Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

En este número . . .

... de La Gaceta, presentamos un interesante artículo del lógico A. R. D. Mathias, que tiene un carácter francamente iconoclasta, por más que el icono contra el que se dirige (Bourbaki) haya recibido múltiples críticas en décadas recientes. Aunque no se trata estrictamente de un trabajo histórico, tiene un indudable valor informativo y analítico a este respecto; de ahí que hallamos considerado apropiado incluirlo en esta Sección. El tema de fondo es una cuestión que no deja de ser discutida en distintos foros: ¿qué relevancia tienen los resultados de la lógica matemática, posteriores a 1930, para las matemáticas en general? Hace unos años, en la revista *Historia Mathematica*, hubo una polémica entre dos eminentes historiadores sobre la cuestión: ¿es la lógica matemática una parte de las matemáticas? A favor del sí, y tratando de ofrecer ejemplos de la relevancia de la lógica, intervenía Gregory H. Moore; a favor del no, Jeremy Gray. No hay duda de que partes muy importantes de la lógica matemática, en especial lo relacionado con teoría de la demostración, requieren para su mismo planteamiento y para apreciar los resultados una actitud crítica y filosófica que no suele ser compartida por la gran mayoría de los matemáticos. Son las partes que uno estaría tentado a decir que no caen propiamente dentro de las matemáticas, sino en la frontera con otras disciplinas (ahora bien, ¿no las hace esto especialmente interesantes?). Pero naturalmente esa amplia gama de teorías que –un tanto por conveniencia– agrupamos bajo el nombre de Lógica Matemática incluye muchas más cosas, y por ejemplo la teoría de modelos ha tejido una buena red de relaciones con las ramas centrales de las matemáticas, mostrando su interés y potencia. Creo que puede decirse, sin miedo al error, que la relevancia es bastante mayor de lo que piensan muchos, pero también es cierto que (al menos hasta donde yo sé) no disponemos de buenos artículos o libros que lo expongan de una manera accesible y sobre la base de material reciente. He ahí una laguna que realmente valdría la pena cubrir.

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: `josef@us.es`

Como dice Hourya Benis-Sinaceur en su reseña del trabajo de Mathias para el *Mathematical Reviews*, hay quienes piensan que Bourbaki está muerto, pero muchos de los que critican su "formalismo" persisten en la misma concepción fosilizada de la lógica. Bien puede ser que Mathias exagere la importancia de Bourbaki y su influencia –por grande que haya sido– cuando sugiere al final del artículo que la situación actual de relativa ignorancia de la lógica por parte de los matemáticos se debe al grupo francés y a sus muy limitados conocimientos del tema, "fosilizados en su nivel de 1929". En todo caso, el tema merece atención, y el caso de Bourbaki es representativo de una situación mucho más generalizada; situación que tiene su reflejo a muchos niveles, incluyendo el delicado tema de los planes de estudio y la contratación de profesores.

José Ferreirós

La ignorancia de Bourbaki [2]

por

A. R. D. Mathias

Contemplando la historia de las matemáticas, uno ve periodos repletos de creatividad en los que se están desarrollando nuevas ideas con un espíritu competitivo y, por tanto, muy precipitado, y periodos en los que la gente encuentra que las ideas en voga son inexactas, incoherentes, quizás inconsistentes. En tales periodos existe cierta urgencia de consolidar los logros del pasado.

