

Fractalidad extrema e indeterminación clásica en sistemas dinámicos

por

Jacobo Aguirre y Miguel A. F. Sanjuán

En este trabajo analizamos las consecuencias físicas de disminuir indefinidamente el tamaño de las salidas de los sistemas conservativos con varios escapes, en el contexto de la dispersión caótica. Sorprendentemente, se observa en el límite una fractalización absoluta de los conjuntos de condiciones iniciales, de tal forma que lo que era en esencia un sistema determinista se convierte en la práctica en un proceso absolutamente aleatorio. Esta indeterminación tan extrema supone una limitación a nuestra capacidad de predicción muy superior a la que hasta la fecha se asociaba a los sistemas caóticos conservativos en mecánica clásica.

1 INTRODUCCIÓN: ¿HAY INCERTIDUMBRE EN MÉCANICA CLÁSICA?

La idea de incertidumbre en el campo de la física nos ha sido transmitida usualmente asociada a la mecánica cuántica, es decir, al estudio de la dinámica de lo infinitamente pequeño. En particular, el principio de incertidumbre de Heisenberg, enunciado en 1927, afirma que es imposible conocer con total precisión la posición y velocidad de una partícula, por ejemplo, un electrón o un protón. Por otra parte, casi siempre se ha dado por sentado el carácter predictivo y completamente determinista de la mecánica clásica, basada en las leyes de Newton de la dinámica.

Sin embargo, muchos sistemas dinámicos no lineales poseen la propiedad de la *dependencia sensible a las condiciones iniciales*, de modo que no resulta posible predecir su evolución a largo plazo, porque en la práctica siempre existen errores en la determinación de estas condiciones iniciales. Esto provoca una separación exponencial en el tiempo de las trayectorias, lo que lleva a la incertidumbre final. Es precisamente este tipo de movimiento el que recibe el nombre de *caótico*. La meteorología, el movimiento planetario, el funcionamiento del corazón, la dinámica neuronal o la electrónica son unos pocos ejemplos de la multitud de procesos naturales que pueden mostrar comportamiento caótico.

De hecho, el efecto de la dependencia sensible a las condiciones iniciales fue puesto de manifiesto en tiempos recientes por el físico alemán Max Born en un artículo escrito en 1955 titulado *Is Classical Mechanics in fact deterministic?* [1]. El modelo que tenía en mente, y que estudiaremos en este artículo, es el conocido gas de Lorentz bidimensional, propuesto por el físico holandés H. A. Lorentz (1853-1928) en 1905 [2] como modelo para la conductividad

de los metales. Se trata de un sistema dinámico muy inestable, donde una partícula se mueve entre un conjunto de obstáculos fijos circulares. Es claro que la menor de las desviaciones en las condiciones iniciales llevaría a un estado ulterior completamente diferente. Born concluyó que en realidad nos engañamos cuando hablamos de determinismo en mecánica clásica, porque no es posible determinar con absoluta precisión las condiciones iniciales de un sistema físico dado.

En este trabajo, prestamos atención a la *dispersión caótica*, que consiste en la interacción de una partícula con un sistema que la dispersa, de forma que las condiciones finales de velocidad y dirección de dicha partícula dependen sensiblemente de sus condiciones iniciales [3]. Un *sistema hamiltoniano* es aquél en el que se conserva la energía total, como ocurre en la mecánica celeste, por poner un ejemplo. Los sistemas donde por el contrario no se conserva la energía, porque existe algún tipo de rozamiento, son llamados *disipativos*. La dispersión caótica se asocia a la dinámica de *sistemas hamiltonianos abiertos* (también conocidos como sistemas hamiltonianos con escapes), y éstos son aquéllos en los que una partícula, que conserva la energía, puede tener un movimiento errático durante un tiempo dentro de una zona acotada llamada *región de dispersión*, hasta que finalmente escapa hacia el infinito atravesando una de las posibles salidas. Muchos estudios recientes se han centrado en estos sistemas, y la principal razón es que la dispersión caótica está siendo utilizada para modelizar numerosos fenómenos en campos muy distintos. Algunas aplicaciones a destacar son el análisis del escape de estrellas de potenciales galácticos [4, 5], la dinámica de iones atrapados en trampas electromagnéticas [6], la interacción entre la cola magnética de la Tierra y el viento solar [7], o algunas aplicaciones en el contexto de la relatividad general [8], por citar unas pocas.

Para estudiar la dinámica asociada a los sistemas hamiltonianos, es necesario utilizar una herramienta conocida como *cuenca de escape*. Las cuencas de escape de un sistema hamiltoniano abierto se definen como el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a órbitas que escapan del sistema por una determinada salida. Evidentemente, tendremos tantas cuencas de escape como salidas existan en el sistema, y éstas estarán separadas por una frontera. Esta frontera puede ser suave (de dimensión entera) o fractal (de dimensión no entera), como mostraron por vez primera S. Bleher *et al.* [9]. Si la frontera es fractal, la dinámica del sistema es en cierta medida impredecible, ya que la frontera que separa una cuenca de otra no está claramente definida.

