría de Riemann; magnitudes variables y constantes; método axiomático; número; números eslavos; papiros matemáticos; "Principios" de Euclides; símbolos matemáticos; tareas correctas e incorrectas; teoría de conjuntos; teoría de Galois; teoría de las funciones (además de las entradas que se citan en la Conclusión, y que hemos mantenido en su lugar).

Las matemáticas y otras ciencias

El campo de aplicación de las matemáticas es muy diverso. El campo del uso del método matemático es en principio ilimitado: todas las formas de movimiento de la materia se pueden estudiar matemáticamente. Sin embargo, el papel y el valor del método matemático son diferentes en los diversos casos. Ningún modelo matemático específico agota la concreción entera de fenómenos reales; por lo tanto el proceso del conocimiento de lo concreto procede siempre en la lucha de dos tendencias: por un lado, está el aislamiento de las características de los fenómenos estudiados y el análisis lógico de estas características, por otro lado, los análisis de los momentos no contemplados en las formas establecidas, y el paso a un examen más flexible y completo de las nuevas características de esos fenómenos. Pero si las dificultades de estudiar cualquier ámbito de fenómenos consisten en la realización de la segunda tendencia, si cada nuevo paso de un estudio está conectado con el examen cualitativo de los nuevos aspectos de los fenómenos, entonces el método matemático tiene que retroceder; en este caso el análisis dialéctico del fenómeno concreto entero solamente se oscurece por la esquematización matemática. Por el contrario, caemos en la esfera de la supremacía del método matemático si las características básicas relativamente simples y constantes de los fenómenos estudiados cubren estos fenómenos con alta exactitud y de manera completa; sin embargo, dentro de los límites de estas formas fijas aparecen ya problemas complejos suficientemente difíciles, que requieren un estudio matemático especial, la creación de un lenguaje simbólico específico concreto y de un algoritmo especial para su solución. Un ejemplo típico de la supremacía completa del método matemático es la mecánica celeste, en la cinemática particular de los planetas. Tener una expresión matemática muy simple de la ley de la gravitación universal determina casi totalmente el campo de los fenómenos estudiados aquí. Con la excepción de la teoría del movimiento de la luna, es aceptable, en los límites de la exactitud de la observación accesible a nosotros, prescindir de la forma y de los tamaños de los cuerpos celestes y reemplazarlos por "puntos materiales". Pero para la solución del problema de mover n puntos materiales bajo la acción de las fuerzas de la gravedad aparecen dificultades colosales ya en el caso de $n = 3$. En la actualidad con la ayuda del análisis matemático se alcanza gran exactitud en los resultados del problema elegido: si el esquema lógico es muy simple y refleja bien el conjunto de fenómenos estudiados, toda la dificultad se reduce al desarrollo matemático del modelo elegido.

Con el paso de la mecánica a la física no aparece una disminución sensible del papel del método matemático; sin embargo, crecen considerablemente las dificultades de su uso. Apenas hay campos de la física que no requieran el uso de un aparato matemático muy desarrollado, pero la dificultad básica de su estudio consiste con frecuencia no en el desarrollo de la teoría matemática, sino en la selección de los requisitos previos para el desarrollo matemático y en la interpretación de los resultados obtenidos matemáticamente.

De acuerdo con el ejemplo de ciertas teorías físicas es posible observar la capacidad del método matemático de cubrir el mismo proceso de avanzar en el conocimiento de la realidad a partir de un paso al siguiente, más nuevo y cualitativamente más alto. Como modelo clásico puede servir la relación entre la teoría macroscópica de la difusión, que supone la distribución continuada de la sustancia, y la teoría estadística de la difusión, que surge del examen del movimiento de las partículas separadas de la sustancia que se difunde. En la primera teoría la densidad de la sustancia que se difunde satisface una ecuación en derivadas parciales determinada. El estudio de los diversos problemas que se relacionan con la difusión se reduce a la existencia de soluciones de la ecuación diferencial con las condiciones iniciales y de contorno apropiadas. La teoría continua de la difusión transfiere el movimiento real de los fenómenos con exactitud muy alta, puesto que se basa en escalas (nivel macroscópico) temporales y espaciales que nos son comunes. Sin embargo, para partes pequeñas del espacio (que contiene solamente un pequeño número de las partículas de la sustancia que se difunde) pierde su significado la definición de densidad de la teoría estadística de la difusión procedente del examen de los desplazamientos al azar de las partículas microscópicas que se difunden bajo la acción de las moléculas del solvente. Las leyes cuantitativas exactas que gobiernan estos desplazamientos microscópicos nos son desconocidas. Sin embargo, la teoría matemática de las probabilidades permite (a partir de los requisitos previos generales sobre la pequeñez de los desplazamientos para los intervalos de tiempo y la independencia de los pequeños desplazamientos de una partícula para dos intervalos secuenciales de tiempo) obtener las consecuencias cuantitativas específicas: determinar (aproximadamente) las leyes de la distribución de las probabilidades para los desplazamientos de las partículas para intervalos grandes de tiempo (macroscópicos). Puesto que el número de partículas separadas de la sustancia que se difunde es muy grande, entonces las leyes de la distribución de las probabilidades para los desplazamientos de partículas separadas conducen, suponiendo la independencia de los desplazamientos de cada partícula de las otras, a las bien definidas normas de desplazamiento de la sustancia que se difunde en su totalidad: a las ecuaciones diferenciales en las que se construye la teoría. El ejemplo dado es suficientemente típico en el sentido que debido a unas cuantas regularidades (por ejemplo, las leyes del movimiento de las partículas separadas de la sustancia que se difunde) ocurre con mucha frecuencia la formación de otra clase de normas cualitativamente nueva (por ejemplo, las ecuaciones diferenciales de la teoría continua de la difusión) por la estadística de fenómenos del caso.

En ciencias biológicas el método matemático desempeña un papel más subordinado. En un grado incluso mayor que en biología, el método matemático tiene un lugar más bajo para el análisis directo de fenómenos en lo social y lo humano en su entera complejidad concreta. El uso de un método matemático en lo biológico, social y humano se logra principalmente con la cibernética (véase la cibernética biológica, la cibernética médica, la cibernética económica). Las matemáticas tienen un valor esencial para el resto de las disciplinas sociales (como en las ciencias biológicas) en la forma de una ciencia auxiliar, la estadística matemática. Sin embargo, en el análisis final de los fenómenos sociales los momentos de la unicidad cualitativa de cada etapa histórica adquieren una posición tan dominante, que el método matemático retrocede nuevamente.

Matemáticas y técnica

Los principios de la geometría aritmética y elemental, como será evidente tras la descripción histórica, surgieron de las demandas directas de la práctica; la elaboración adicional de nuevos métodos e ideas matemáticos nacen por efecto de la ciencia natural matemática (astronomía, mecánica, física, etc.) basándose su desarrollo en las demandas de la práctica. Sin embargo, las conexiones directas de las matemáticas con la tecnología dependen con más frecuencia del uso de las teorías matemáticas ya creadas para los problemas técnicos. Precisemos, sin embargo, ejemplos de la aparición de nuevas teorías matemáticas generales debido a las demandas directas de la tecnología. La creación del método de los mínimos cuadrados está conectada con los trabajos de geodesia; el estudio de muchos nuevos tipos de ecuaciones en derivadas parciales comenzó por primera vez con la solución de problemas técnicos; los métodos operativos de solucionar las ecuaciones diferenciales fueron desarrollados en conexión con la ingeniería eléctrica, y así sucesivamente; de las demandas de la comunicación se presentó la nueva rama de la teoría de las probabilidades, la teoría de la información. Las tareas de síntesis de los encargados de sistemas condujeron al desarrollo de las nuevas ramas de la lógica matemática. Junto con las necesidades de la astronomía, las tareas técnicas desempeñaron un papel decisivo en el desarrollo de los métodos de la solución aproximada de ecuaciones diferenciales. En el campo técnico fueron enteramente creados muchos métodos de solución aproximada de ecuaciones en derivadas parciales y de ecuaciones integrales. La tarea de la obtención efectiva rápida de soluciones numéricas se agudiza con la complicación de problemas técnicos. En conexión con las posibilidades que abrieron las computadoras para la solución de problemas prácticos, aumenta el valor de los métodos numéricos. Las matemáticas teóricas de alto nivel han hecho posible desarrollar rápidamente los métodos de matemáticas de computación. Un papel muy grande han desempeñado las matemáticas de computación en la solución de numerosos problemas prácticos importantes, incluyendo el problema del uso de la energía atómica y de la investigación espacial.

II. Historia de las matemáticas hasta el siglo XIX

La comprensión clara de las matemáticas independientemente de su posición como ciencia especial, que tiene su propio objeto y método, llegó a ser posible solamente después de la acumulación de un material efectivo suficientemente grande y se presentó por primera vez en Grecia antigua en los siglos VI y V a.C.

El desarrollo de las matemáticas hasta la actualidad nos lleva naturalmente al período del origen de las matemáticas, al siglo VI y V a.C., para estudiar el principio del periodo de las matemáticas elementales. Durante estos dos siglos los primeros estudios matemáticos se refieren a una cantidad muy limitada de conceptos básicos, que se presentaron, incluso en los pasos muy tempranos del desarrollo histórico, en conexión con las demandas más simples de la vida económica, reducidas al recuento de objetos, a la medida de la cantidad de productos, áreas de las secciones de la tierra, a determinar las dimensiones de las partes individuales de la construcción arquitectónica, a la medida del tiempo, a los cálculos comerciales, a la navegación y similares. En las primeras tareas de la mecánica y de la física [con la excepción de estudios aislados del sabio griego Arquímedes (siglo III a.C.), que requieren un cálculo infinitesimal de los elementos] podía ser suficiente el mismo número de conceptos matemáticos básicos. La única ciencia que, mucho antes del desarrollo amplio del estudio matemático de los fenómenos de la naturaleza en el siglo XVII y XVIII, requirió de manera muy especial y sistemática las matemáticas actuales, fue la astronomía, que fue enteramente la causa, por ejemplo, del desarrollo temprano de la trigonometría.

En el siglo XVII las nuevas demandas a las matemáticas de las ciencias naturales y de la tecnología forzaron a concentrar su atención en la creación de métodos que permitieran estudiar matemáticamente el movimiento, los procesos de cambio en los valores, la transformación de las figuras geométricas (con el diseño, etc.). El período de las matemáticas de magnitudes variables comienza con el uso de magnitudes variables en la geometría analítica del científico francés R. Descartes y la creación del cálculo diferencial e integral.

La aparición posterior de nuevas relaciones cuantitativas y formas espaciales estudiadas por las matemáticas llevó, a principios del S. XIX, al convencimiento de la necesidad de ampliar el campo de investigación matemática, después del estudio sistemático generalizado de los distintos tipos de innovaciones. La creación del matemático ruso N. I. Lobachevski de su "geometría imaginaria", que recibió posteriormente usos totalmente reales, fue el primer paso significativo en esta dirección. El desarrollo de una clase similar de estudios introdujo, en la estructura de las matemáticas, nuevas características importantes; esas matemáticas de los siglos XIX y XX llevan naturalmente al período especial de las matemáticas contemporáneas.

II. 1. Origen de las matemáticas

El recuento de objetos en los pasos más tempranos del desarrollo de la cultura condujo a la creación de los conceptos más simples de la aritmética de números naturales. Los sistemas escritos de numeración aparecen sobre la base del sistema de numeración oral que ya había sido desarrollado con los números naturales y gradualmente se crean métodos de realización de las cuatro operaciones aritméticas (de las que solamente la división presenta una dificultad grande). Necesidades de la medida (cantidad de grano, longitud del camino y similares) conducen a la aparición de nombres y de números para la designación de las fracciones y al desarrollo de los métodos para la realización de las operaciones aritméticas con fracciones. Así, se acumula un material que se duplica gradualmente en la ciencia matemática más temprana, la aritmética. La medida de las áreas y de los volúmenes, las necesidades de la tecnología de la construcción y, algo más adelante, la astronomía, originan el desarrollo de los elementos de la geometría. Alcanzan estos procesos muchos pueblos paralelamente y de forma independiente. La acumulación del conocimiento aritmético y geométrico en Egipto y Babilonia tuvo un valor singular para el desarrollo posterior de la ciencia. En Babilonia debido a la tecnología desarrollada en los cálculos aritméticos aparecieron también los elementos del álgebra y, en conexión con las demandas de la astronomía, elementos de la trigonometría.

