Miguel de Guzmán: del Análisis Armónico a la Teoría Geométrica de la Medida y los Fractales[1]

por

Miguel Ángel Martín, Manuel Morán y Miguel Reyes

Como es sabido, la mayor parte del trabajo de investigación de Miguel de Guzmán tuvo lugar en Análisis Armónico. Cuando se incorporó a la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid en el año 1969, Miguel de Guzmán formó un grupo de investigación muy activo en dicho área, más concretamente en Diferenciación de Integrales, en cuyo marco se realizaron importantes investigaciones y varias tesis, cuyos resultados se incorporaron a las dos monografías que Miguel escribió sobre el tema: *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$ (Springer-Verlag, 1975) y *Real variable methods in Fourier Analysis* (North-Holland, 1981).

Los problemas que allí se estudiaban estaban impregnados de un gran contenido geométrico. La transición del Análisis Armónico a la Teoría Geométrica de la Medida, durante la que realizamos nuestras tesis bajo la dirección de Miguel, coincidió en el tiempo con su breve estancia en la Universidad Autónoma y su vuelta a la Complutense. En este artículo pretendemos dar una panorámica de la investigación realizada durante ese periodo y su vínculo con la precedente.

Además de ser testigos de su conocido buen hacer y humanidad nos beneficiamos de su buen gusto por la Matemática como todos los estudiantes que han tenido la suerte de estar a su lado. Pero en nuestro caso particular a ello hay que añadir el ser beneficiarios de su sensibilidad y capacidad para rescatar estudiantes fuera de la ortodoxia curricular al uso, sin ningún vínculo con la universidad y con la única carta de presentación que era nuestro entusiasmo por la matemática propiciado por la seducción intelectual del gran maestro que fue Miguel. Queremos dejar patente nuestra gratitud por haber tenido la suerte de estar a su lado durante estos años. Si somos capaces de transmitir una pequeña parte de su influencia, a buen seguro que nuestros estudiantes se beneficiarán.

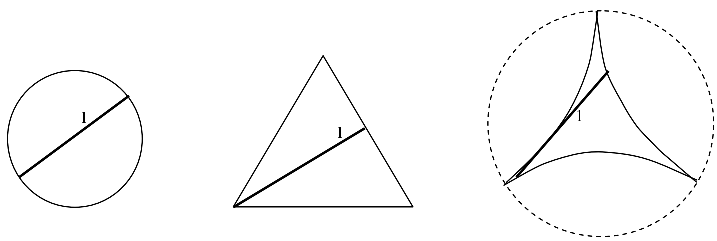
[1] Agradecemos a la dirección de La Gaceta de la RSME por darnos la oportunidad de escribir este artículo sobre nuestro profesor, maestro y amigo Miguel de Guzmán. Gracias a él tuvimos la posibilidad de iniciarnos en la investigación matemática desde nuestra docencia en bachillerato y acceder a una forma distinta de entender y transmitir la matemática.

1 Conjuntos de geometría extraña en el Análisis Armónico

Relacionados con ciertos problemas en Análisis Armónico aparecen conjuntos con propiedades curiosas aparentemente paradójicas. Veamos a continuación algunos de estos.

Kakeya, matemático japonés, planteó en el año 1917 el problema de hallar el área mínima que barre en el plano una segmento de longitud 1 al dar la vuelta completa (girar 180°). Obviamente, y sin pensar mucho, el segmento puede dar la vuelta en un círculo con centro en su punto medio y cuyo área es $\frac{\pi}{4} \simeq 0,78$.

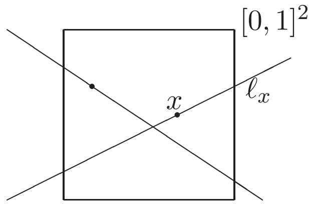
Pensando un poco más, también la puede dar en un triángulo equilátero de altura unidad, cuyo área es $\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58$. Un poco más difícil es observar que el segmento puede girar 180° en el interior de la curva descrita por un punto de una circunferencia de radio 1/4 al girar interiormente sobre la circunferencia de radio 3/4. Esta curva se llama hipocicloide y el área encerrada en su interior es $\frac{\pi}{8} \simeq 0,39$.