A su vez, si trabajamos con sistemas disipativos, la herramienta fundamental es la *cuenca de atracción*. El término atractor ha levantado muchas discusiones sobre su significado preciso, y aún existen problemas a la hora de definirlo de forma rigurosa. Para un estudio exhaustivo del tema, conviene revisar [10, 11, 12]. Siguiendo [13], se puede definir un atractor como un conjunto cerrado A con las siguientes propiedades:

1. A es un conjunto invariante, es decir, toda trayectoria que comienza en A se mantiene en A para todo tiempo.
2. A atrae a un conjunto abierto de condiciones iniciales: existe un conjunto abierto U que contiene a A tal que si $x(0) \in U$, entonces la distancia de $x(t)$ a A tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto, A atrae a todas las órbitas que nacen suficientemente cerca de él. El mayor U que satisfaga esta condición se conoce como cuenca de atracción del atractor A .
3. A es minimal, es decir, no existe un subconjunto propio de A tal que satisfice las condiciones 1 y 2.

De forma aproximada, se puede decir que un atractor es el conjunto al que tienden todas las órbitas cercanas cuando $t \rightarrow \infty$, y su cuenca de atracción es el conjunto de puntos que, tomados como condiciones iniciales, convergen a A cuando t aumenta. Los sistemas hamiltonianos no tienen atractores, ya que éstos son incompatibles con la conservación de la energía. Sin embargo, las cuencas de escape definidas en sistemas hamiltonianos se pueden entender como cuencas de atracción en las que los atractores están colocados en el infinito.

En ciertos sistemas disipativos con una simetría muy determinada, es posible encontrar atractores cuyas cuencas de atracción cumplen la extraña propiedad de que tan cerca como se desee de *todos los puntos* que la forman existen puntos que pertenecen a otro atractor. Este tipo de cuenca es conocido como *cuenca agujereada* (*riddled basin*), ya que en cierta forma está agujereada por puntos de otra cuenca. Cuando todas las cuencas existentes en el espacio de fases están agujereadas por el resto, se dice que están *entremezcladas* (*intermingled basins*). Este resultado tan sorprendente sacó a la luz en el contexto de los sistemas disipativos la existencia de una incertidumbre desconocida hasta el momento, lo que llevó al desarrollo de intensos estudios de la materia tanto en el ámbito teórico como experimental [14, 15, 16, 17, 18]. Sin embargo, ninguno de estos trabajos ha analizado hasta ahora la posibilidad de encontrar un fenómeno semejante en el ámbito de los sistemas hamiltonianos, donde la energía es una constante y no hay atractores, y nuestro trabajo está dirigido en esta dirección.

Como ya hemos comentado, una herramienta útil para estudiar los sistemas hamiltonianos abiertos es el análisis de las cuencas de escape, y en este trabajo estudiamos exhaustivamente su evolución cuando el tamaño de las salidas disminuye y tiende a cero [19]. Hemos obtenido el siguiente resultado: en el límite de las salidas infinitamente pequeñas, los conjuntos invariantes del sistema, es decir, el conjunto caótico no atractivo y sus variedades estable e inestable, tienden a llenar físicamente la totalidad del espacio de fases. El conjunto caótico no atractivo está formado por un conjunto de medida de Lebesgue cero de órbitas inestables periódicas y aperiódicas, que no escapan de la región de dispersión ni cuando $t \rightarrow \infty$ ni cuando $t \rightarrow -\infty$. Su variedad estable contiene las órbitas que no escapan cuando $t \rightarrow \infty$, y este conjunto

coincide con la frontera entre cuencas. A su vez, su variedad inestable está formada por aquellas órbitas que no escapan cuando $t \rightarrow -\infty$. El conjunto caótico coincide con la intersección de sus variedades estable e inestable.

Una consecuencia directa de este fenómeno es que las cuencas de escape sufren una absoluta fractalización cuando las salidas se hacen muy pequeñas, convirtiéndose en un nuevo tipo de cuencas que nosotros hemos denominado *cuencas inciertas* por sus dramáticas consecuencias en la capacidad de predicción [19]. Nuestro resultado explica también la tendencia de la dimensión fractal de los tres conjuntos invariantes a alcanzar el valor de la dimensión del espacio de fases en semejante límite, conjetura propuesta en [20]. Las cuencas inciertas comparten con las cuencas agujereadas la propiedad de poseer en una bola de radio δ alrededor de *todo punto* de la cuenca, puntos que pertenecen a una cuenca distinta, siendo δ tan pequeña como queramos. Por lo tanto, nosotros defendemos en el presente trabajo que los sistemas hamiltonianos con escapes poseen una incertidumbre asociada mucho más fuerte de lo esperado, y que posibilita que en el límite de salidas infinitamente pequeñas un sistema totalmente determinista se vuelva en la práctica un proceso aleatorio.