Textos matemáticos conservados del antiguo Egipto (primera mitad del segundo milenio a.C.) consisten principalmente en ejemplos de soluciones de tareas y, en el mejor de los casos, de las instrucciones particulares para su solución, que puede ser entendida, a veces, solamente analizando los ejemplos numéricos dados en los textos. Se debe hablar con exactitud de instrucciones para solucionar los distintos tipos de tareas, puesto que, al parecer, no existió una teoría matemática en el sentido de la demostración de teoremas generales. Esto se atestigua, por ejemplo, en el hecho de que no distinguieran entre las soluciones exactas y aproximadas. Sin embargo, los hechos matemáticos establecidos sí eran muy exactos, con relación a la alta tecnología de la construcción, a la complejidad de las relaciones de la tierra, las necesidades del calendario, etc.

Los textos matemáticos permiten dar mucho más valor a las matemáticas en Babilonia, que en Egipto. El período matemático cuneiforme babilónico, como aparece en los textos a partir del segundo milenio a.C., conduce a la aparición y desarrollo de las matemáticas griegas. Las matemáticas de Babilonia de este tiempo, partiendo de la utilización combinada del sistema sexagesimal y decimal, desarrollan la numeración, incluyendo ya el principio del valor posicional (utilizan el mismo símbolo para la unidad, el sesenta y sus potencias y otro símbolo para el diez). La división fue reducida a la multiplicación con la ayuda de los números recíprocos de las tablas. Además de los números recíprocos de las tablas, estaban las tablas de los cuadrados y de las raíces cuadradas y cúbicas. De los logros de las matemáticas babilónicas en el campo de la geometría, inferiores al conocimiento de los egipcios, debe destacarse el desarrollo de la medida angular y algunos elementos de la trigonometría, conectados, obviamente, con el desarrollo de la astronomía. Para los babilonios ya era conocido el teorema de Pitágoras.

II. 2. Período de las matemáticas elementales

Solamente después de la acumulación de un material concreto grande en la forma de los métodos variados de cálculos aritméticos, los métodos de la definición de áreas y de volúmenes y similares, aparecen las matemáticas como ciencia independiente, con la comprensión clara de la unicidad de su método y la necesidad del desarrollo sistemático de sus conceptos básicos presentados en un formato común. En el uso de la aritmética y el álgebra es posible que el proceso indicado comenzara ya en Babilonia. Sin embargo, la construcción sistemática y lógicamente secuencial de las bases de la ciencia matemática, aparece en la Grecia antigua. El sistema de geometría elemental, en forma de construcción deductiva de la teoría matemática, creado por los griegos antiguos, se mantuvo vigente durante dos milenios. De la aritmética crece gradualmente la teoría de los números. Se crea el estudio sistemático sobre los valores y la medida. El proceso del formación (en conexión con la tarea de la medida del valor) del concepto del número real demuestra ser muy largo. El hecho es que los conceptos de número irracional y negativo se relacionan con una ficción matemática más compleja, que, en contraste con los conceptos del número natural, fracción o la figura geométrica, no tienen apoyo perdurable en la experiencia humana general precientífica.

La creación del álgebra como cálculo literal termina solamente en el final del período bimilenario en cuestión. Las designaciones especiales para la incógnita aparecen en el matemático griego Diofanto (probablemente, siglo III) y más sistemáticamente en la India en el siglo VII, pero la designación por letras de los coeficientes de la ecuación es introducido solamente en el siglo XVI por el matemático francés F. Viète.

El desarrollo de la geodesia y de la astronomía conduce pronto al desarrollo detallado de la trigonometría plana y esférica.

Las matemáticas del período elemental concluyen (en Europa occidental a principios del siglo XVII) cuando el centro de gravedad de los intereses matemáticos se transfiere al campo de las matemáticas de las magnitudes variables.

Grecia Antigua

El desarrollo de las matemáticas en Grecia antigua tomó una dirección sustancialmente distinta a la del oriente. Si con respecto a la técnica de cálculos, la habilidad en la solución de los problemas de naturaleza algebraica y de desarrollar los medios matemáticos al nivel de la astronomía solamente se sobrepasó a las matemáticas babilónicas en la época helenística, las matemáticas de Grecia antigua incorporaron ya mucho antes una nueva etapa de desarrollo lógico. Cuando apareció la necesidad de demostraciones matemáticas distintas, se realizaron las primeras tentativas en la construcción sistemática de la teoría matemática. Las matemáticas, como creación científica y artística plena, dejaron de ser impersonales, por ejemplo como en los países del oriente antiguo;

ahora es creada por matemáticos bien conocidos por su nombre, como autores de las obras matemáticas (accesibles no solamente en fragmentos preservados por los comentaristas posteriores).

Los griegos se consideraban en el campo de la aritmética discípulos de los fenicios, explicando el alto desarrollo de la aritmética por las necesidades de su extenso comercio; sin embargo, el principio de la tradición griega de la geometría conecta con los viajes a Egipto (siglos VII y VI a.C.) de los primeros geómetras y filósofos griegos Tales de Mileto y Pitágoras de Samos. En la escuela pitagórica la aritmética pasa de la habilidad simple de la numeración a la teoría de los números. Se resumen las progresiones aritméticas más simples [concretamente, $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$], se estudia la divisibilidad de los números, diversas formas de promedios (aritmético, geométrico y armónico), cuestiones de la teoría de los números (por ejemplo, investigación de los supuestos números perfectos) en conexión en la escuela pitagórica con el valor místico, mágico, asignado a las relaciones numéricas. En conexión con el teorema de Pitágoras geométrico se encontró el método para obtener una serie ilimitada de ternas de "números pitagóricos", es decir, de ternas de números enteros, que cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$. En el campo de las tareas de la geometría, en las que los geómetras griegos estaban ocupados (siglos VI y V a.C.) después de dominar la enseñanza egipcia, también aparecen, naturalmente, el arte de la construcción, de la navegación y de la medida de la tierra. Se plantea el problema de la relación entre las longitudes de los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo (expresado por el teorema de Pitágoras), sobre la relación entre las áreas de figuras similares, la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Sin embargo, ahora existe un nuevo acercamiento a estas tareas, que se hicieron necesarias por la complejidad del objeto de los experimentos. Sin la limitación de las soluciones aproximadas, obtenidas empíricamente, se pasa a la búsqueda por los geómetras griegos de demostraciones exactas y de soluciones lógicamente comprensivas del problema. La prueba de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con su lado puede servir como ejemplo claro de esta nueva tendencia. En la mitad del siglo V a.C. la vida filosófica y científica de Grecia se concentra en Atenas. Aquí tiene lugar la actividad básica del Hippias de Elis y de Hipócrates de Quíos. El primer libro de texto sistemático de geometría se atribuye a Hipócrates de Quíos. En este tiempo, indudablemente, ya se había creado el sistema desarrollado de geometría, que no desatendió las finuras lógicas tales como la prueba de los casos de la igualdad de triángulos y así sucesivamente. El logro más notable de las matemáticas del S. V a.C. está en una reflexión puramente especulativa que procura la explicación racional de la estructura de la materia estudiada; la investigación de los cinco poliedros regulares es el resultado de la búsqueda de los cuerpos ideales más simples, que pudieran servir como piedras básicas del universo. En el límite de los siglos V y IV a.C. Demócrito, debido a las ideas atomísticas, crea un método para determinar los volúmenes, que sirvió más adelante a Arquímedes para encontrar el punto de partida del desarrollo del método de lo infinitamente pequeño. En el siglo IV a.C., en una situación de reacción política y declive de la fuerza de Atenas, llegan las matemáticas a subordinarse a las limitaciones de la filosofía idealista. La ciencia de los números se separa de forma terminante aquí de la "habilidad de la numeración", y la geometría, de la "habilidad de la medida". Confiando en la existencia de secciones, de áreas y de volúmenes inconmensurables, Aristóteles impone la prohibición general del uso de la aritmética en la geometría. En la geometría se introduce el requisito de limitarse a las construcciones logradas con la ayuda de los compases y de la regla. El logro más significativo de los matemáticos del S. IV a.C. se encuentra en la tendencia al análisis lógico de las bases de la geometría estudiado por Eudoxo de Cnido.

Época helenística y romana

A partir del siglo III a.C., por un período de siete siglos, el centro básico de la ciencia y, especialmente, de los estudios matemáticos fue Alejandría. En este lugar, en una situación que asocia diversas culturas del mundo con las grandes tareas del estado y de la construcción, las matemáticas griegas alcanzaron su floración más alta. A pesar de la propagación de la educación griega y de los intereses científicos en todo el mundo helenístico y romano, Alejandría con su "museo", que fue el primer instituto de investigación científico en el sentido contemporáneo de la palabra, poseyó una fuerza de atractivo tan grande, gracias a sus bibliotecas, que se dirigieron allí casi todos los científicos más importantes. De los matemáticos mencionados más abajo solamente Arquímedes era nativo de Siracusa. El primer siglo de la época alejandrina (siglo III a.C.) se caracteriza por la tensión más grande de la creación matemática. A este siglo pertenecen Euclides, Arquímedes, Eratóstenes y Apolonio de Perga.

En sus "Principios" Euclides recogió los logros alcanzados en el período anterior en el campo de la geometría. En este mismo tiempo, Euclides comienza en los "Principios" la elaboración de una teoría sistemática de los números, probando la infinitud de la serie de números primos y construyendo un sistema de división. Del trabajo geométrico de Euclides no incluido en los "Principios", y de los trabajos de Apolonio de Perga, el valor más grande para las matemáticas fue el desarrollo de una teoría definitiva de las secciones cónicas. El mérito básico de Arquímedes en la geometría fue la determinación de las áreas y de los volúmenes diversos (incluyendo áreas de la sección parabólica y de la superficie de la esfera; volúmenes de la esfera, de la sección de la esfera, de la sección de paraboloide, etc.) y del centro de gravedad (por ejemplo, para la sección de la esfera y la sección de paraboloide); la espiral de Arquímedes es solamente uno de los ejemplos que se estudian en el S. III a.C. de curvas transcendentes. Después de Arquímedes, aunque se continúa ampliando el conocimiento científico, la ciencia de Alejandría ya no tiene la profundidad y amplitud lograda anteriormente; los rudimentos del análisis de lo infinitamente pequeño, que se contenían en los métodos heurísticos de Arquímedes, no se estudiaron más a fondo. Hay que decir que el interés en la medida aproximada de valores y en los cálculos aproximados no llevó a los matemáticos del S. III a.C. a una falta de rigor matemático. Todas las numerosas extracciones aproximadas de raíces e incluso todos los cálculos astronómicos fueron producidas por ellos con la indicación exacta de los límites de error, según el tipo de la famosa determinación de Arquímedes de la longitud del círculo en la forma de las desigualdades correctamente probadas

$$3 \cdot \frac{10}{71} \cdot d < p < 3 \cdot \frac{1}{7} \cdot d$$

donde p es la longitud de la circunferencia de diámetro d. Este convencimiento de que las matemáticas aproximadas no son matemáticas “no rigurosas” fue más adelante olvidado durante mucho tiempo.