Círculo $A = \frac{\pi}{4}$; 0,78 — Triángulo $A = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 0,58 — Hipocicloide $A = \frac{\pi}{8}$; 0,39

Durante algunos años se pensó que el área encerrada en el interior de la hipocicloide era el área mínima que resolvía el problema de Kakeya. Sin embargo, en 1927, A.S. Besicovitch demostró que un segmento de longitud 1 podía dar la vuelta dentro de un conjunto de área tan pequeña como se quiera (véase [1]). Su demostración se basa en subdividir un triángulo equilátero de lado unidad en triángulos con vértices superiores y bases en el vértice superior y base, respectivamente, del triángulo original, y desplazándolos posteriormente hasta obtener suficiente solapamiento.

En 1927, Nikodym construyó en [20] un conjunto que llenaba en medida el cuadrado unidad y desde cuyos puntos se puede acceder linealmente al exterior, es decir, mediante rectas que no encuentran a puntos del conjunto. Dicho de otra manera, el conjunto de Nikodym es un conjunto que llena el cuadrado unidad con la propiedad de que por todos sus puntos pasa una recta que sólo lo corta en dicho punto.



Conjunto de Nikodym: $N \subset [0,1]^2$

$L^2(N) = L^2([0,1]^2) = 1$

$x \in N \implies N \cap \ell_x = \{x\}$

Miguel siempre gustaba de poner ejemplos geométricos de todas las ideas y conceptos matemáticos para hacerlos más "visibles" a la mente. En sus propias palabras, el conjunto de Nikodym refuerza la idea de que no podemos fiarnos de aquel vendedor de una empresa inmobiliaria que nos vende un chalet de una urbanización en la playa con el argumento de que "desde todos los puntos de todos los chalets se ve el mar", pues puede tratarse de un conjunto de Nikodym y que los chalets llenen la urbanización sin dejar espacios libres.

2 Luz sobre los monstruos: La teoría de Besicovitch

Los conjuntos anteriores, y otros de naturaleza análoga, juegan un papel importante en la teoría de diferenciación de integrales. Motivado por ello Miguel de Guzmán propuso, al grupo de investigación que dirigía, la tarea de estudiar lo que en ese momento se conocía sobre conjuntos con esas propiedades aparentemente paradójicas. Para ello tuvo que recurrir a sus orígenes en los artículos pioneros de Besicovitch de los años 1928, 1929, 1938, 1939 y 1964 [2, 3, 4, 5, 6], donde se encuentran las ideas seminales de lo que hoy día llamamos Teoría Geométrica de la Medida y que, como veremos, arrojan luz que ayuda a entender la naturaleza de monstruos geométricos, como el conjunto de Nikodym, y otros bien conocidos desde finales del siglo XIX, como la curva de Koch o el triángulo de Sierpinski. Fruto de esta línea de investigación fue la tesis doctoral de Antonio Casas, leída en 1978 con el título *Aplicaciones de la Teoría de Medida Lineal*, que recogía una exposición simplificada de dichos trabajos y varias aplicaciones de los mismos en Teoría de Diferenciación de Integrales y otras ramas del Análisis.

A continuación resumimos muy brevemente los resultados fundamentales de la teoría de Besicovitch en el plano, cuyo objetivo es estudiar las propiedades geométricas y dar una teoría de estructura de los conjuntos planos de medida Lebesgue cero.

Estableceremos primero algunos conceptos preliminares, que referiremos al plano $\mathbb{R}^2$ para ser más concretos. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, para $x, y \in \mathbb{R}^2$, y sea $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$ el *diámetro* del conjunto no vacío $U \subset \mathbb{R}^2$. En 1919, generalizando una idea de Caratheodory, Hausdorff introdujo las medidas que llevan su nombre y que consisten en recubrir el conjunto a medir mediante conjuntos arbitrarios de diámetro pequeño, evaluando las potencias s-ésimas, $0 \le s \le 2$, de sus diámetros, para después hallar el límite cuando esos diámetros tienden a cero. Más concretamente, para cada $0 \leq s \leq 2$ y $A \subset \mathbb{R}^2$ se define su *medida s-dimensional de Hausdorff* como:

$$H^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} |U_i|^s \ : \ A \subset \bigcup_{i \geq 1} U_i, \ |U_i| \leq \delta \right\}$$