2 INCERTIDUMBRE ABSOLUTA Y CUENCAS INCIERTAS EN SISTEMAS CON ESCAPES

2.1 EL MODELO DE LAS TRES BOLAS RÍGIDAS

Nuestro objetivo es estudiar de forma general el comportamiento de los sistemas hamiltonianos con escapes cuando el tamaño de sus salidas se hace muy pequeño.

El modelo que usamos es un simple billar bidimensional formado por tres bolas rígidas de radio R , colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $L > 2R$ (véase Fig. 1). Esta configuración define su región de dispersión como el área acotada entre los tres discos y el triángulo formado por sus centros, y posee tres salidas de tamaño $w = L - 2R$. Una órbita cualquiera pasará cierto tiempo rebotando elásticamente entre los tres discos, a velocidad constante, hasta que cruce una de las tres salidas de tamaño w y escape hasta el infinito. Este modelo fue estudiado en [21], extensamente analizado en los regímenes clásico, semiclásico y cuántico en [22] y examinado en el contexto de la difusión microscópica determinista en [23, 24]. Decidimos utilizar este modelo porque en nuestra búsqueda de universalidad, intentamos elegir el sistema hamiltoniano abierto más simple y general, y éste se ha convertido en un paradigma de la dispersión caótica de baja dimensión.

Hemos numerado los discos de la siguiente forma. El superior será el disco número 1, el de la izquierda el número 2 y el de la derecha el número 3. Las salidas las hemos numerado 1, 2 o 3 según el disco al que sean opuestas. Cabe destacar que el único parámetro que puede influir en el sistema es w/R . Por

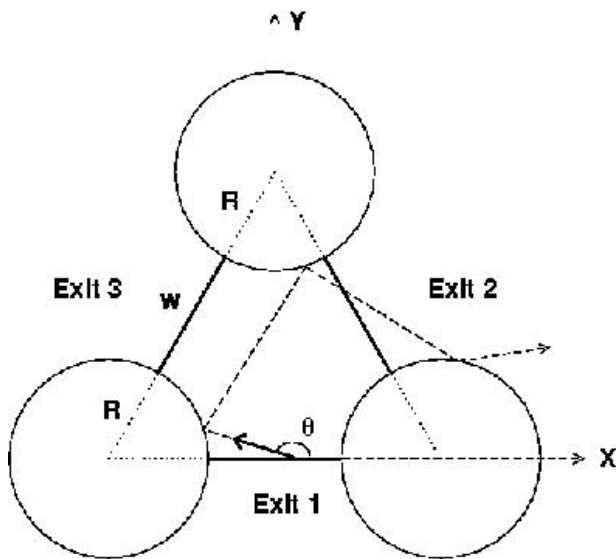


Figura 1: Esquema de la configuración de las tres bolas rígidas. El único parámetro que puede influir en el sistema es w/R , donde w representa el tamaño de las salidas y R el radio de los discos.

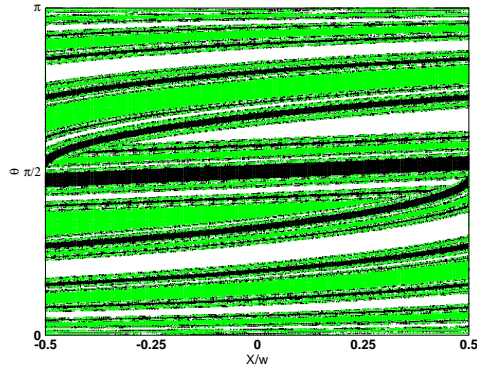


Figura 2: Diagrama de cuencas de escape para el sistema de las tres bolas rígidas, con 400×400 condiciones iniciales (x, θ) y $w = 0.2$. Las condiciones iniciales son dibujadas en negro si la órbita escapa por la salida 1, gris para la salida 2 y blanco para la salida 3.

esa razón, hemos fijado $R = 1$ y hemos variado el tamaño de las salidas w como parámetro de control del sistema.