La ausencia de un concepto bien formado de número irracional fue la deficiencia esencial de las matemáticas del mundo antiguo. Mientras que, como ya se indicó, esta circunstancia llevó a la filosofía del S. IV a.C. a la negación completa de la legitimidad del uso de la aritmética en el estudio de valores geométricos. En realidad, sin embargo, con la teoría de las proporciones y con el método de exhaución, era posible a los matemáticos de los S. IV y III a.C. lograr indirectamente esta aplicación de los ejemplos de la aritmética a la geometría. Los siglos próximos no permitieron la solución completa del problema creando el nuevo concepto fundamental (número irracional), sino solamente su logro gradual, que llegó a ser posible con la pérdida de las ideas sobre el rigor matemático. En esta etapa de la historia de las matemáticas la denegación temporal del rigor matemático demostró ser, sin embargo, útil, después de revelar la posibilidad del desarrollo libre del álgebra (que, en el marco conceptual riguroso de los “principios euclidianos”, se permitía solamente en la forma muy amplia del “álgebra geométrica” de secciones, de áreas y de volúmenes). Los avances sustanciales en esta dirección se pueden observar en la “Métrica”. Sin embargo, el desarrollo independiente y amplio del actual cálculo algebraico se encuentra solamente en la “Aritmética” de Diofanto, dedicada esencialmente a la solución de ecuaciones. Llevando sus estudios a la aritmética pura, Diofanto se limita naturalmente a las soluciones racionales, en contraste al médico Herón, excluyendo así la posibilidad de los usos geométricos o mecánicos de su álgebra. La trigonometría se recibe en el mundo antiguo en gran medida como parte de la astronomía, pero no como parte de las matemáticas En cuanto a la geometría de cálculo aproximado de Herón, no presenta los requisitos de la exactitud completa de las formulaciones y de las pruebas. Hiparco fue el primero en compilar tablas de las cuerdas, que satisficieron el papel de nuestras tablas de senos. Los principios de la trigonometría esférica fueron creados por Menelao y por Claudio Tolomeo.

En el campo de las matemáticas puras, la actividad de los últimos científicos del mundo antiguo (además de Diofanto) se concentra siempre en el comentario de los viejos autores. Los trabajos de los comentaristas-científicos de este tiempo [Pappus (S. III), Proclo (S. V), etc.], con toda su universalidad, no pudieron –dada la situación de declive del mundo antiguo– asociar una aislada álgebra de Diofanto, incluida en la trigonometría astronómica, a la geometría de cálculo aproximado de Herón, lo que hubiera permitido un desarrollo considerable de la ciencia.

China

La presencia en los matemáticos chinos de una técnica altamente elaborada de desarrollo de cálculos y su interés en los métodos algebraicos generales se revela ya en la “Aritmética en nueve capítulos”, redactado en base a fuentes anteriores en los S. II y I a.C. por Zhang Qian y Qin Chou-chang. En esta obra se describen, en detalle, los métodos de la extracción de raíces cuadradas y cúbicas de los números enteros. Se formulan problemas de grandes números de modo que pueden entenderse solamente como ejemplos, que sirvieron para la explicación de la forma de despejar incógnitas en los sistemas de ecuaciones lineales. En conexión con los cálculos del calendario en China se presentó interés en tareas del tipo siguiente: si en la división de un número por 3 el resto es 2, si en su división por 5 el resto es 3, a la vez que dividido por 7 el resto es 2, ¿cúal es ese número? Su Zi (entre los S. II y VI) y más completamente Qin Jiushao (S. XIII) presentaron la descripción del algoritmo regular para la solución de tales problemas basado en ejemplos. Como ejemplo del alto desarrollo de métodos de cálculo en la geometría puede servir el resultado de Zu Chongzi (segunda parte del S. V), que demostró que el cociente de la longitud de la circunferencia y el diámetro se encuentra dentro de los límites

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927.$$

El trabajo de los chinos en la solución numérica de ecuaciones es especialmente notable. Las tareas geométricas se reducen a las ecuaciones de tercer grado, que se encuentran por primera vez en el astrónomo y matemático Wang Xiaotong (primera mitad del S. VII a.C.). La descripción de los métodos de solucionar las ecuaciones de cuarto y mayor grado fue dada en el trabajo de los matemáticos de los S. XIII y XIV Qin Jiushao, Li Yeh, Yan Hui y Zhu Shijie.

La India

El florecimiento de las matemáticas indias tiene lugar entre los siglos V y XII (los matemáticos indios más conocidos fueron Âryabhatta, Brahmagupta, Bhâskara). Dos méritos básicos pertenecen a los indios. El primero de ellos fue la introducción de un amplio uso del sistema decimal contemporáneo y el uso sistemático del cero para la designación de la ausencia de unidades. El origen de los números usados en la India, llamados ahora “árabes”, no está explicado totalmente. El segundo mérito aún más importante de los matemáticos indios es la creación del álgebra, que opera libremente no solamente con las fracciones, sino también con los números irracionales y negativos. Sin embargo, generalmente, en la interpretación de las soluciones de los problemas, las soluciones negativas se consideraban imposibles. Debe observarse que en general, mientras que los números fraccionarios e irracionales, a partir del mismo momento de su aparición, están conectados con la medida de cantidades análogas, los números negativos surgen esencialmente de las necesidades internas del álgebra y solamente más tarde (concretamente en el S. XVII) adquieren un valor independiente. En trigonometría el mérito de los matemáticos indios fue la introducción de las curvas del seno, coseno, y seno verso (sen vers $x = 1 - \cos x$).

Asia central y Cercano Oriente

Los logros árabes y la asociación en poco tiempo de enormes territorios bajo el dominio de los califas árabes condujeron a que durante los Siglos IX a XV los sabios de Asia central, del Cercano Oriente y de la península ibérica utilizaran la lengua árabe. La ciencia se desarrolla en las ciudades comerciales del mundo, en el contexto de amplios contactos internacionales y grandes empresas científicas estatales. La actividad de Ulugbek, que con su corte y observatorio en Samarkanda reunió a más de cien científicos, le llevó a organizar observaciones astronómicas de gran alcance, el cálculo de tablas matemáticas, etc., fue la terminación brillante de esta época en el siglo XV.

En la ciencia de Europa occidental dominó por mucho tiempo la opinión de que el papel de la "cultura árabe" en el campo de las matemáticas se redujo esencialmente a la conservación y a la transmisión a los matemáticos de Europa occidental de los descubrimientos matemáticos del mundo antiguo y de la India. (Así pues, la obra de los matemáticos griegos se conoció por primera vez en Europa occidental en las traducciones árabes.) De hecho la contribución al desarrollo de la ciencia de los matemáticos que escribieron en lengua árabe, y en particular los matemáticos que pertenecieron a los pueblos de Asia central y del Cáucaso soviéticos modernos (Joreimiskos, Uzbekos, Tadzhikos, Azerbaijanos), fue considerablemente grande.

En la primera mitad del S. IX Mohammed Ben Musa Al-Jwarizmi presentó por primera vez el álgebra como ciencia independiente. El término "álgebra" procede de la obra de Al-Juwarizmi conocida como "Al-yebr" [*Hisab al-yebr w'al-muqabala*] la cual introdujo en las matemáticas de la Alta Edad Media la solución de las ecuaciones cuadráticas. Omar Jayyam estudió sistemáticamente las ecuaciones de tercer grado, dio su clasificación, y explicó las condiciones de su solubilidad (en el sentido de la existencia de raíces positivas). Jayyam en su tratado algebraico dice que se ocupó mucho en la búsqueda de la solución exacta de las ecuaciones de tercer grado. En esta dirección las búsquedas de los matemáticos de Asia Central no se coronaron por el éxito, pero lo conocían bien en geometría (con la ayuda de las secciones cónicas) y se aproximaron a los métodos de solución numéricos. Préstamo del sistema decimal de los indios es el uso del cero, utilizado principalmente en los cálculos del sistema científico sexagesimal de las matemáticas de Asia central y del Cercano Oriente (al parecer, en conexión con la división sexagesimal de ángulos en astronomía).

En conexión con los trabajos astronómicos y geodésicos, la trigonometría experimentó un desarrollo considerable. Al-Battani introdujo en las funciones trigonométricas el uso del seno, tangente y cotangente, Abu-l-Wafa las seis funciones trigonométricas y expresó verbalmente las dependencias algebraicas entre ellas, calculó las tablas de los senos de $10'$ en $10'$ con una exactitud hasta $1/60^{24}$ y las tablas de tangentes y estableció el teorema de los senos para los triángulos esféricos. Nasireddin Al-Tusi alcanzó la conocida culminación del desarrollo de la trigonometría esférica, Al-Kashi presentó sistemáticamente la aritmética de las fracciones decimales, que correctamente consideraban más accesibles que las sexagesimales. En conexión con las cuestiones de la extracción de raíces, Al-Kashi presentó la fórmula del binomio de Newton, e indicó la regla de la formación de coeficientes $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$. En el "Tratado sobre el círculo" (alrededor de 1427), Al-Kashi, determinando los perímetros de polígonos de lados, inscritos y circunscritos, encontró π con diecisiete dígitos. En conexión con la construcción de tablas extensas de los senos Al-Kashi dio un método iterativo muy perfecto para la solución numérica de las ecuaciones.

Europa occidental hasta el siglo XVI

Los siglos XII a XV son para las matemáticas de Europa occidental principalmente el período de dominar la herencia del mundo antiguo y del oriente. Sin embargo ya durante este período, que ni siquiera condujo al descubrimiento de nuevos hechos matemáticos significativos, la naturaleza general de la cultura matemática europea se caracteriza por numerosos progresos esenciales, que ofrecieron la posibilidad de un desarrollo rápido de las matemáticas en los siglos siguientes. El alto nivel de las demandas debido a la prosperidad de la burguesía en las ciudades italianas condujo a la creación y a la aceptación amplia de libros de texto, que combinan su carácter práctico con una gran minuciosidad y una naturaleza científica. Menos de 100 años después de que aparecieran en el S. XII las primeras traducciones latinas de las obras matemáticas griegas y árabes, Leonardo de Pisa (Fibonacci) publica en su "Libro acerca del ábaco" (1202) y la "Práctica de la geometría" (1220) sobre aritmética actual, aritmética comercial, álgebra y geometría. Estos libros gozaron de gran éxito. Hacia el final de la época (con la invención de la imprenta) los libros de texto alcanzan una aceptación incluso más amplia. Las universidades se convierten en los centros básicos del pensamiento científico teórico en este tiempo. El progreso del álgebra como disciplina teórica, y no solamente como un conjunto de reglas para la solución de problemas, se demuestra en la comprensión clara de la naturaleza de los números irracionales como relaciones de las cantidades inconmensurables [el matemático inglés T. Bradwardine (primera mitad del S. XIV) y N. de Oresme (mediados del S. XIV)] y especialmente en la introducción de los quebrados (por N. de Oresme), de los exponentes cero y negativos [el matemático francés N. Chuquet (fines del S. XV)]. Aquí aparecen por primera vez, anticipando la época siguiente, ideas sobre las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. La extensión amplia de estudios científicos de esta época se reflejó no solamente en las numerosas traducciones y publicaciones de los autores griegos y árabes, sino también en empresas tales como la composición de las tablas trigonométricas extensas, calculadas con una exactitud de siete dígitos por Regiomontano (I. Müller). El simbolismo matemático se mejora considerablemente. Se desarrollan la crítica y la controversia científicas. Las búsquedas para la solución de problemas difíciles, alentadas por la costumbre de competiciones públicas en su solución, conducen a las primeras pruebas de insolubilidad. Leonardo de Pisa, en la obra "Flor" (alrededor de 1225), en la que se proponen problemas magníficamente solucionados por él, probó ya la insolubilidad de la ecuación: $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ no solamente en números racionales, sino también con la ayuda de los cuadrados irracionales simples (forma $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ etc.).

Europa occidental en el siglo XVI

Este siglo fue el primer siglo de la superioridad de Europa occidental sobre el mundo antiguo y el oriente. Así fue en la astronomía (descubrimientos de N. Copérnico) y en la mecánica (hacia el final de este siglo aparecen ya los primeros estudios de G. Galilei), para un conjunto en el que se incluyen también las matemáticas a pesar del hecho de que en algunas direcciones la ciencia europea todavía se retrasa con respecto a los logros de los matemáticos del S. XV de Asia central y que en realidad las nuevas grandes ideas, que determinaron el desarrollo de las nuevas matemáticas en Europa, aparecen solamente en el siguiente siglo XVII. En el siglo XVI parece que la nueva era de las matemáticas comienza con el descubrimiento de la solución algebraica de las ecuaciones de tercer grado (S. del Ferro, alrededor de 1515, y más adelante e independientemente N. Tartaglia, alrededor de 1530) y de cuarto grado (L. Ferrari, 1545), lo que era considerado durante siglos irrealizable. G. Cardano investigó las ecuaciones de tercer grado, después de establecer el supuesto caso irreducible, en el cual las raíces verdaderas de la ecuación se expresan de forma compleja. Esto forzó a Cardano, aunque con desconfianza, a reconocer la ventaja de los cálculos con números complejos. Un desarrollo adicional del álgebra se realizó con F. Viète, el fundador del actual cálculo literal algebraico en 1591 (hasta él, solamente fueron señaladas por letras las incógnitas). El estudio sobre la perspectiva, desarrollado en la geometría antes del S. XVI, es presentado por el artista alemán A. Durero (1525). S. Stevin desarrolló (1585) las reglas de operaciones aritméticas con fracciones decimales.