Dentro de estas medidas de Hausdorff hay medidas ya conocidas. Así, la medida H^0 de un conjunto es su cardinal, y la H^2 es proporcional a la medida plana de Lebesgue. La medida H^1 de una curva rectificable es su longitud. Además, para cada conjunto del plano sólo hay una medida de Hausdorff que lo puede medir adecuadamente, es decir, dado $A \subset \mathbb{R}^2$ existe un único número $0 \leq s \leq 2$, llamado *dimensión de Hausdorff*, tal que:

$$H^t(A) = \begin{cases} \infty & , \text{si } 0 \leq t < s \\ 0 & , \text{si } s < t \leq 2 \end{cases}$$

La dimensión de Hausdorff s proporciona la medida H^s adecuada para medir el conjunto.

Para medir la concentración de puntos de un conjunto en las proximidades de un punto dado se recurre al concepto de densidad, comparando la medida del conjunto que hay en cada bola centrada en el punto con su diámetro. Más concretamente, se define la *densidad* del conjunto A, de dimensión de Hausdorff s, en el punto x como:

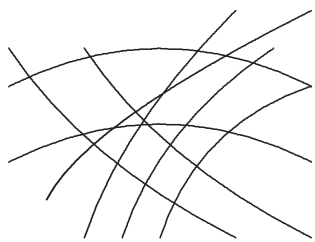
$$D^s(A, x) = \lim_{r \to 0} \frac{H^s\left(A \cap B(x, r)\right)}{(2r)^s}$$

cuando dicho límite existe. Cuando no existe, los límites superior e inferior se llaman, respectivamente, *densidad superior* y *densidad inferior*.

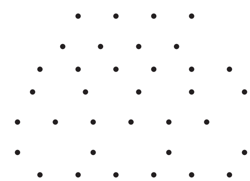
Un problema fundamental de la Teoría Geométrica de la Medida, en el caso de los conjuntos del plano, consiste en estudiar los conjuntos de medida Lebesgue cero, entre los que están todos aquellos cuya dimensión de Hausdorff es menor que 2. En particular, Besicovitch dedicó buena parte de sus investigaciones a estudiar los conjuntos planos de dimensión de Hausdorff 1, llamados linealmente medibles, probando que todo conjunto se puede descomponer en la unión de dos conjuntos llamados, respectivamente, regular e irregular y que manifiestan propiedades geométricas diametralmente opuestas.

- Un conjunto *regular* tiene densidad 1 en cada uno de sus puntos, está contenido en una unión numerable de curvas rectificables y se comporta, por tanto, geométricamente como ellas: tiene tangente en casi todos sus puntos y proyecta con medida (longitud) positiva en casi todas las direcciones.

- Un conjunto *irregular* tiene densidad inferior menor que 1 en cada uno de sus puntos e interseca con medida (longitud) cero a todas las curvas rectificables. Sus propiedades resultan ser opuestas a las curvas rectificables: en casi ningún punto tiene tangente y proyecta con medida (longitud) cero en casi todas sus direcciones.



Conjunto regular



Conjunto irregular

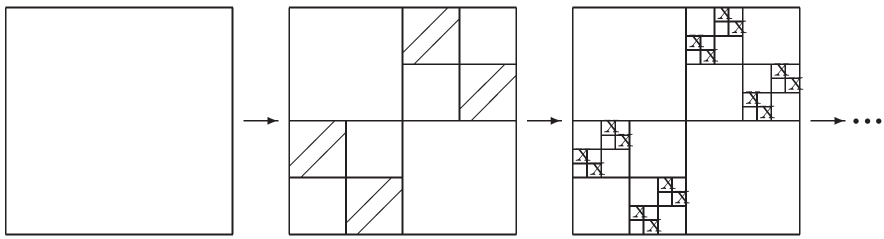
Cabe destacar el contraste entre la naturalidad y simplicidad de los resultados anteriores y la profundidad de los mismos que suponen, en opinión de reputados matemáticos, un lugar especial en las matemáticas de todo el siglo XX.