2.2 CONSTRUYENDO LAS CUENCAS DE ESCAPE

El diagrama de cuencas de escape de un sistema hamiltoniano abierto nos aporta mucha información acerca de su comportamiento dinámico. Para construirlo hay que elegir una fina red de condiciones iniciales. Después, se resuelven computacionalmente las ecuaciones del movimiento del sistema para cada una de las condiciones iniciales, de forma que obtenemos las diferentes trayectorias de la partícula en función del tiempo. Cuando el sistema viene dado por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, que es lo más habitual, se resuelve numéricamente mediante el uso de un algoritmo típico (en general un Runge-Kutta de 4º orden puede valer) y un paso de integración suficientemente corto. En nuestro caso, gracias a la simplicidad de la configuración, podemos obtener las trayectorias mediante métodos geométricos y una computación básica. Sólo es necesario verificar que el avance de la trayectoria en cada paso sea muy inferior al radio de los discos R (para evitar errores numéricos en los rebotes) y también muy inferior al tamaño de las salidas w (para evitar errores en las salidas). La computación de cada condición inicial se acaba cuando la partícula escapa de la región de dispersión por una de sus tres salidas. Entonces, se pinta la condición inicial del color asociado a

dicha salida. Como cada diagrama necesita el cálculo de decenas de miles de órbitas, debe utilizarse una máquina potente y un lenguaje de programación suficientemente rápido. Todos nuestros códigos fueron escritos en C.

La Fig. 2 muestra el diagrama de cuencas de escape para el sistema, cuando $w = 0.2$, es decir, cuando la salida tiene un tamaño igual a la quinta parte del radio R de los discos. Esta vez, el código de colores es negro para la salida 1, gris para la salida 2 y blanco para la salida 3. Hemos decidido lanzar las órbitas desde la recta horizontal que delimita la salida 1, y con todos los ángulos posibles para los que la partícula entra en la región de dispersión. Por lo tanto, las condiciones iniciales son $y = 0$, $x \in (-w/2, w/2)$ y $\theta \in (0, \pi)$, donde θ es el ángulo de disparo y está medido desde el eje positivo de las x en el sentido contrario a las agujas del reloj. En el diagrama de cuencas de escape queda evidente que el sistema es claramente fractal, ya que las fronteras de las cuencas son una mezcla *rugosa* de los tres colores. Hemos medido su fractalidad calculando su dimensión de incertidumbre [25], y el resultado fue $d = 2.62 \pm 0.02$ para $w = 0.2$ (donde $d = 2$ significa no fractalidad y $d = 3$ fractalidad absoluta). Además, estas cuencas también poseen la propiedad de Wada [26, 27]. Una cuenca B verifica la propiedad de Wada si cualquier condición inicial que se encuentra en la frontera de una cuenca está a la vez en la frontera de otras dos cuencas (o más). En otras palabras, todo conjunto abierto centrado en un punto x que pertenezca a una frontera Wada tiene una intersección no nula con al menos tres cuencas distintas.

Las cuencas fractales aparecen tanto en los sistemas hamiltonianos como disipativos, y están compuestas de conjuntos abiertos separados por fronteras que no son suaves. Los problemas de predicción aparecen únicamente cuando nuestra precisión experimental es menor que la distancia entre la condición inicial y la frontera fractal. Es fundamental, por lo tanto, destacar el hecho de que existen en la Fig. 2 grandes regiones suaves de color negro, gris y blanco que pertenecen al interior de las cuencas, y que por lo tanto no presentan dificultad a la hora de predecir la salida por la que escapará la partícula. A ese tipo de regiones suaves, a partir de ahora las conoceremos como regiones *seguras* [28].

2.3 ¿QUÉ OCURRE SI DISMINUIMOS EL TAMAÑO DE LAS SALIDAS?

Con el fin de estudiar la evolución de la incertidumbre asociada al sistema cuando el tamaño de las salidas w es reducido de forma arbitraria, hemos dibujado en la Fig. 3(a) la dependencia de las cuencas de escape con w . La partícula es siempre lanzada desde $(x = 0, y = 0)$, y el rango de ángulos de disparo es $\theta \in (0, \pi)$. Esto corresponde a una “rodaja 1D” de condiciones iniciales (la línea vertical $x = 0$ de la Fig. 2), y la hemos representado para un rango de tamaños de las salidas $w \in (0, 0.2)$. En esta figura queda claro que las fronteras fractales crecen indefinidamente, mientras que los conjuntos abiertos de las tres cuencas (las regiones seguras) disminuyen y tienden a desaparecer en el límite $w \rightarrow 0$. En cualquier caso, con el fin de aportar una evidencia