Rusia hasta el siglo XVIII

La formación matemática en Rusia se encontraba en los siglos IX al XIII al mismo nivel que los países más avanzados culturalmente del este y oeste de Europa. Posteriormente sufrió un retraso causado por la invasión de los mongoles. En los siglos XV y XVI en conexión con la consolidación del estado ruso y el crecimiento económico del país aumentaron considerablemente las necesidades de la sociedad en cuanto al conocimiento matemático. A fines del S. XVI y especialmente en el S. XVII surgió la confección de numerosos manuscritos de aritmética y geometría, en los cuales aparecía una información suficientemente extensa, necesaria para la actividad práctica (comercio, impuestos, artillería, edificación, etc.).

En Rusia antigua tuvo aceptación el sistema bizantino de signos numéricos, similar al griego, basado en el alfabeto eslavo. La numeración eslava en la literatura matemática rusa se encuentra anteriormente al principio del S. XVIII, pero desde fines del S. XVI desplaza ya a esta numeración el sistema de posición decimal. El más antiguo trabajo matemático conocido por nosotros se sitúa en 1136 y corresponde al monje Kirik de Novgorod. Se dedica a los cálculos cronológicos aritméticos, que demuestran que en aquella época en Rusia sabían solucionar el problema complejo de la enumeración pascual (determinación para cada año del día de la fiesta de Pascua), que se reduce en su parte matemática a la solución en números enteros de ecuaciones lineales indeterminadas. Los manuscritos aritméticos de fines del S. XVI y XVII contienen, además de la descripción de la numeración eslava y árabe, las operaciones aritméticas con números enteros positivos, y también presentan detalladamente las reglas de la operación con las fracciones, regla de tres y solución de ecuaciones lineales con una incógnita por medio de la regla de la falsa posición. En los manuscritos se examinan muchos ejemplos de contenido real con el propósito del uso práctico de reglas generales y se presenta el denominado cálculo por tablas, prototipo de los cálculos rusos. De manera semejante se construyó la primera parte aritmética de la famosa “Aritmética” de L. F. Magnitskii (1703). En los manuscritos geométricos, que en su mayoría persiguieron también propósitos prácticos, se contenían las reglas de cálculo para la determinación de áreas de figuras y los volúmenes de los cuerpos, frecuentemente por aproximación, las características de triángulos semejantes y el teorema de Pitágoras.

II 3. Período de la creación de las matemáticas de las magnitudes variables

A partir del S. XVII comienza sustancialmente el nuevo período del desarrollo de las matemáticas.

“El punto crucial en matemáticas fue la magnitud variable cartesiana. Gracias a ella se incorporaron a las matemáticas el movimiento e incluso la dialéctica y por lo tanto apareció inmediatamente el cálculo diferencial e integral... ” (Engels F.; ver Marx K. Engels F., *Obras*, 2ª edic., vol. 20, p. 573).

Las relaciones cuantitativas y las formas espaciales ahora estudiadas por las matemáticas ya no se reducen a los números, los valores y las figuras geométricas. Esencialmente esto fue causado por la introducción explícita en las matemáticas de las ideas de movimiento y de cambio. Ya en el álgebra se contiene de forma encubierta la idea de la dependencia entre los valores (el valor de la suma depende de los valores de los términos, etc.). Sin embargo, para trabajar con las variaciones de las relaciones numéricas, era necesario establecer las dependencias entre los valores como objeto independiente de estudio. Por lo tanto se coloca en primer plano el concepto de función, que desempeña el mismo papel de objeto básico e independiente de estudio que tuvo previamente el concepto de valor o de número. El estudio de las magnitudes variables y de las dependencias funcionales conduce más allá a los conceptos básicos del análisis matemático, que llevan en las matemáticas explícitamente a la idea de infinito, a los conceptos de límite, derivada, diferencial e integral. Se crea el análisis infinitesimal, en primer lugar en forma de cálculo diferencial y de cálculo integral, que permite conectar los cambios finales en las magnitudes variables con su comportamiento en la proximidad de los valores puntuales estudiados. Las leyes fundamentales de la mecánica y de la física se escriben en forma de ecuaciones diferenciales, y la tarea de integrar estas ecuaciones se presenta como una de las tareas más importantes de las matemáticas. El cálculo de las funciones desconocidas, determinado por condiciones de otra clase, constituye el objeto del cálculo de variaciones. Así, junto con las ecuaciones en las cuales lo desconocido son los números, aparecen ecuaciones en las cuales las incógnitas representan funciones.

El objeto de estudio de la geometría también crece sustancialmente con la introducción en la geometría de las ideas de movimiento y de transformación de figuras. La geometría comienza a estudiar el movimiento y las transformaciones por sí mismos. Por ejemplo, en la geometría descriptiva uno de los objetos básicos del estudio está en las transformaciones descriptivas del plano o del espacio. Sin embargo, el desarrollo consciente de estas ideas se realiza solamente hacia fines del S. XVIII y comienzos del S. XIX. Mucho antes, con la creación en el S. XVII de la geometría analítica, cambió principalmente el peso de la geometría con respecto al resto de las matemáticas: se encontró el método universal para pasar de los problemas geométricos al lenguaje y a los métodos de resolución algebraicos y analíticos, y por otra parte se abrió la gran posibilidad de la representación géometrica (ilustración) de hechos algebraicos y analíticos, por ejemplo con la representación gráfica de las dependencias funcionales.

El álgebra del S. XVII y XVIII está en un grado considerable dedicada a las consecuencias que surgen de la posibilidad de estudiar el lado izquierdo de la ecuación $P(x) = 0$ como función de variable x. Este acercamiento a la cuestión permitió estudiar el problema del número de raíces verdaderas, para dar los métodos de su clasificación y cálculo aproximado, y aunque en el campo complejo el matemático francés J. D'Alembert no llegó a algo totalmente definitivo, para los matemáticos del S. XVIII fue suficientemente convincente la prueba del "teorema fundamental del álgebra" basada en la existencia para cualquier ecuación algebraica de por lo menos una raíz. Los logros del álgebra "pura", no necesariamente prestados de los conceptos del análisis del cambio continuo de los valores, fueron también significativos en los siglos XVII y XVIII (baste mencionar aquí la solución de los sistemas arbitrarios de ecuaciones lineales con la ayuda de las definiciones, el desarrollo de la teoría de la división de polinomios, de la eliminación de la incógnita, etc.); sin embargo, la consciente y estricta separación de los hechos y de los métodos algebraicos respecto a los hechos y los métodos de análisis matemático llega sólo al final de esta época (segunda mitad del S. XIX y S. XX). En los S. XVII y XVIII el álgebra fue recibida en un grado considerable como el primer capítulo del análisis, en el cual en vez de un estudio de dependencias arbitrarias entre los valores y la solución de ecuaciones arbitrarias se limitan a las dependencias y a las ecuaciones algebraicas.

La creación de las nuevas matemáticas de magnitudes variables en el S. XVII fue el trabajo de los primeros científicos de los países de Europa occidental, en primer lugar de I. Newton y G. Leibnitz. En el siglo XVIII uno de los centros científicos de estudios matemáticos básicos fue la Academia de Ciencias de Petersburgo, donde trabajaron una serie de importantes matemáticos de aquel tiempo de origen extranjero (L. Euler, J. Bernoulli) y gradualmente se agregó la escuela matemática rusa, que desarrolló brillantemente sus estudios desde el principio del S. XIX.

Siglo XVII

Se caracteriza la nueva etapa del desarrollo de las matemáticas por la creación en el S. XVII de la ciencia natural matemática, que tiene como meta la explicación de los fenómenos y procesos naturales separados de la acción general, y la formulación matemática de las leyes de la naturaleza. Durante el S. XVII los estudios matemáticos realmente profundos y extensos se relacionan solo con dos campos de las ciencias naturales, la mecánica [G. Galilei presenta las leyes de la caída los cuerpos (1632, 1638), J. Kepler las leyes del movimiento de los planetas (1609, 1619), I. Newton la ley de la gravitación universal (1687)] y con respecto a la óptica [G. Galilei (1609) y J. Kepler (1611) construyen el telescopio, I. Newton desarrolla la óptica a través de la teoría corpuscular, y Ch. Huygens y R. Hooke mediante la teoría ondulatoria]. Sin embargo la filosofía racionalista del S. XVII avanza la idea de la universalidad del método matemático (R. Descartes, B. Spinoza, G. Leibnitz), dando un brillo especial a las aspiraciones del desarrollo matemático de la época, principalmente filosófico.

Nuevos y serios problemas matemáticos se plantean a las matemáticas en el S. XVII desde la navegación (necesidad de la mejora de la medida horaria y de la creación del cronómetro exacto), y también desde la cartografía, balística, hidráulica. Los autores del S. XVII, que comprenden y aman la naturaleza, acentúan el gran carácter práctico de las matemáticas llevándolas a una nueva etapa de desarrollo. Los nuevos conceptos, que no se corresponden con las categorías lógico-formales de las antiguas matemáticas, obtuvieron su justificación en correspondencia con las relaciones verdaderas del mundo real. Así, por ejemplo, la realidad del concepto de derivada surgió del concepto de velocidad en la mecánica; por lo tanto la pregunta consistió no en si es posible justificar lógicamente este concepto, sino solamente en cómo realizarlo.

Los logros matemáticos del S. XVII comienzan con el descubrimiento de los logaritmos (J. Napier publicó sus tablas en 1614). En 1637 R. Descartes publica su “Geometría”, que contiene las bases del método coordenado en la geometría, la clasificación de curvas con su subdivisión en algebraicas y transcendentes. En estrecha relación con la posibilidad de representar las raíces de la ecuación $P(x) = 0$ por puntos de intersección de la curva $y = P(x)$ con el eje de abscisas, en el álgebra se investigan las raíces verdaderas de una ecuación de cualquier grado (R. Descartes, I. Newton, M. Rolle). Los estudios de P. Fermat sobre los máximos y los mínimos y la investigación de tangentes a las curvas incluyen ya realmente los métodos de cálculo diferencial, pero estos métodos todavía no se aíslan absolutamente y no se desarrollan. Otra fuente del análisis de lo infinitamente pequeño es desarrollada por J. Kepler (1615) y B. Cavalieri (1635) en el método “de los indivisibles”, aplicado por ellos a la determinación de los volúmenes de los cuerpos de revolución y otros numerosos problemas. Así, fueron creados de forma geométrica los principios del cálculo diferencial e integral.

Se desarrolla paralelamente el estudio de las series infinitas. Las características de la serie simple, comenzando por la progresión geométrica, fueron estudiadas por J. Wallis (1685). N. Mercator (1668) obtuvo el desarrollo de ln $(1 + x)$ como serie exponencial. I. Newton encontró (1665-69) la fórmula del binomio para cualquier índice, las series exponenciales de las funciones e^x, sen x, arc sen x. En el posterior desarrollo del estudio de la serie infinita participaron casi todos los matemáticos del S. XVII (J. Wallis, Ch. Huygens, G. Leibnitz, J. Bernoulli y otros).

Con la creación del método coordenado y la propagación de ideas sobre los valores mecánicos de dirección (velocidad, aceleración), adquirió claridad y evidencia completa el concepto de número negativo. Por el contrario, los números complejos, como subproducto restante del aparato algebraico, continuaron siendo principalmente objeto de discusiones estériles.