Miguel de Guzmán dedicó el capítulo 9 de su libro *Real variable methods in Fourier Analysis* (North-Holland, 1981) al estudio de la geometría de los conjuntos linealmente medibles y algunas aplicaciones, entre las que cabe destacar la elegante construcción del conjunto que veremos a continuación. En su introducción habla de la "belleza" y del "prometedor futuro" de esta rama de las matemáticas. La posterior explosión de la Geometría Fractal y sus innumerables aplicaciones son una muestra de cómo la intuición de Miguel se adelantó una vez más al tiempo que le tocó vivir.

En su libro Real variable methods in Fourier Analysis *habla de la "belleza" y del "prometedor futuro" de la geometría de los conjuntos linealmente medibles. La explosión de la Geometría Fractal es una muestra de cómo la intuición de Miguel se adelantó una vez más al tiempo que le tocó vivir.*

El conjunto de Besicovitch es un conjunto plano de área nula que contiene rectas en todas las direcciones, a partir del cuál se puede demostrar que no existe un conjunto de Nikodym que llena el plano. El aspecto nuevo a destacar es el papel que juega la teoría de Besicovitch esclareciendo la conexión entre este conjunto de rectas y un conjunto de puntos linealmente medible e irregular asociado a él mediante dualidad, ayudando a entender así la naturaleza extremadamente compleja de ese tipo de conjuntos paradójicos.

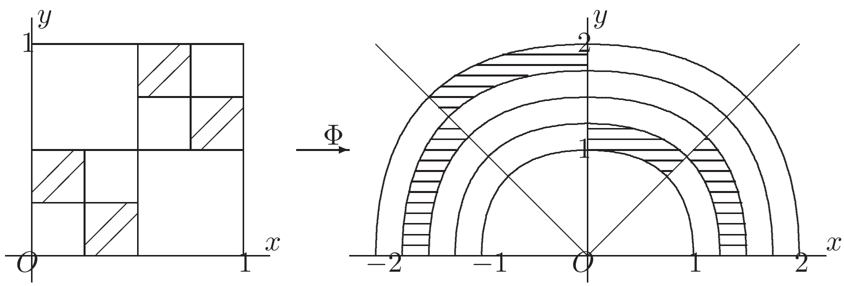
Para la construcción del conjunto se parte del cuadrado unidad (de lado 1) que se divide en 16 cuadrados iguales y se seleccionan los 4 cuadrados cerrados rallados de la figura. Si se repite el mismo proceso indefinidamente a escala, sobre cada uno de los cuadrados que se van obteniendo, se obtiene el *conjunto de Besicovitch*. Los primeros pasos de la construcción se ilustran en la siguiente figura:



El conjunto de Besicovitch $B \subset [0,1]^2$ es un conjunto linealmente medible (de dimensión de Hausdorff 1) irregular que se transforma mediante la aplicación $\Phi : B \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por:

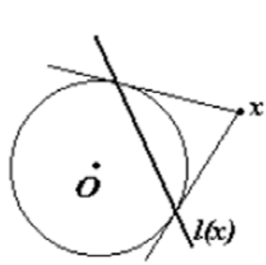
$$\Phi(x,y) = ((1+x)\cos \pi y,\ (1+x)\sin \pi y)$$

que es lipschitziana, en otro conjunto $\Phi(B)$ con las mismas propiedades geométricas, ya que también es linealmente medible e irregular. En la siguiente figura se puede visualizar dicho conjunto en su primer paso de construcción:



Para cada punto $x \in \Phi(B)$ se considera su recta polar $\ell(x)$ que se obtiene como se indica en la figura al margen.

La recta polar de un punto es perpendicular a la recta que pasa por el origen y por el punto, y en cada recta que pasa por el origen hay un punto de $\Phi(B)$. Por tanto, en el conjunto de rectas polares del conjunto $\Phi(B)$, que se representa por $p(\Phi(B))$, hay rectas en todas las direcciones, y se puede demostrar que es linealmente medible e irregular.