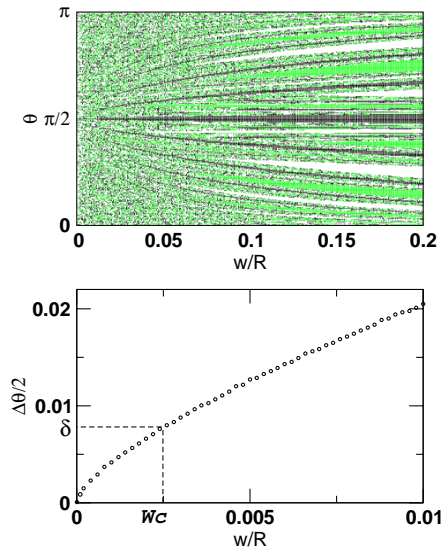


Figura 3: (a) Evolución del diagrama de cuencas de escape para el sistema de las tres bolas rígidas, cuando se varía el tamaño de las salidas w . Las condiciones iniciales son $(x = 0, y = 0)$ y $\theta \in (0, \pi)$. La salida 1 la hemos representado de color negro, la salida 2 de color gris y la salida 3 de color blanco. (b) Semianchura angular del conjunto abierto de condiciones iniciales más grande del espacio de fases, para valores pequeños del tamaño de las salidas w .

más clara de este hecho, hemos calculado para valores de w cercanos a cero la semianchura angular $\Delta\theta/2$ del conjunto abierto de color negro que pertenece a la cuenca 1 y se encuentra alrededor de $\theta = \pi/2$ en la Fig. 3 (a). Hemos elegido esta región segura porque para aproximadamente $w < 0.1$ se vuelve el conjunto abierto más grande de todo el espacio de fases. Esto lo mostramos en la Fig. 3(b), y claramente confirma que el tamaño del conjunto conexo, abierto y *seguro* más grande del espacio de fases realmente tiende a cero cuando w tiende a cero. Por supuesto, el mismo resultado es aplicable al resto de los conjuntos abiertos del espacio de fases, ya que son todos menores que éste.

Así como los conjuntos abiertos tienden a desaparecer, las fronteras fractales que los delimitan crecen indefinidamente en el límite. De esta forma, las cuencas fractales de este sistema tienden a convertirse en un nuevo tipo de cuenca, absolutamente fractalizada, que nosotros hemos denominado *cuenca incierta* [19] por sus limitaciones severas a la capacidad de predicción, muy superiores a las de una cuenca meramente fractal.

2.4 ALCANZANDO LA INCERTIDUMBRE ABSOLUTA: LAS CUENCAS INCIERTAS

Con el objetivo de dar una idea visual de estas cuencas inciertas, la Fig. 4 (a) muestra las cuencas de escape del sistema para un valor muy pequeño del tamaño de las salidas w , en particular $w = 0.001$. Las Fig. 4 (b), (c) y (d) muestran por separado las cuencas 1, 2 y 3, respectivamente. Como era de esperar, las cuencas han perdido la estructura que poseían en la Fig. 2, donde $w = 0.2$, y ahora ya no se observan conjuntos abiertos de condiciones iniciales. El dibujo es una mezcla de puntos pertenecientes a las tres cuencas. Si comparamos estas figuras con el diagrama de cuencas de escape para $w = 0.2$ en Fig. 2, se aprecia sin dificultad el crecimiento imparable de la región fractal, así como la tendencia de cada cuenca a convertirse en su propia frontera cuando w disminuye. La dimensión fractal calculada como dimensión de incertidumbre para este valor de $w = 0.001$ es $d = 2.998 \pm 0.005$. Teniendo en cuenta que cuando la totalidad del espacio de fases está fractalizado se cumple que $d = 3$, queda patente la inmensa fractalización de las cuencas inciertas.

Cada píxel en las Fig. 4(b), (c) y (d) tiene un tamaño vertical de $\Delta\theta = \pi/200 = 0.016$ (aproximadamente 0.9°), y apoyándonos en Fig. 3(b), el conjunto abierto más grande en el espacio de fases para ese valor de w tendrá un diámetro vertical de aproximadamente $\Delta\theta = 0.008$. Por lo tanto, se puede asegurar que todos los conjuntos abiertos son más pequeños que un píxel de las Fig. 4(b), (c) y (d). Si la resolución de nuestro experimento coincidiera con la de este dibujo, nuestro diagrama de cuencas de escape no proporcionaría ninguna información acerca del futuro del sistema. Lo único que sabríamos es que por una cuestión de simetría cada condición inicial tiene una probabilidad $1/3$ de alcanzar cada salida.

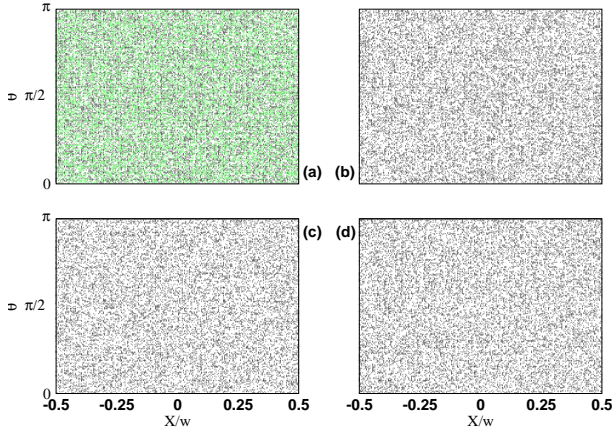


Figura 4: (a) Diagrama de cuencas de escape para la configuración de las tres bolas rígidas, con 200×200 condiciones iniciales (x, θ) y $w = 0.001$. La cuenca 1 es representada en negro, la cuenca 2 en gris, y la cuenca 3 en blanco. (b), (c) y (d) Cuencas de escape 1, 2 y 3 respectivamente. Las tres cuencas tienden a confundirse con su propia frontera y a llenar la totalidad del espacio de fases cuando el tamaño de las salidas w disminuye.