En el último tercio del S. XVII se produce el descubrimiento del cálculo diferencial e integral en el sentido propio de la palabra. Con respecto a la publicación la prioridad de este descubrimiento pertenece a G. Leibnitz, quien expuso ampliamente las ideas básicas del nuevo cálculo en artículos publicados en 1682-86. Sin embargo, con respecto a la época de la obtención real de resultados básicos hay motivos para considerar que la prioridad corresponde a I. Newton, que llegó a las ideas básicas del cálculo diferencial e integral durante los años 1665-66. “El análisis con la ayuda de las ecuaciones” de I. Newton (1669) se transmitió en manuscrito a los matemáticos ingleses I. Barrow y a J. Collins y obtuvo una amplia reputación entre los matemáticos ingleses. “El método de fluxiones”, la obra en la cual I. Newton expuso de manera sistemática y total su teoría, fue escrita en 1670-71 (fue publicada en 1736). Sin embargo, G. Leibnitz comenzó sus estudios del análisis de lo infinitamente pequeño en 1673. I. Newton y G. Leibnitz examinaron de forma general por primera vez la base para las operaciones del nuevo cálculo de la diferenciación y de la integración de las funciones, estableciendo la conexión entre estas operaciones (así se designó la fórmula de Newton-Leibnitz) y desarrollando para ellas un algoritmo uniforme general. I. Newton y G. Leibnitz, sin embargo, abordaron esta materia de forma diferente. Para I. Newton los conceptos iniciales son los conceptos de "fluente" (cantidad variable) y de sus "fluxiones" (velocidad de su cambio). Para afrontar el problema de encontrar las fluxiones y las relaciones entre las fluxiones con el fluente asignado (diferenciación y enunciado de ecuaciones diferenciales), I. Newton se enfrentó al problema inverso de encontrar fluentes en las relaciones entre las fluxiones, es decir, la tarea general de integrar las ecuaciones diferenciales; la tarea de encontrar la primitiva aparece aquí como caso especial de integrar la ecuación diferencial $dy/dx = f(x)$.

Este punto de vista era totalmente natural para I. Newton como creador de la ciencia natural matemática: su cálculo de fluxiones era simplemente el reflejo de la idea de que las leyes elementales de la naturaleza se expresan por ecuaciones diferenciales, y la obtención de resultados que describen estos procesos mediante las ecuaciones requiere su integración. La cuestión del paso del álgebra de lo finito al álgebra de lo infinitamente pequeño se situó para G. Leibnitz en el centro de la atención; la integral se entendió, ante todo, como la suma de un número infinitamente grande de cantidades infinitamente pequeñas, y el concepto básico del cálculo diferencial eran los diferenciales, aumentos infinitamente pequeños, de las cantidades variables (por el contrario, I. Newton, introduciendo el concepto apropiado del "momento", fue procurando en sus últimos trabajos librarse de aquella noción). Con la publicación del trabajo de G. Leibnitz, en Europa continental comenzó el período del esfuerzo generalizado e intensivo en el cálculo diferencial e integral, integración de ecuaciones diferenciales y usos geométricos del análisis, en los cuales participó, además de G. Leibnitz mismo, J. Bernoulli, G. L'Hôpital y otros. Aquí se crea el estilo contemporáneo de trabajo matemático, con el cual los resultados obtenidos se publican inmediatamente en artículos de revistas y ya muy pronto después de su publicación son utilizados en estudios de otros científicos.

Además de la geometría analítica se desarrolla, en relación cercana con el álgebra y el análisis, la geometría diferencial, en el S.XVII las bases del desarrollo posterior de la geometría pura se encaminan hacia la creación de los conceptos básicos de la geometría descriptiva. Entre otros descubrimientos del S. XVII se deben mencionar los estudios conocidos de la teoría de los números (B. Pascal, P. Fermat); el desarrollo de los conceptos básicos del análisis combinatorio (P. Fermat, B. Pascal, G. Leibnitz); el primer trabajo sobre la teoría de las probabilidades (P. Fermat, B. Pascal), que fue coronado a fines del siglo por un resultado de valor fundamental, el descubrimiento de la forma más simple de la ley de los grandes números (J. Bernoulli, publicado en 1713). Es necesario también referirse a la construcción por B. Pascal (1641) y G. Leibnitz (1673-74) de las primeras calculadoras, que permanecieron durante mucho tiempo, sin embargo, sin consecuencias prácticas.

Siglo XVIII

En el comienzo del S. XVIII el estilo general de los estudios matemáticos cambia gradualmente. El éxito del S. XVII, causado esencialmente por la novedad del método, se consiguió principalmente por el valor y la profundidad de las ideas generales, que trazaron juntas las matemáticas y la filosofía. Al principio del S. XVIII el desarrollo de los nuevos campos de las matemáticas, creados en el S. XVII, alcanzó un nivel que comenzó a requerir primero de todo habilidad en el manejo del aparato matemático y recursos en la investigación de las soluciones de problemas difíciles que surgieron inesperadamente. De los dos matemáticos más grandes del S. XVIII, L. Euler fue el representante más brillante de esta tendencia de virtuoso, y J. Lagrange, siendo posiblemente inferior a L. Euler en la cantidad y variedad de las tareas solucionadas, conectó brillantemente la tecnología con conceptos de generalización amplios, típicos de la escuela matemática francesa de la segunda mitad del S. XVIII, relacionada de cerca con el gran movimiento filosófico de los ilustrados y materialistas franceses. El entusiasmo por la fuerza extraordinaria del aparato de análisis matemático conduce naturalmente a la fe en la posibilidad de su desarrollo puramente automático, en la corrección de los cálculos matemáticos incluso cuando en ellos se incorporen símbolos carentes de sentido. Si con la creación del análisis infinitesimal se demuestran, mediante su manejo lógico, ideas que eran completamente claras, ahora se defiende abiertamente el derecho de calcular expresiones matemáticas privadas directamente de sentido según las reglas generales, apoyándose en la claridad o cualquier justificación lógica para la legitimidad de tales operaciones. Quien se inclina más a este lado de la vieja generación es G. Leibnitz, quien en 1702 a propósito de la integración de funciones racionales con la ayuda de su desarrollo en expresiones imaginarias habla sobre la “interferencia maravillosa del mundo ideal” , etc. L. Euler, más realista, no está dispuesto a hablar de maravillas, pero acepta la legitimidad de operaciones con números imaginarios y con números divergentes como hecho empírico, confirmado por la corrección del resultado obtenido. Aunque se comenzó el trabajo de comprensión racional de la base del análisis de lo infinitamente pequeño, la elaboración sistemática de la justificación lógica del análisis fue realizada solamente en el S. XIX.

Si los más visibles matemáticos del S. XVII eran, con mucha frecuencia, los mismos filósofos o los físicos experimentales de aquel tiempo, el trabajo científico de las matemáticas en el S. XVIII se convierte en profesión independiente. Los matemáticos del S. XVIII son gente que proviene de diferentes círculos sociales, que fueron escogidos temprano por sus capacidades matemáticas, con lo que se convierte rápidamente en carrera académica. (L. Euler, que proviene de una familia de pastor protestante en Basilea, fue invitado a la edad de 20 años a trabajar como adjunto en la Academia de Ciencias de Petersburgo, a los 23 años se convierte allí en profesor, a los 39 años en director de la sección físico-matemática de la Academia de Ciencias de Berlín. J. Lagrange, hijo de un funcionario francés, a los 19 años fue profesor en Turín, y a los 30 años director de la sección físico-matemática de la Academia de Ciencias de Berlín. P. Laplace, hijo de un agricultor francés, a los 22 años fue profesor de la Escuela Militar de París, a los 36 años miembro de la Academia parisiense de Ciencias.) En este caso, sin embargo, la ciencia natural matemática (mecánica, física matemática) y los usos técnicos de las matemáticas siguen estando en la esfera de la actividad de los matemáticos. L. Euler se ocupa de cuestiones de construcción de navíos y óptica, J. Lagrange crea las bases de la mecánica analítica, P. Laplace, que se consideraba esencialmente matemático, es también el astrónomo y físico más importante de su tiempo, etcétera.

Las matemáticas del S. XVIII fueron enriquecidas por muchos resultados sobresalientes. Debido al trabajo de L. Euler, de J. Lagrange y A. Legendre la teoría de los números adquiere la naturaleza de ciencia sistemática. J. Lagrange dio la solución general de las ecuaciones indeterminadas de segundo grado (1769, publicado en 1771). L. Euler estableció el principio de la reversibilidad para el residuo cuadrático (1772, fue publicado en 1783) y describió la función zeta (1737, 1748, 1749) para estudiar los números primos, de los que se ocupó al principio la teoría analítica de los números.

Con la ayuda de los desarrollos en fracciones continuas L. Euler prueba la irracionalidad de e y e^2 (1737, publicado en 1744), y J. Lambert (1766, publicado en 1768) la irracionalidad de π. En el álgebra G. Cramer (1750) introdujo los determinantes para solucionar los sistemas de ecuaciones lineales. L. Euler consideró como hecho empírico establecido la existencia en cada ecuación algebraica de raíces de la forma $A+\sqrt{-1}B$. Gradualmente se llega a la persuasión de que la raíz se da siempre en la forma $A+\sqrt{-1}B$ en las expresiones generalmente imaginarias (no solamente en el álgebra, sino también en el análisis). J. D'Alembert probó (1748) que el módulo del polinomio no puede tener un mínimo, aparte del cero (el llamado lema D'Alembert), contando esto para la prueba de la existencia de una raíz en cualquier ecuación algebraica. Las fórmulas de A. Moivre y L. Euler, que conectan las funciones exponenciales y trigonométricas de argumento complejo, condujeron a la extensión posterior de los usos de los números complejos en el análisis. I. Newton, J. Stirling, L. Euler y P. Laplace pusieron las bases de diferencias finitas en el cálculo. B. Taylor expuso (1715) su fórmula del desarrollo de una función arbitraria en series exponenciales. En los investigadores del siglo XVIII, especialmente en L. Euler, las series se hacen uno de los instrumentos de gran alcance y flexibilidad del análisis. J. D'Alembert comienza el estudio serio de las condiciones de la convergencia de las series. L. Euler, J. Lagrange y especialmente A. Legendre pusieron las bases del estudio de integrales elípticas –primera forma de funciones no elementales, sujetas a un estudio especial profundo. Atención considerable se prestó a las ecuaciones diferenciales; en particular L. Euler dio el primer método de solucionar la ecuación diferencial lineal de cualquier orden con coeficientes constantes (1739, publicada en 1743), J. D'Alembert examinó los sistemas de ecuaciones diferenciales, J. Lagrange y P. Laplace desarrollaron la teoría general de las ecuaciones diferenciales lineales de cualquier orden. L.

Euler, G. Monge y J. Lagrange pusieron los principios de la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, mientras que L. Euler, G. Monge y P. Laplace de segundo orden. Hay interés especial en la introducción en el análisis del desarrollo de funciones en series trigonométricas, puesto que en conexión con esta tarea entre L. Euler, J. Bernoulli, J. D'Alembert, G. Monge y J. Lagrange desarrollaron la controversia con respecto al concepto de la función, que preparó los resultados fundamentales del S. XIX sobre la relación entre la expresión analítica y el comportamiento de la función. Finalmente, el cálculo de variaciones, creado por L. Euler y J. Lagrange, es la nueva rama del análisis, que se presentó en el S. XVIII. A. Moivre, I. Bernoulli, P. Laplace a partir de los logros de los S. XVII y XVIII sentaron los principios de la teoría de las probabilidades.

En el campo de la geometría L. Euler condujo a la terminación del sistema de la geometría analítica elemental. En el trabajo de L. Euler, A. Clairaut, G. Monge y J. Meusnier se colocaron las bases de la geometría diferencial de las curvas y de las superficies del espacio. J. Lambert desarrolló la teoría de la perspectiva, y G. Monge la forma final de geometría descriptiva.

Es evidente del examen presentado que las matemáticas en el S. XVIII, basándose en las ideas del S. XVII, superaron largamente a los siglos anteriores. Este florecimiento de las matemáticas estuvo principalmente en conexión con la actividad de las Academias; las universidades desempeñaron un papel más pequeño. El distanciamiento de los matemáticos más importantes de la enseñanza de la universidad se compensó por la energía con la que todos, comenzando por L. Euler y J. Lagrange, escribieron libros de texto, extensos estudios y tratados.