3 El grupo de Teoría Geométrica de la Medida

En septiembre de 1982 comenzó uno de los importantes proyectos de Miguel de Guzmán, *los cursos de verano de Jarandilla de la Vera*, a los que Miguel Ángel Martín y Miguel Reyes tuvieron el placer de poder asistir. Estos cursos se organizaron durante varios años con el patrocinio de la Asociación Matemática Española, que presidía Miguel, y la Universidad de Extremadura. Al término de estos cursos, entusiasmados por el espíritu de trabajo e investigación que allí se respiraba, hablaron con Miguel sobre la posibilidad de trabajar con él.

A pesar de que su trabajo en el Instituto limitaba el tiempo que podían dedicar a la investigación, fueron amablemente recibidos y animados por Miguel, que les propuso comenzar a trabajar en ese curso 82/83. Las reuniones semanales del grupo comenzaron en el destino que estrenaba Miguel, en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid, y continuaron, a partir del curso 84/85, en el Departamento de Análisis Matemático de la Facultad de Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid.

Manuel Morán, entonces también profesor de Instituto, conoció a Miguel de Guzmán en un curso de doctorado que éste organizaba sobre los grandes problemas de la matemática clásica, cuya solución abrió la era de la matemática actual: Teorema de Fermat, cuadratura del círculo, problemas isoperimétricos, etc. Miguel invitó a Manuel Morán a incorporarse en el grupo de Geometría Fractal en 1985. En este grupo de investigación en Teoría Geométrica de la Medida, que mantuvo reuniones semanales hasta 1990, también participaron María Teresa Carrillo, Trinidad Menárguez, Baldomero Rubio y Agustín de la Villa.

Un punto clave en la consolidación de este grupo de trabajo está en la asistencia de Miguel al congreso internacional *Topology and Meassure IV*, celebrado en Trassenheide (antigua República Democrática Alemana) en octubre de 1983, donde impartió una conferencia sobre las relaciones entre el Análisis y la Teoría Geométrica de la Medida (véase [10]). Allí conoció a dos de los más importantes investigadores del área: Kenneth Falconer y Pertti Mattila.

Falconer, discípulo de Besicovitch, preparaba la publicación de un libro sobre sus trabajos y envió a Miguel una copia del manuscrito para su revisión, sobre la que trabajamos en el curso 83/84.

Mattila fue invitado por Miguel para dar un curso de verano en Jarandilla de la Vera en septiembre de 1984. Este curso de introducción a la Teoría Geométrica de la Medida, publicado por la Universidad de Extremadura (véase [16]), fue el embrión del libro publicado después por Cambridge University Press (véase [17]). Este contacto con Mattila, que comenzó dirigiendo la tesis de Miguel Ángel Martín, se ha mantenido desde entonces con múltiples visitas y colaboraciones.

4 Tres tesis y dos libros

La actividad del grupo dio como fruto las tres primeras tesis realizadas en España en el área de Geometría Fractal y el primer libro de divulgación de ese área publicado en lengua española.

Mientras que la teoría de Besicovitch clasifica geométricamente los conjuntos planos de dimensión 1 (linealmente medibles), en regulares o irregulares o descomponiéndolos en una parte regular y otra irregular, no resuelve el problema para los conjuntos de dimensión no entera. Todos los conjuntos de dimensión menor que la unidad son conjuntos irregulares y, por tanto, la teoría de Besicovitch no distingue entre ellos: intersecan con medida cero a cualquier curva rectificable, en casi ningún punto tienen tangente y proyectan con medida (unidimensional) cero en casi todas las direcciones. Por otra parte, si la medida utilizada para medir las proyecciones es, por ejemplo, la medida de Hausdorff en su misma dimensión, los conjuntos irregulares conocidos proyectaban en medida positiva al menos en un “cono” de direcciones (de medida positiva en el intervalo de direcciones): la irregularidad en el sentido de Besicovitch no determina las propiedades geométricas como lo hacía en los conjuntos de dimensión entera.