2.5 EXISTENCIA Y NATURALEZA DE LAS CUENCAS INCIERTAS

Las evidencias computacionales obtenidas nos llevan al siguiente resultado:

Para todos los puntos P de las cuencas de escape de un sistema hamiltoniano abierto, y para toda $\delta > 0$ (la precisión del experimento), existe un tamaño crítico de las salidas $w_c > 0$ tal que para todo $w \leq w_c$ podemos encontrar un punto P' en una bola centrada en P y de radio δ que pertenece a una cuenca distinta a la que pertenece P . (Véase Fig. 3(b)).

Todo experimento real o numérico tiene asociada a la selección de condiciones iniciales una precisión finita inevitable. Nuevas técnicas o instrumentos más desarrollados podrán aumentar la precisión, pero jamás convertirán una condición inicial en algo infinitamente preciso [18, 29]. Por esta razón, dado un δ finito, arbitrariamente pequeño, podemos asegurar que si el tamaño de las salidas es suficientemente pequeño, todos los conjuntos abiertos con puntos de una cuenca determinada (es decir, las regiones seguras) serán menores que ese valor umbral. Por eso, no podremos asegurar a qué cuenca pertenece ningún punto, y por lo tanto careceremos de información acerca de su futuro comportamiento. El hecho fundamental es que *esta incertidumbre total se aplica*

a todos los puntos de las cuencas de escape. En definitiva el análisis de las cuencas de escape se vuelve una herramienta inútil.

Además, la tendencia de la dimensión fractal de los conjuntos invariantes a la dimensión del espacio de fases cuando el tamaño de las salidas tiende a cero, se explica claramente como un corolario de nuestros resultados. La *dimensión de incertidumbre* [25] se calcula como una función de la variación del número de *órbitas inciertas* cuando se va variando la densidad de la red de condiciones iniciales. Las órbitas inciertas se definen como aquéllas que tienden a una salida distinta a la de sus más cercanas vecinas en la red. Si el tamaño de todos los conjuntos abiertos en el diagrama de cuencas de escape tiende a cero, todos los puntos en el espacio de fases de escape pasarán a ser inciertos a todas las escalas, haciendo que la dimensión de la variedad estable del conjunto caótico invariante tienda a su máximo valor, que coincide con el del espacio de fases. Por extensión, lo mismo ocurrirá con la variedad inestable, que es su simétrica, y el conjunto caótico, que es la intersección de los dos anteriores. Además, el exponente de incertidumbre α se define como $\alpha = D - d$, donde D es la dimensión del espacio de fases y d la dimensión de incertidumbre. Por esta razón, el exponente de incertidumbre α de una cuenca incierta debe tender a cero en el límite del tamaño cero de las salidas.

2.6 COMPARATIVA ENTRE LAS CUENCAS INCIERTAS Y LAS CUENCAS AGUJEREADAS

Con el fin de comparar este nuevo fenómeno en sistemas hamiltonianos con el ya conocido de las cuencas agujereadas en sistemas disipativos (presentadas en la *Introducción*), puede sernos útil observar las cuencas inciertas de Fig. 4 y las cuencas agujereadas de la Fig. 5 (obtenida esta última de <http://www.mpi-dortmund.mpg.de/departments/swo/markus>). Una cuenca agujereada es aquella en la que todos los puntos tienen puntos de otra cuenca tan cerca como se desee. Coincide con su propia frontera, y como consecuencia las cuencas agujereadas no poseen conjuntos abiertos. Desde un punto de vista práctico, las semejanzas entre las cuencas agujereadas en sistemas disipativos y las cuencas inciertas en sistemas hamiltonianos son sorprendentes. Como ya se comentó, podemos encontrar siempre un valor umbral para el tamaño de las salidas por debajo del cual podemos estar seguros de que los conjuntos abiertos (o el interior) de las cuencas inciertas son más pequeños que la precisión inevitable del experimento. Por esa razón, para una precisión finita, tan pequeña como queramos, no hay forma física de distinguir los conjuntos abiertos de las cuencas inciertas de los puntos totalmente desconexos de las cuencas agujereadas. De hecho, hemos mostrado que la dimensión de incertidumbre de las cuencas inciertas tiende a la del espacio de fases (o el exponente de incertidumbre α tiende a cero, como se prefiera), que es el valor que se esperaría de una cuenca agujereada típica. Por ejemplo, para el caso de la configuración triangular con $w = 0.001$, el exponente de incertidumbre es $\alpha = D - d = 0.002 \pm 0.005$, donde D es la dimensión del espacio de fases (3 en