III. Las matemáticas contemporáneas

Todas las ramas del análisis matemático creadas en el S. XVII y XVIII continuaron con gran intensidad en el S. XIX y XX. Creció enormemente durante esta época el ámbito de tareas dedicadas a los problemas de la técnica y la ciencia natural. Sin embargo, además de este aumento cuantitativo, a partir de los años últimos del S. XVIII y en el principio del S. XIX se observa en el desarrollo de las matemáticas una serie sustancialmente nueva de características.

III. 1. La ampliación del objeto de las matemáticas

En los S. XVII y XVIII se acumuló un material enorme que condujo a la necesidad de un análisis lógico profundo y se asoció a nuevos puntos de vista. El descubrimiento y puesta en uso de la interpretación geométrica de los números complejos [el topógrafo danés K. Bessel, 1799, y el matemático francés J. Argand , 1806], la prueba de la insolubilidad en radicales de la ecuación algebraica general de quinto grado (N. Abel, 1824), el desarrollo por

A. Cauchy de los principios de la teoría de las funciones de variable compleja, su trabajo para una justificación rigurosa del análisis de lo infinitamente pequeño, la creación por N. I. Lobachevski (1826, publicado en 1829-30) y J. Bolyai (1832) de la geometría no-euclidiana, el trabajo de K. Gauss (1827) sobre geometría intrínsica de superficies, son ejemplos típicos de las nuevas tendencias en matemáticas que se encuentran en el cambio del S. XVIII al XIX.

La conexión de las matemáticas con el desarrollo de la ciencia natural, que no está ahora menos cercana, adquiere formas más complejas. Las grandes nuevas teorías aparecen no solamente como resultado de las demandas directas de la ciencia natural o de la tecnología, sino también de las necesidades internas de las mismas matemáticas. Así fue el desarrollo de la teoría de las funciones de variable compleja, que ocuparon a principios y mediados del S. XIX la posición central en todo el análisis matemático.

Otro ejemplo notable de teoría que se presentó como resultado del desarrollo interno de las matemáticas, fue la "geometría imaginaria" de Lobachevski.

Es posible dar un ejemplo adicional de cómo, a fines del S. XVIII y primera mitad del S. XIX, se pasó a puntos de vista muy generalizados sobre los hechos matemáticos, y en la segunda mitad del S. XIX y el S. XX se recibió una gran ayuda de los logros obtenidos anteriormente para las nuevas demandas de la ciencia natural. La teoría de grupos se origina a partir del examen de J. Lagrange (1771) de los grupos en conexión con el problema de la resolución en radicales de ecuaciones algebraicas de grado más alto. E. Galois (1830-32, publicado en 1832), con la ayuda de la teoría de grupos de sustituciones dio respuesta final a la cuestión de las condiciones de solubilidad en radicales de ecuaciones algebraicas de cualquier grado. A mediados del S. XIX A. Cayley (1846) dio la definición "abstracta" general de los grupos. S. Lie desarrolló la teoría de grupos continuos, en base a los problemas generales de la geometría. Y solamente después de esto E. S. Fedorov (1890) y el científico alemán A. Schoenflies (1891) establecieron que la estructura de los cristales está subordinada a las reglas de la teoría de los grupos; incluso más tarde la teoría de grupos se convierte en un instrumento de gran alcance en la física cuántica.

En dependencia muy directa y continua de las demandas de la mecánica y de la física tuvo lugar la formación del análisis vectorial y tensorial. En el marco del análisis funcional firmemente conectado con las necesidades de la física contemporánea se aplican a las ideas de vector y tensor valores de dimensión infinita.

Así, como resultado de las necesidades internas de las matemáticas y de las nuevas demandas de la ciencia natural, el ámbito de relaciones cuantitativas y de formas espaciales estudiado por las matemáticas se agranda extremadamente; a él se incorporan las relaciones que existen entre los elementos de un conjunto arbitrario, vectores, operadores en los espacios de funciones, toda la variedad de las formas del espacio de cualquier dimensión, etc. Con esta comprensión amplia los términos "formas espaciales" y "relaciones cuantitativas" que dimos al principio de este artículo sobre las matemáticas también son aplicables en la actual etapa de su desarrollo.

La novedad esencial del desarrollo de las matemáticas en la etapa comenzada en el S. XIX está en que las cuestiones de la ampliación necesaria del ámbito de las relaciones cuantitativas y las formas espaciales sometidas a estudio se convirtieron en objeto del interés consciente y activo de los matemáticos. Si antes, por ejemplo, la introducción de los números negativos y complejos y la formulación exacta de las reglas para operar con ellos requirió un trabajo continuo, ahora el desarrollo de las matemáticas requirió la producción de métodos de creación consciente y sistemática de nuevos sistemas geométricos, nuevas "álgebras" con "multiplicación no conmutativa" o incluso "no asociativa", etcétera, en la medida en que surgía su necesidad. Así, la pregunta sobre si no se debe, por ejemplo, para el análisis y la síntesis de uno u otro tipo de contactos relé, crear una nueva "álgebra" con nuevas reglas de actuación, aparece sin ser provocada por la práctica científica y técnica diaria. Pero es difícil sobrestimar la importancia de esa revisión de todo el pensamiento matemático, que hubo de ocurrir durante el transcurso del S. XIX. Desde el punto de vista ideológico el descubrimiento de la geometría no-euclidiana de Lobachevski fue el más significativo entre los descubrimientos de comienzos del S. XIX. Específicamente, por el ejemplo de esta geometría se superó la fe en la estabilidad de los milenarios axiomas generados por el desarrollo de las matemáticas, se comprendió la posibilidad de diseñar teorías sustancialmente nuevas en matemáticas por el camino de una abstracción correctamente ejecutada, prescindiendo de las limitaciones anteriores que no tienen una necesidad lógica interna, y, finalmente, se descubrió que una teoría abstracta de esa clase puede, en el curso del tiempo, obtener siempre amplias aplicaciones mucho más concretas.

La extensión extraordinaria del objeto de las matemáticas atrajo en el S. XIX una atención intensiva hacia las cuestiones de su "justificación", es decir, la revisión crítica de sus proposiciones iniciales (axiomas), la construcción de un sistema riguroso de definiciones y demostraciones, y también el examen crítico de los métodos lógicos usados en estas demostraciones. El trabajo sobre una justificación rigurosa de las varias ramas de las matemáticas ocupa justamente un lugar significativo en las matemáticas de los S. XIX y XX. Sobre la base del análisis (teoría de números reales, teoría de límites, y la justificación rigurosa de todos los métodos de cálculo diferencial e integral), los trabajos realizados se presentan actualmente de forma más o menos completa en la mayoría de los libros de texto (cuya naturaleza es puramente práctica). Sin embargo, hasta hace poco tiempo se encontraban casos en los que, por razones prácticas, se retrasaba una justificación rigurosa de la nueva teoría matemática. Así sucedió en un período tan largo como el curso de los S. XIX y XX con el cálculo operacional de tan amplios usos en la mecánica y la electrotecnia. Sólo con gran retraso se construyó la presentación correcta de la teoría matemática de las probabilidades. Y sigue faltando una justificación rigurosa de muchos métodos matemáticos, usados extensamente en la física teórica contemporánea, donde muchos resultados valiosos se obtienen con la ayuda de dispositivos matemáticos "ilegítimos".

El estándar de los requisitos para la precisión lógica, gobernado en el trabajo práctico de los matemáticos por el desarrollo de teorías matemáticas separadas, se consolidó solamente hacia el final del S. XIX. Este estándar se basa en el concepto conjuntista de la estructura de una teoría matemática cualquiera. Desde este punto de vista cualquier teoría matemática se refiere a uno o varios objetos, que guardan entre sí algunas relaciones. Todas las características formales de estos objetos y relaciones, necesarias para el desarrollo de la teoría, quedan fijadas en forma de axiomas, los cuales no afectan a la naº-turaleza específica de los mismos objetos y sus relaciones. La teoría es aplicable a cualquier conjunto de objetos con relaciones, que satisfaga el sistema de los axiomas asumidos como su base. De acuerdo con esto la teoría se puede considerar como definitivamente construida, desde el punto de vista lógico, sólo en el caso de que en su desarrollo no se utilice ninguna característica concreta, no mencionada en los axiomas, de los objetos estudiados y las relaciones entre ellos, sino que todos los nuevos objetos o relaciones introducidos en el desarrollo de la teoría, se determinen formalmente por medio de los axiomas.

La lógica matemática ilumina el otro lado de la construcción de cualquier teoría matemática. El sistema de axiomas entendido en la forma descrita (conjuntista) organiza el campo sin límites del uso de esta teoría matemática, indicando sus características conforme al estudio del conjunto de objetos y relaciones, pero no da ninguna indicación concerniente a los medios lógicos con la ayuda de los cuales dicha teoría matemática necesita desarrollarse. Por ejemplo, las características del conjunto de los números naturales se establecen con exactitud salvo isomorfismo con la ayuda de un sistema muy simple de axiomas. Sin embargo la resolución de los problemas, cuya solución está en principio predeterminada inequívocamente por la adopción de este sistema de axiomas, demuestra ser con frecuencia muy compleja: específicamente, la teoría de números abunda desde hace tiempo en problemas muy simples en su formulación pero que no encontraron hasta ahora una solución. Se plantea, naturalmente, la pregunta de si esto ocurre solamente porque la solución de algunos problemas simplemente formulados de la teoría de los números requiere una cadena muy larga de razonamientos, que abarcan lo ya sabido y usado elementalmente, o porque son necesarios métodos sustancialmente nuevos de inferencia lógica, no empleados previamente, para la solución de algunos problemas de la teoría de los números.

La lógica matemática contemporánea dio a esta pregunta una respuesta específica: ninguna teoría deductiva única puede agotar la variedad de los problemas de la teoría de números. Más exactamente, dentro de la teoría de los números naturales, es posible formular una secuencia de problemas ... del tipo de dicha teoría, tal que para cualquier teoría deductiva alguno entre estos problemas será "indecidible" estando dentro de los límites de dicha teoría (K. Gödel). En este caso por "teoría deductiva" se entiende la teoría que se desarrolla desde un número finito de axiomas construyendo una larga cadena de razonamientos, cuyas partes integrantes se ajustan al número finito de métodos elementales fijados para la inferencia lógica en dicha teoría.

Así el concepto descubierto de teoría matemática, en el sentido de teoría abarcada por un sistema de axiomas conjuntista, resulta sustancialmente más amplio que el concepto lógico de teoría deductiva: incluso con el desarrollo de la aritmética de números naturales, surge inevitablemente la invocación de nuevos métodos de razonamiento lógicos, que salen fuera de los límites de cualquier conjunto limitado de métodos estandarizados.

Todos esos resultados, que se pueden obtener dentro de los límites de una teoría deductiva, se pueden también obtener por el cálculo producido según reglas dadas para siempre. Si se da una prescripción rigurosamente definida para el cálculo de la solución de cierta clase de problemas, se habla entonces de algoritmo matemático. En la misma creación de un sistema suficientemente desarrollado de signos matemáticos, los problemas de la construcción de un sistema suficientemente general de algoritmos ocuparon un gran lugar en la historia de las matemáticas del tiempo que nos ocupa, pero solamente en décadas recientes, como resultado del desarrollo de la lógica matemática, se ha comenzado a crear una teoría general de algoritmos y de la "solubilidad algorítmica" de los problemas matemáticos. Las perspectivas prácticas de estas teorías son, al parecer, muy grandes, especialmente en conexión con el desarrollo contemporáneo de la tecnología de computación, que permite sustituir algoritmos matemáticos complejos por el trabajo de máquinas.