Pertti Mattila propuso a Miguel Ángel Martín el problema de Brian White ([22]) consistente en estudiar si existía un conjunto plano de dimensión menor que la unidad que proyectara en medida nula (en su misma dimensión) sobre todas las direcciones. Una respuesta afirmativa sugeriría la existencia de conjuntos “más irregulares” que otros y por tanto, la necesidad de establecer nuevas clasificaciones que permitieran distinguir geométricamente entre los conjuntos de dimensión fraccionaria. En su tesis, titulada *Propiedades de proyección de fractales* (para detalles, véase [13] o [14]), resolvió el problema para conjuntos de dimensión fraccionaria y menor que 1 dando hasta seis clasificaciones diferentes de regularidad, coincidentes con la de Besicovitch si el conjunto tiene dimensión entera, pero diferentes entre sí en el caso de dimensión fraccionaria, lo que prueba la oportunidad de establecerlas.

Durante el periodo de edición de la tesis de Miguel Ángel nos llegaron noticias del término *fractal*, para referirse a conjuntos de dimensión fraccionaria o irregulares, que había introducido Benoit Mandelbrot en su libro [12] publicado en 1977, pero que no había tenido eco en el mundo matemático hasta años después de su segunda edición. Motivado por ello, Miguel Ángel cambió el título de su tesis, introduciendo dicho término, cuando ya estaba en prensa para su edición.

La tesis de Miguel Reyes, titulada *Análisis de Fourier sobre fractales*, trató sobre el problema, propuesto por Miguel de Guzmán, de definir sobre los fractales autosemejantes un sistema ortogonal de funciones y el estudio de la convergencia de las series de Fourier de ciertas clases de funciones (para detalles, véase [21]).

Miguel propuso a Manuel Morán una tesis sobre billares poligonales. Se trata aquí de estudiar el sistema dinámico consistente en una bola de billar que rebota perpetuamente en los lados de un billar poligonal con ángulos que son fracciones exactas de 2π. ¿Cubren las trayectorias densamente toda la mesa? ¿Cómo son las trayectorias periódicas? Con estos problemas, algunos aún abiertos a día de hoy, Miguel trataba de enlazar la investigación del grupo con el área emergente de la Dinámica Caótica, intuída por Poincaré en el siglo XIX cuando estudiaba el clásico problema de los tres cuerpos, y demostrada por Sarkovski en 1964 y por Smale en 1965. La existencia de *atractores extraños,* o monstruos geométricos de naturaleza fractal hacia los que a menudo una Dinámica no Lineal empuja las trayectorias del movimiento, señalaba los Sistemas Dinámicos como un campo de aplicación de la Geometría Fractal que el grupo estudiaba. El desarrollo de la tesis de Manuel Morán, titulada *Sobre ciertos procesos iterativos, isométricos y proyectivos*, confirmó esta conexión plenamente, al descubrirse una nueva familia de fractales generados por series (véase [18] o [19]).

La preocupación de Miguel por la difusión de las matemáticas le permitió ver enseguida el gran potencial que tenían la Geometría Fractal y los Sistemas Dinámicos para atraer la atención de los jóvenes investigadores. La tarea del momento era sacar de los artículos y libros de investigación los conocimientos adecuados y buscar una presentación oportuna para un público amplio y diverso, pensando en las aplicaciones a otras ciencias. Esto le llevó a proponernos la redacción de dos monografías.

La primera de ellas, titulada *Estructuras fractales y sus aplicaciones* y publicada en la editorial Lábor en 1993 (véase [11]), contenía una copia del programa informático FRACTINT, distribuido gratuitamente con el permiso de sus autores, que influyó decisivamente en la popularización de los fractales dentro y fuera del mundo matemático.

La segunda, titulada *Iniciación al caos* se publicó en el año 1995 en la editorial Síntesis (véase [15]).

Las monografías fueron complementadas con numerosas conferencias y cursos dirigidos hacia la enseñanza universitaria y secundaria, en nuestro país y en América Latina (Argentina, Brasil, Colombia, ...). Miguel de Guzmán fue desde el primer momento muy activo en la defensa del uso del ordenador en la investigación y en la enseñanza. Se podía explotar el interés de los jóvenes estudiantes de Instituto hacia los ordenadores, y usarlos para mostrar la belleza y entender la naturaleza de los Conjuntos Fractales y la complicada Dinámica Caótica. Se podía también dar cauce a la inquietud de los profesores de Instituto con un tema que satisfacía su curiosidad y tenía una proyección didáctica. Muchos de ellos se incorporaron a esta tarea a partir de cursos en Centros de Recursos de Profesorado que Miguel daba o nos confiaba a nosotros.