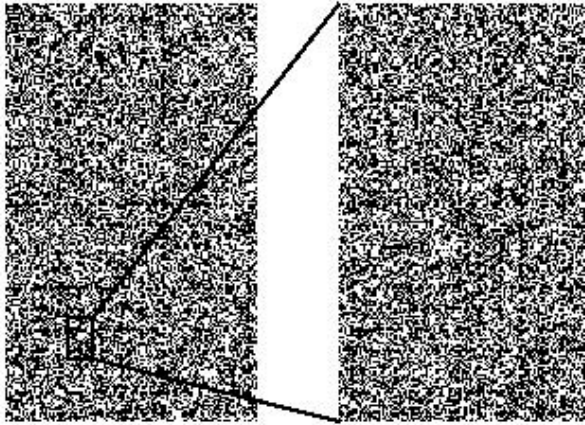


Figura 5: Una cuencas agujereada (o riddled) no tiene en su interior conjuntos abiertos, no importa lo mucho que aumentemos su estructura. (Figura obtenida de <http://www.mpi-dortmund.mpg.de/departments/swo/markus>)

nuestro caso). Este resultado coincide muy bien con lo expuesto en [18, 29], donde se enfatiza que el exponente de incertidumbre $\alpha \approx 0$ para las cuencas agujereadas, y algunos valores recogidos en la literatura son $\alpha = 0.017$ [16], $\alpha = 0.003$ [30] y $\alpha = 0.0089$ [31].

Por otro lado, existe una diferencia matemática básica entre ambos conceptos, que nos ha llevado a proponer el nombre de cuencas inciertas para este fenómeno, en lugar de presentarlo como el primer ejemplo de cuencas agujereadas en sistemas hamiltonianos. Se trata del hecho de que, desde un punto de vista formal, las cuencas inciertas no coinciden exactamente con su propia frontera, ya que sus conjuntos abiertos son tan pequeños como queramos pero en definitiva de medida positiva. En el límite de $w = 0$ (cuando las salidas desaparecen), el tamaño de estos conjuntos es estrictamente cero, pero entonces las cuencas 1, 2 y 3 desaparecen y la medida Lebesgue del conjunto caótico sufre un salto discontinuo de 0 a un valor positivo, la medida del espacio de fases. En cierta manera, la transición entre un sistema hamiltoniano abierto y cerrado se puede entender como una bifurcación en la cual el conjunto caótico invariante súbitamente llena la totalidad del espacio de fases, haciendo imposible el escape de cualquier partícula.

3 PERSPECTIVAS FUTURAS

Con respecto a la naturaleza de las cuencas inciertas, un paso muy interesante sería comprobar su existencia experimental. Nosotros creemos que no

debería ser especialmente dificultoso llevar esto a cabo haciendo uso de un sistema óptico, basado en un montaje de espejos curvos formando un triángulo. Por ejemplo, en [32] se presentó recientemente una verificación experimental “casera” de la propiedad de Wada, basada en la reflexión de luz de diferentes colores por cuatro bolas de navidad formando un tetraedro. Este trabajo fue de hecho portada de la revista *Nature*.

Somos más cautos a la hora de plantear la posibilidad de que los fenómenos que presentamos en este trabajo sean demostrados rigurosamente. No descartamos, sin embargo, que el estudio matemático de estos procesos pueda arrojar luz sobre algunos de sus puntos más oscuros.

AGRADECIMIENTOS. Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, a través del proyecto BFM2003-03081.