III 2. Historia de las matemáticas en el siglo XIX y principios del XX

Comienzo y mitad del siglo XIX

A principios del S. XIX tiene lugar una nueva extensión significativa del campo de los usos del análisis matemático. Si hasta este tiempo la mecánica y la óptica seguían siendo las ramas básicas de la física que requirieron grandes aparatos matemáticos, se une ahora a ellas la electrodinámica, la teoría del magnetismo y la termodinámica. Recibieron un desarrollo amplio las ramas más importantes de la mecánica de los medios continuos, de los cuales la hidrodinámica de fluidos ideales incomprensibles no fue creada hasta el S. XVIII por J. Bernoulli, L. Euler, J. D'Alembert y J. Lagrange. Crecieron rápidamente las demandas matemáticas de la tecnología. A principios del S.XIX aparecen las cuestiones de la termodinámica de las máquinas de vapor, mecánica técnica y balística. Como aparato principal de los nuevos campos de la mecánica y de la física matemática aparece con fuerza la teoría de ecuaciones en derivadas parciales y especialmente la teoría del potencial. En esta dirección trabajó la mayoría de los analistas importantes a comienzos y mediados del siglo, K. Gauss, J. Fourier, S. Poisson, A. Cauchy, P. Dirichlet, J. Green y M. V. Ostrogradskii. M. V. Ostrogradskii puso las bases del cálculo de las variaciones para las funciones de varias variables. Como resultado de estudios sobre las ecuaciones de la física matemática aparece en el trabajo de J. Stokes y otros matemáticos ingleses el análisis vectorial.

A pesar de las convicciones mecanicistas dominantes a principios del siglo XIX, el convencimiento de que la ciencia natural puede describir todos los fenómenos naturales por ecuaciones diferenciales, bajo presión de las demandas de la práctica la teoría de las probabilidades recibió un importante desarrollo posterior. P. Laplace y S. Poisson crean para esto un aparato analítico nuevo de gran alcance. P. L. Chebishev da una justificación rigurosa de los elementos de la teoría de las probabilidades y prueba su famoso teorema (1867), que combinó en formas generales con la formulación de la ley de los grandes números conocida anteriormente.

Según lo mencionado ya, junto con el desarrollo de los trabajos que se presentaron por las nuevas demandas de las ciencias naturales y de la tecnología, los matemáticos prestaron una atención extraordinaria, muy a comienzos del S. XIX, a las cuestiones de la justificación rigurosa del análisis (A. Cauchy, 1821, 1823). N. I. Lobachevski (1834) y, más tarde, P. Dirichlet (1837) formularon distintamente la definición de función como correspondencia totalmente arbitraria. En 1799 K. Gauss publicó la primera prueba del teorema fundamental del álgebra, formulando cuidadosamente, sin embargo, este teorema en términos puramente reales (descomponibilidad del polinomio real en los coeficientes reales de primer y segundo grado). Solamente mucho más tarde (1831) K. Gauss presentó claramente la teoría de los números complejos.

La teoría de las funciones de variable compleja aparece basada en la comprensión clara de la naturaleza de los números complejos. K. Gauss tenía amplios conocimientos en este campo, pero no publicó casi nada. Los principios generales de la teoría fueron presentados por A. Cauchy, la teoría de funciones elípticas fue desarrollada por N. Abel y K. Jacobi. Ya en esta etapa es característica, en contraste con el acercamiento puramente algorítmico del S. XVIII, la concentración de la atención en explicar la unicidad del comportamiento de las funciones en el campo complejo, gobernado básicamente por regularidades geométricas (comenzando por la dependencia del radio de convergencia de la serie de Taylor respecto a la situación de puntos individuales, establecida por A. Cauchy). Esto todavía se consolida a mediados del S. XIX con B. Riemann en el sentido de la naturaleza "cualitativa" y geométrica de la teoría de las funciones de variable compleja. Aquí ocurre que el portador geométrico natural de la función analítica en el caso de multivocidad no es el plano de la variable compleja, sino la denominada superficie de Riemann que corresponde a esta función. K. Weierstrass alcanza la misma generalidad que B. Riemann, basándose en un análisis puro. Sin embargo, las ideas geométricas de B. Riemann demostraron posteriormente que eran de todo un estilo de pensamiento más determinante en el campo de la teoría de las funciones de variable compleja.

En el período de entusiasmo por la teoría de las funciones de variable compleja, P. L. Chebishev es el representante más importante del interés por cuestiones específicas de la teoría de funciones en el campo real. P. L. Chebyshev creó la expresión más brillante de esta tendencia (comenzando a partir de 1854), la teoría de aproximaciones óptimas, a partir de las demandas de la teoría de los mecanismos.

En el álgebra, después de la mencionada demostración de insolubilidad en radicales de la ecuación general de quinto grado (P. Ruffini ,N. Abel), E. Galois demostró que el problema de la solubilidad de ecuaciones en radicales depende de las características de los grupos de Galois conectados con la ecuación. El problema del estudio abstracto general de los grupos es planteado por A. Cayley. Debe observarse que incluso en el álgebra la aceptación universal del valor de la teoría de grupos ocurrió solamente después del trabajo de C. Jordan en los años 70. Del trabajo de E. Galois y N. Abel surgió también el concepto de cuerpo de los números algebraicos, que condujo a la creación de una nueva ciencia, la teoría de los números algebraicos. Con el paso al S. XIX se desarrollaron los viejos problemas de la teoría de los números en un grado sustancialmente nuevo, generalmente en conexión con las características más simples de los números enteros. K. Gauss desarrolla la teoría de la representabilidad de los números mediante formas cuadráticas (1801), P. L. Chebishev obtiene resultados básicos sobre la densidad del orden de los números primos en la serie de los naturales (1848, 1850), P. Dirichlet demuestra el teorema sobre la existencia de una cantidad infinita de números primos en las progresiones aritméticas (1837), etc.

La geometría diferencial de superficies fue creada por K. Gauss (1827) y M. Peterson (1853). Para elaborar nuevos puntos de vista sobre el significado primario del objeto de la geometría tuvo lugar, como ya se indicó, la creación por N. I. Lobachevski de la geometría no-euclidiana. En paralelo, largo tiempo independiente de la geometría no-euclidiana, se desarrolló la geometría proyectiva (J. Poncelet, J. Steiner, K. Staudt y otros), también relacionada con un cambio sustancial en las viejas opiniones sobre el espacio. J. Plücker construyó la geometría empleando las líneas rectas como elementos básicos, y G. Grassmann creó la geometría afín y métrica del espacio vectorial de dimensión n.

En realidad, ya en la geometría intrínseca de superficies de Gauss la geometría diferencial se libera también de la conexión indisoluble con la geometría de Euclides: el hecho de que la superficie se encuentre en el espacio euclidiano tridimensional, se presenta para esta teoría como circunstancia casual. En base a esto, B. Riemann crea (1854, publicado en 1868) el concepto de la geometría métrica en dimensión n determinada por una forma diferencial cuadrática. Se estableció así el principio de la geometría de variedades diferenciales de dimensión n. A B. Riemann pertenecen las primeras ideas en el campo de la topología de variedades multidimensionales.

Fines del siglo XIX y principios del XX

Es solamente a comienzos de los años 70 del S. XIX cuando F. Klein publica el hallazgo de un modelo de la geometría no-euclidiana de Lobachevski, que finalmente elimina las dudas sobre su consistencia. F. Klein (1872) subordina toda la variedad de espacios de distintas dimensiones construidos por la "geometría" de esta época a la idea del estudio de los invariantes de uno u otro grupo de transformaciones. En esta época (1872) los principios del análisis obtienen el necesario fundamento en la forma de una teoría rigurosa de los números irracionales (R. Dedekind, G. Cantor y K. Weierstrass). En 1879-84 se publican los trabajos básicos de G. Cantor sobre la teoría general de conjuntos infinitos. Solamente después de esto pueden generalizarse las ideas contemporáneas sobre el objeto de las matemáticas, la construcción de una teoría matemática [ver arriba], el papel de la axiomática, etc. Su difusión amplia requirió todavía varias décadas; el reconocimiento general del concepto contemporáneo de la estructura de la geometría está conectado generalmente con la aparición en 1899 de los "Fundamentos de la geometría" de D. Hilbert.

La profundización adicional de los estudios para la fundamentación de las matemáticas se concentró en la superación de las dificultades lógicas que se presentaron en la teoría general de conjuntos, y en un estudio de la estructura de las teorías matemáticas y de los métodos de solución constructiva de problemas matemáticos por medio de la lógica matemática. Estos estudios crecen para formar una gran rama independiente de las matemáticas, la lógica matemática. Las bases de la lógica matemática fueron creadas en el S. XIX por J. Boole, P. S. Poretski, E. Schröder, G. Frege, G. Peano y otros. A principios del S. XX están los grandes logros obtenidos en este campo (teoría de la demostración de D. Hilbert; la lógica intuicionista creada por L. Brouwer y sus seguidores).

Todas las ramas de las matemáticas consiguen, a fines del S. XIX y comienzo del S. XX, un desarrollo extraordinario, que supera los períodos anteriores no solamente en el número de trabajos, sino también en la perfección y la fuerza de los métodos y el carácter definitivo de los resultados, comenzando por la rama más antigua, la teoría de los números. E. Kummer, L. Kronecker, R. Dedekind, E. I. Zolotarev y D. Hilbert ponen las bases de la teoría contemporánea de los números algebraicos. Ch. Hermite en 1873 prueba la transcendencia del número e, el matemático alemán F. Lindemann en 1882 la del número p, J. Hadamard (1896) y Ch. La Vallée Poussin (1896) terminan los estudios de P. L. Chebishev sobre la ley de la disminución de la densidad de números primos en la serie de los naturales. H. Minkowski introduce en los estudios de teoría de números métodos geométricos. En Rusia, después del ya mencionado P. L. Chebyshev, desarrollan brillantemente trabajos sobre la teoría de los números E. I. Zolotarev, A. N. Korkin, G. F. Voronoi y A. A. Markov.

El centro de gravedad de los estudios algebraicos se transfiere a nuevos campos: teoría de grupos, de cuerpos y de anillos, y así sucesivamente. Muchas de estas ramas del álgebra obtienen usos profundos en la ciencia natural: en concreto, la teoría de grupos en cristalografía, y más adelante en cuestiones de física cuántica.

En el límite entre el álgebra y la geometría, S. Lie crea (comenzando a partir de 1873) la teoría de los grupos continuos, cuyos métodos penetran posteriormente en todos los nuevos campos de las matemáticas y de las ciencias naturales.

La geometría elemental y la proyectiva atraen la atención de los matemáticos principalmente desde el punto de vista del estudio de sus bases lógicas y axiomáticas. Pero la geometría diferencial y algebraica se convierten en las ramas básicas de la geometría diseñadas por las fuerzas científicas más significativas. La geometría diferencial del espacio tridimensional euclidiano recibe un desarrollo sistemático completo en los trabajos de E. Beltrami, G. Darboux y otros. Más adelante se desarrolla vigorosamente la geometría diferencial para grupos de transformaciones más amplios (que el grupo de movimientos euclidianos) y especialmente la geometría diferencial de espacios multidimensionales. Esta dirección de los estudios geométricos, que recibió un impulso de gran alcance para su desarrollo con la aparición de la teoría general de la relatividad, se creó en primer lugar con el trabajo de T. Levi-Civita, E. Cartan y H. Weyl.

En conexión con el desarrollo de los puntos de vista más comunes de la teoría de conjuntos y de la teoría de las funciones de variable real a fines del S. XIX, la teoría de funciones analíticas quedó privada de la posición excepcional de núcleo de todo el análisis matemático, que se planeaba para ella a principios y mediados del S. XIX. Sin embargo, continúa desarrollándose con no menos intensidad de acuerdo con sus necesidades internas y debido a las nuevas conexiones que se revelan entre ella y otras ramas del análisis, y directamente con la ciencia natural. Especialmente esencial en esta última dirección fue la explicación del papel de las imágenes conformes para la solución de los problemas de valor límite para ecuaciones en derivadas parciales (por ejemplo, el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace), en el contexto del estudio de los flujos planos del fluido ideal y en problemas de la teoría de la elasticidad.