5 El entusiasmo por las matemáticas

A través de estas líneas hemos relatado la evolución del pensamiento matemático del Miguel de Guzmán en la década de los 80, y de los frutos que dio. Lo esencial para entender la sorprendente fertilidad de la actividad de Miguel, es su entusiasmo por las matemáticas. Miguel confiaba en las matemáticas como fuente de conocimiento, pero también como fuente de armonía y como vínculo entre las culturas y los pueblos. Por eso, al tiempo que las desarrollaba en su especialidad, las cuidaba y defendía en su conjunto. En cada momento se planteaba cuál era la tarea más acuciante y acudía a ella con entusiasmo. En la década de los setenta se trataba de romper la autarquía y conectar la investigación en nuestro país con la internacional, tarea en que sus logros son bien conocidos. En la década de los ochenta, que vivimos junto a él, contribuyó a la investigación puntera en su especialidad. Consciente del gran volumen de trabajo pendiente, nos ayudó a incorporarnos a él. Su misma confianza en las matemáticas y su hábito de mirarlas globalmente, junto con su fina intuición, le permitía dirigir la investigación conectándola con nuevas áreas emergentes, y las matemáticas parecían agradecer la confianza de Miguel, retribuyendo siempre con nuevos frutos los pasos que daba. En la década de los noventa trabajó en la difusión de las matemáticas en la enseñanza secundaria y en la sociedad, empeño que llevó muy lejos durante su presidencia del ICMI, con su habitual entusiasmo. ¿Cómo, sin entusiamo por las matemáticas, se podría mantener en vilo durante una hora a una audiencia heterogénea de más de mil personas hablando de dinámica caótica, como Miguel hizo en la sala de conferencias del Centro Cultural de la Villa de Madrid?

> *Miguel confiaba en las matemáticas como fuente de conocimiento, pero también como fuente de armonía y como vínculo entre las culturas y los pueblos. Por eso, al tiempo que las desarrollaba en su especialidad, las cuidaba y defendía en su conjunto. En cada momento se planteaba cuál era la tarea más acuciante y acudía a ella con entusiasmo. En la década de los setenta se trataba de romper la autarquía y conectar la investigación en nuestro país con la internacional, en la década de los ochenta contribuyó a la investigación puntera en su especialidad y en la década de los noventa trabajó en la difusión de las matemáticas en la enseñanza secundaria y en la sociedad con su habitual entusiasmo.*

Referencias

[1] A.S. Besicovitch, On Kakeya's problem and similar one, *Math. Z.* 27 (1928), 312-320.

[2] A.S. Besicovitch, On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points, *Math. Ann.* 98 (1928), 422-464.

[3] A.S. Besicovitch, On linear sets of points of fractional dimension, *Math. Ann.* 101 (1929), 161-193.

[4] A.S. Besicovitch, On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points II, *Math. Ann.* 115 (1938), 296-329.

[5] A.S. Besicovitch, On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points III, *Math. Ann.* 116 (1939), 349-357.

[6] A.S. Besicovitch, On fundamental geometric properties of plane line-sets, *J. London Math. Soc.* 39 (1964), 441-448.

[7] K.J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[8] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Springer-Verlag, Berlín, 1975.

[9] M. de Guzmán, *Real variable methods in Fourier Analysis*, Noth-Holland, Amsterdan, 1981.

[10] M. de Guzmán, Some connections between Geometric Measure Theory and Analysis, *Proceedings of the conference "Topology ans Measure"* (1984), 107-112.

[11] M. de Guzmán, M.A. Martín, M. Morán y M. Reyes, *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Lábor, Barcelona, 1993.

[12] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co., New York, 1982.

[13] M.A. Martín, *Propiedades de proyección de fractales*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1986.

[14] M.A. Martín and P. Mattila, k-dimensional regularity classifications for s-fractals, *Trans. Amer. Math. Soc.* 305 (1988), 293-315.