REFERENCIAS

- [1] M. BORN, ‘Ist die klassische Mechanik tatsächlich deterministisch?’, *Physicalische Blätter* **11** (1955) 49.
- [2] H. A. LORENTZ, ‘The motion of electrons in metallic bodies’, I, II, and III, *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, Section of Sciences **7** (1905), 438–453, 585–593, 684–691.
- [3] S. BLEHER, C. GREBOGI, AND E. OTT, ‘Bifurcation to chaotic scattering’, *Physica D* **46** (1990) 87.
- [4] G. CONTOPOULOS, H. E. KANDRUP, AND D. KAUFMAN, ‘Fractal properties of escape from a two-dimensional potential’, *Physica D* **64** (1993) 310.
- [5] G. CONTOPOULOS, ‘Asymptotic curves and escapes in Hamiltonian systems’, *Astronomy and Astrophysics* **231** (1990) 41.
- [6] G. Z. K. HORVATH, J. L. HERNÁNDEZ POZOS, K. DHOLAKIA, J. RINK, D. M. SEGAL, AND R. C. THOMPSON, ‘Ion dynamics in perturbed quadrupole ion traps’, *Phys. Rev. A* **57** (1998) 1944.
- [7] J. CHEN, J. L. REXFORD, AND Y. C. LEE, ‘Fractal boundaries in magnetotail particle dynamics’, *Geophys. Res. Lett.* **17** (1990) 1049.
- [8] K. VESELÝ AND J. PODOLSKÝ, ‘Chaos in a modified Hénon-Heiles system describing geodesics in gravitational waves’, *Phys. Lett. A* **271** (2000) 368.
- [9] S. BLEHER, C. GREBOGI, E. OTT, AND R. BROWN, ‘Fractal boundaries for exit in Hamiltonian dynamics’, *Phys. Rev. A* **38** (1988) 930.
- [10] J. GUCKENHEIMER AND P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations in Vector Fields*, Springer, New York, 1983.
- [11] J.-P. ECKMANN AND D. RUELLE, ‘Ergodic theory of chaos and strange attractors’, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 617.

- [12] J. MILNOR, 'On the concept of attractor', *Commun. Math. Phys.* **99** (1985) 177.
- [13] S. H. STROGATZ, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, 1994.
- [14] J. C. ALEXANDER, J. A. YORKE, Z. YOU, and I. Kan, 'Riddled basins', *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **2** (1992) 795.
- [15] J. C. SOMMERER AND E. OTT, 'A physical system with qualitatively uncertain dynamics', *Nature* **365** (1993) 138.
- [16] E. OTT, J. C. SOMMERER, J. C. ALEXANDER, I. KAN, AND J. A. YORKE, 'Scaling behavior of chaotic systems with riddled basins', *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 4134.
- [17] J. F. HEAGY, T. L. CARROLL, AND L. M. PECORA, 'Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems', *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 3528.
- [18] M. WOLTERING AND M. MARKUS, 'Riddled-like basins of transient chaos', *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 630.
- [19] J. AGUIRRE AND M. A. F. SANJUÁN, 'Limit of small exits in open Hamiltonian systems', *Phys. Rev. E* **67** (2003) 056201.
- [20] A. P. S. DE MOURA AND P. S. LETELIER, 'Fractal basin boundaries in Hénon-Heiles and other polynomial potentials', *Phys. Lett. A* **256** (1999) 362.
- [21] B. ECKHART, 'Fractal properties of scattering singularities', *J. Phys. A* **20** (1987) 5971.
- [22] P. GASPARD AND S. A. RICE, 'Scattering from a classically chaotic repeller', *J. Chem. Phys.* **90** (1989) 2225, (1989) 2243, (1989) 2255.
- [23] B. NOBBE, 'Classical motion in two-dimensional crystals', *J. Stat. Phys.* **78** (1995) 1591.
- [24] R. KLAGES AND C. DELLAGO, 'Density-dependent diffusion in the periodic Lorentz Gas', *J. Stat. Phys.* **101** (2000) 145.
- [25] S. W. MCDONALD, C. GREBOGI, E. OTT AND J. A. YORKE, 'Fractal basin boundaries', *Physica D* **17** (1985) 125.
- [26] L. POON, J. CAMPOS, E. OTT, AND C. GREBOGI, 'Wada basin boundaries in chaotic scattering', *Int. J. Bifurcation and Chaos* **6** (1996) 251.
- [27] J. AGUIRRE, J. C. VALLEJO AND M. A. F. SANJUÁN, 'Wada basins and chaotic invariant sets in the Hénon-Heiles system', *Phys. Rev. E* **64** (2001) 066208.
- [28] J. SOMMERER, 'The end of classical determinism', *Johns Hopkins APL Tech. Dig.* **16** (1995) 4, 333.
- [29] M. SCHMICK, E. GOLES, AND M. MARKUS, 'Intermingled basins due to finite accuracy', *Phys. Rev. E* **62** (2000) 397.
- [30] Y.-C. LAI AND C. GREBOGI, 'Intermingled basins and two-state on-off intermittency', *Phys. Rev. E* **52** (1995) 3313.

- [31] M. WOLTERING AND M. MARKUS, 'Riddled basins of coupled elastic arches', *Phys. Lett. A* **260** (1999) 453.
- [32] D. SWEET, E. OTT AND J. A. YORKE, 'Escaping chaotic scattering', *Nature* **399** (1999) 315.

Jacobo Aguirre
Miguel A. F. Sanjuán
Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos
Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza
Universidad Rey Juan Carlos, Tulipán s/n, 28933
Móstoles, Madrid
Correo electrónico: jacobo.aguirre@urjc.es, miguel.sanjuan@urjc.es