F. Klein y H. Poincaré crean la teoría de las funciones automórficas, en las cuales encuentra aplicaciones notables la geometría de Lobachevski. E. Picard, H. Poincaré, J. Hadamard, E. Borel desarrollan profundamente la teoría de funciones integrales, que hace posible, en concreto, la obtención del teorema ya mencionado sobre la densidad de la distribución de los números primos. H. Poincare, D. Hilbert y otros desarrollan la teoría geométrica de funciones y la teoría de las superficies de Riemann. Las imágenes conformes encuentran uso en aerodinámica (N. E. Zhukovskii, S. A. Chapligin).

Como resultado de la construcción sistemática del análisis matemático en base a la teoría aritmética rigurosa de los números irracionales y a la teoría de conjuntos de las matemáticas modernas, se presentó la teoría de funciones de variable real. Si anteriormente se estudiaron sistemáticamente solo las funciones que aparecen “naturalmente” en varios problemas especiales, después en la teoría de funciones de variable real hubo un interés típico por la explicación completa del verdadero alcance de los conceptos generales del análisis (en el mismo comienzo de su desarrollo, B. Bolzano y más tarde K. Weierstrass, por ejemplo, descubrieron que una función continua puede no tener derivada en ningún punto). Los estudios sobre la teoría de funciones de variable real condujeron a la determinación general de los conceptos de medida de un conjunto, de las medidas de la función y de la integral, que desempeñan un papel importante en las matemáticas contemporáneas. Teorías básicas sobre las funciones de variable real fueron propuestas por los matemáticos de la escuela francesa (C. Jordan, E. Borel, H. Lebesgue, R. Beer), y más tarde el papel directivo pasó a las escuelas rusa y soviética.

Además de su interés directo, la teoría de las funciones de variable real tuvo influencia en el desarrollo de muchas otras ramas de las matemáticas. Los métodos de límites elaborados en ella demostraron ser especialmente necesarios durante la construcción de las bases del análisis funcional. Si con respecto a los métodos el análisis funcional se desarrolló bajo el influjo de la teoría de funciones de variable real y de la teoría de conjuntos, después, por su contenido y por la naturaleza de las tareas abordadas, se acercó directamente al análisis clásico y a la física matemática, llegando a ser especialmente necesario (principalmente en la forma de teoría de los operadores) en la física cuántica. La selección consciente del análisis funcional como rama especial de las matemáticas fue realizada por primera vez por V. Volterra a fines del S. XIX. Pues por el análisis funcional se comprende ahora mucho más que antes el cálculo de variaciones y la teoría de las ecuaciones integrales, cuya construcción sistemática fue comenzada por el mismo V. Volterra y continuada por E. Fredholm. El caso especial más importante, los operadores en el espacio de Hilbert, cuyo papel dominante fue explicado por el trabajo de D. Hilbert sobre las ecuaciones integrales, se desarrolla de manera especialmente intensiva.

La mayoría de las contribuciones que aportan las matemáticas a la ciencia natural y la tecnología se reduce a la solución de ecuaciones diferenciales, tanto en los casos ordinarios (en el estudio de sistemas con número finito de grados de libertad), como en derivadas parciales (en el estudio de medios continuos y en la física cuántica). Por lo tanto, en el período en cuestión se cultivaron intensivamente todas las direcciones de estudio de las ecuaciones diferenciales. Se crearon métodos de cálculo operacional para solucionar los sistemas lineales complejos. En el estudio de sistemas no lineales con pequeña nolinealidad se aplicó extensamente el método de descomposición en los términos del parámetro. Se continuó elaborando la teoría analítica de las ecuaciones diferenciales ordinarias (H. Poincaré y otros). Sin embargo, en el campo de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias requirió la atención mayor el problema del estudio cualitativo de sus soluciones: la clasificación de los puntos singulares (H. Poincaré y otros), las cuestiones de estabilidad fueron estudiadas con especial profundidad por M. Liapunov.

La teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales sirvió como punto de partida a H. Poincaré para continuar la ampliación de los estudios de las variedades topológicas comenzados solamente por B. Riemann, especialmente en la dirección del estudio de los puntos fijos que se aplican continuamente sobre sí mismos. Aquí comenzaron los métodos "combinatorios", "homológicos" y "homotópicos" de la topología contemporánea. Otra dirección en la topología se presentó debido a la teoría de conjuntos y el análisis funcional, y condujo a la construcción sistemática de la teoría de espacios topológicos generales.

La teoría de ecuaciones en derivadas parciales obtuvo sustancialmente una nueva forma, incluso a fines del S. XIX, debido a la concentración de la atención primaria en los problemas de valor límite y la renuncia a la limitación por condiciones de contorno analíticas. La teoría analítica, que se remonta a A. Cauchy, K. Weierstrass y S. V. Kowalevski, no pierde en este caso su valor, sino que pasa a un plano inferior, puesto que se revela que durante la solución de los problemas de valor límite no garantiza la corrección, es decir, la posibilidad de encontrar aproximadamente la solución, conociendo las condiciones límite también de forma solamente aproximada, mientras que sin esta posibilidad la solución teórica no tiene valor práctico. El cuadro es más complejo de lo que era desde el punto de vista de la teoría analítica: los problemas del valor límite que se pueden plantear correctamente por los diversos tipos de ecuaciones diferenciales demuestran ser diferentes. La guía más confiable en la selección para cada tipo de ecuaciones de los problemas apropiados del valor límite (sobre la propagación de ondas, el flujo del calor, la difusión, etc.) llega a ser el uso espontáneo de las ideas físicas apropiadas. En relación con esto, la transformación de la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales principalmente en la teoría de las ecuaciones de la física matemática tuvo alto valor positivo. El trabajo según tipos separados de ecuaciones de la física matemática constituye justamente la parte sustancial de toda la producción matemática. Después de P. Dirichlet y de B. Riemann se ocuparon de las ecuaciones de la física matemática H. Poincaré, J. Hadamard, J. Rayleigh, W. Thomson, K. Neumann, D. Hilbert, y en Rusia A. M. Liapunov, V. A. Steklov y otros.

Los métodos de la teoría de las probabilidades son una adición esencial a los métodos de ecuaciones diferenciales en el estudio de la naturaleza y solución de los problemas técnicos. Si a principios del S. XIX los usuarios principales de los métodos probabilísticos fueron la teoría del disparo de artillería y la teoría de los errores, a fines del S. XIX y principios del XX la teoría de las probabilidades obtuvo muchos nuevos usos debido al desarrollo de la física estadística y de la mecánica, y al desarrollo del aparato de la estadística matemática. Los estudios teóricos más profundos en cuestiones generales de la teoría de las probabilidades a fines del S. XIX y principios del XX pertenecen a la escuela rusa (P. L. Chebishev, A. A. Markov y A. M. Liapunov).

El uso práctico de los resultados de un estudio matemático teórico requiere la obtención de una respuesta a un problema expresado en forma numérica. Incluso después de un planteamiento comprensivo del problema con frecuencia no se alcanza un final fácil. A fines del S. XIX y principios del XX los métodos de análisis numérico crecieron para formar ramas independientes de las matemáticas. Fundamentalmente se prestó una atención considerable a los métodos numéricos de integración de las ecuaciones diferenciales (los métodos de Adams, de Stormer, de Runge, etc.) y a las fórmulas cuadráticas (P. L. Chebishev, A. A. Markov, V. A. Steklov). El desarrollo amplio de trabajos que requieren cálculos numéricos condujo a la necesidad del cálculo y publicación de una creciente cantidad de tablas matemáticas.

A partir de la segunda mitad del S. XIX comienza el desarrollo intensivo de los estudios sobre historia de las matemáticas.

Conclusión

Más arriba se observaron las características especiales básicas de las matemáticas contemporáneas (el §. 1) y se enumeraron (§. 2) las direcciones básicas de los estudios de las matemáticas dentro de las diferentes ramas establecidas a principios del S. XX. En un grado considerable sigue existiendo esta división, a pesar del rápido desarrollo de las matemáticas en el S. XX, especialmente después del final de la Segunda Guerra Mundial (1939-45). El estado y los éxitos de las diversas escuelas científicas de las matemáticas contemporáneas, así como de los científicos individuales, se reflejan en los artículos correspondientes. (Véanse los artículos Teoría de números, Álgebra, Lógica, Geometría, Topología, Teoría de funciones, Análisis funcional, Ecuaciones diferenciales, Ecuaciones de la física matemática, Teoría de probabilidades, Estadística matemática, Matemáticas de computación.)

Desde las necesidades del desarrollo mismo de las matemáticas, la "matematización" de diversos campos de la ciencia, la penetración de métodos matemáticos en muchas esferas de la actividad práctica y el progreso rápido de la informática conducen a la diversificación de los esfuerzos básicos dentro de las diferentes ramas de las matemáticas establecidas, y a la aparición de una serie entera de nuevas disciplinas matemáticas (por ejemplo, véase Teoría de los algoritmos, Teoría de la información, Teoría de los juegos, Estudio de las operaciones, véase también Cibernética).

Sobre la base de los problemas de la teoría de los sistemas de control se presentaron las matemáticas discretas, o finitas, el análisis combinatorio, la teoría de los grafos, la teoría de la codificación.

Los problemas sobre el control óptimo (en un sentido u otro) de los sistemas físicos o mecánicos, de las ecuaciones diferenciales descritas, condujeron a la creación de la teoría matemática de optimización, y los problemas del control de los objetos en situaciones de conflicto a la aparición y desarrollo de la teoría diferencial de juegos.

Estudios en el campo del control de problemas generales y de las ramas de las matemáticas relacionadas con ellos, unidos al progreso de las técnicas de cálculo, dieron base a la automatización de nuevas esferas de la actividad humana.

Las matemáticas soviéticas ocupan un lugar avanzado en la ciencia matemática del mundo. En muchas direcciones los trabajos de los científicos soviéticos desempeñan un papel determinante. Los éxitos de las matemáticas rusas pre-revolucionarias estuvieron en relación con los estudios de científicos excepcionales individuales y tuvieron una base estrecha. Los centros matemáticos científicos se situaron en unas pocas ciudades (Petersburgo, Moscú, Kazan, Jarkov, Kiev). En este caso los logros básicos estuvieron relacionados con el trabajo de la escuela de Petersburgo. Después de la Gran Revolución Socialista de Octubre un número de nuevas direcciones importantes se presentaron en la escuela matemática de Moscú. En la Rusia pre-revolucionaria las universidades fueron los centros básicos de los estudios matemáticos (Petersburgo, Moscú, Kazan, etc.). El desarrollo de los estudios científicos en el campo de las matemáticas y de sus usos después de 1917 estuvo conectado muy íntimamente con el desarrollo y la consolidación de la Academia de Ciencias de la URSS; estos estudios están en un grado considerable concentrados en los institutos matemáticos de la Academia de Ciencias de la URSS, de las Academias de Ciencias de repúblicas de la Unión y de las universidades principales. El desarrollo más importante de las matemáticas en la URSS se debe a la aparición en los años del poder soviético de numerosas escuelas científicas en las ciudades, donde no había anteriormente un trabajo sensible llevado a cabo en el campo de las matemáticas. Tales escuelas matemáticas están en Tbilisi, Yerevan, Baku, Vilnius, Tashkent, Minsk, Sverdlovsk y otras ciudades juntamente con la escuela científica de Akademgorodok, cerca de Novosibirsk, recientemente creada en los años 60.

En países extranjeros los estudios matemáticos se realizan en los institutos matemáticos y en las universidades (especialmente en los países capitalistas).

Ya en los límites de los S. XVII y XVIII aparecieron las primeras sociedades matemáticas, que ahora existen en muchos países. Las recensiones sobre los logros de la ciencia matemática mundial y de sus aplicaciones, y también comunicaciones sobre los trabajos más interesantes de científicos individuales, se leen y se discuten en Congresos Internacionales de Matemáticos que se celebran cada 4 años (comenzando a partir de 1898). La organización y el estímulo de la colaboración internacional en el campo de las matemáticas, la preparación de los programas científicos de los Congresos Internacionales de matemáticos, etc., es la tarea de la Unión Matemática Internacional. Los estudios matemáticos actuales (y también información sobre la vida matemática en diversos países) se publican en los periódicos matemáticos, cuyo número total (a principios de los años 70 del S. XX) supera los 250.