[15] M.A. Martín, M. Morán y M. Reyes, *Iniciación al caos*, Síntesis, Madrid, 1995.

[16] P. Mattila, *Lecture Notes on Geometric Measure Theory*, Universidad de Extremadura, 1986.

[17] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in euclidean spaces* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[18] M. Morán, *Sobre ciertos procesos iterativos, isométricos y proyectivos*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1988.

[19] M. Morán, Fractal series, *Mathematika* 36 (1989), 334-348.

[20] O. Nikodym, Sur la measure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accesibles, *Fund. Math.* 10 (1927), 116-168.

[21] M. Reyes, *Análisis de Fourier sobre fractales*, Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, 1987.

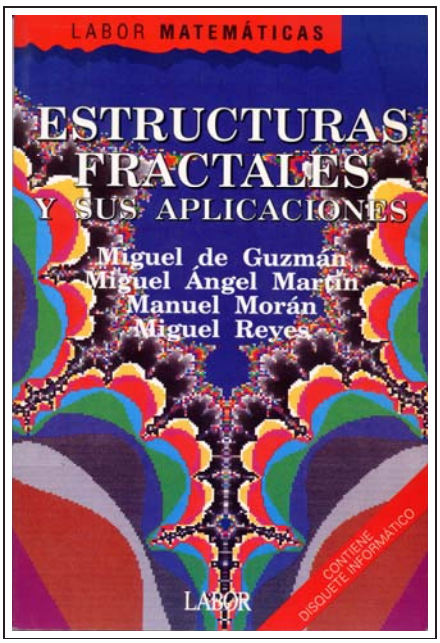
[22] B. White, *Problem 3.10*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 44, Am. Math. Soc., Providence, R.I., 1985, p. 447.

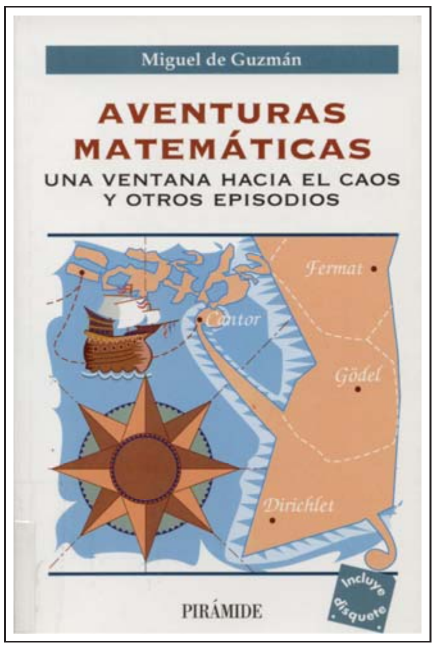
Miguel Ángel Martín
Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Agronómica
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos
Universidad Politécnica de Madrid
Ciudad Universitaria de Madrid
28040 Madrid
Correo electrónico: `miguelangel.martin@upm.es`

Manuel Morán
Dpto. de Fundamentos del Análisis Económico I
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad Complutense de Madrid
Campus de Somosaguas
28223 Madrid
Correo electrónico: `mmoranca@ccee.ucm.es`

Miguel Reyes
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid
Campus de Montegancedo
Boadilla del Monte
28660 Madrid
Correo electrónico: `mreyes@fi.upm.es`

Arriba: Miguel rodeado de sus estudiantes de doctorado.
De izquierda a derecha: Miguel Reyes, Manolo Morán, Ireneo Peral, Magdalena Walias, Miguel Angel Martín, M. de Guzmán, Roberto Morrión, Maria Teresa Carrillo y Antonio Casas.
5ª Conferencia Internacional de Análisis Armónico, El Escorial, 1996.






Dr. Miguel de Guzmán O.
Universidad Complutense de Madrid
Mag. Mariano Gonzalez U.
Sociedad Matematica Peruana
Mag. Uldarico Malaspina J.
Pontificia Universidad Católica del Peru


SoPEMAT - I CONEM - 97
PUC DEL
FEBRERO DE
PERU
Dr. Miguel De Guzmán