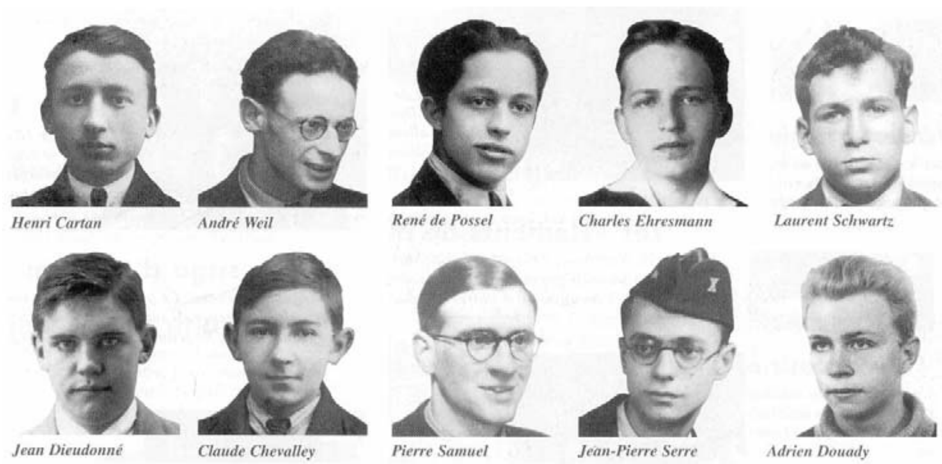
Dije: "la historia de las matemáticas", pero la matemática es un organismo sociológico complejo y su crecimiento tiene lugar en distintas ramas y diferentes países , incluso en distintas universidades, de distintas formas y a velocidades diferentes. A veces los grupos nacionales sienten que la matemática de su país está en baja forma: podemos encontrar una expresión de esto en la introducción a las últimas ediciones del texto de Hardy, *Matemáticas puras*, donde el autor observa que fue escrito con un entusiasmo ideado para combatir el aislamiento de las matemáticas británicas de fin de siglo, que no habían sido influenciadas por el desarrollo de las matemáticas en Francia durante el siglo diecinueve.

[2]Este artículo es la traducción al español de: A. R. D. Mathias, "The ignorance of Bourbaki", *Math. Intelligencer*, **14** (1992) 4-13. Queremos expresar nuestro sincero agradecimiento tanto al Prof. Chandler Davis, Editor en Jefe de *Mathematics Intelligencer*, como al autor, A. R. D. Mathias, por habernos concedido su permiso para la traducción, que ha sido realizada por J. M. Almira.

De hecho, en 1910 Francia podía estar orgullosa de su sucesión de matemáticos como Legendre, Laplace, Lagrange, Fourier, Cauchy, Galois, Hermite, Hadamard, Poincaré –una impresionante lista de sabios de la máxima distinción.

Pero despues de la segunda guerra mundial el sentimiento en Francia cambió, y los jóvenes matemáticos franceses de la época comenzaron a considerar que la antorcha de la investigación matemática había pasado a Alemania – donde había muchos importantes matemáticos, edificando sobre el trabajo pasado de Riemann, Frobenius, Dedekind, Kummer, Kronecker, Minkowsky y Cantor, como Klein, Hilbert, Weyl, Artin, Noether, Landau y Hausdorff, y que los matemáticos franceses habían caído en declive.

Así pues, en 1935, un grupo de jóvenes matemáticos franceses[3] decidió restablecer la disciplina en sus materias, escribiendo una serie de libros de texto, bajo el pseudónimo común de Nicolás Bourbaki, que pretendía ofrecer exposiciones definitivas con todo el rigor francés de lo que ellos consideraban las areas más importantes de las matemáticas puras.



Entonces la cuestión del rigor matemático era muy actual, al haber sucedido un desastre mayor de lo habitual a principios del siglo veinte, con el descubrimiento de Russell de un defecto grave en la teoría de clases propuesta por Frege.

[3]Listados por Chevalley en una entrevista [M7] como H. Cartan, C. Chevalley, J. Delsarte, J. Dieudonné, Sz. Mandelbrojt, R. de Possel y André Weil. En una carta citada en la biografía [H3] de Cavaillès por su hermana, otro matemático, Ehresmann, es mencionado como miembro del grupo.

Frege quería formar para cada propiedad $\Phi(y)$ la clase $\{y|\Phi(y)\}$ de todos los objetos y con la propiedad Φ, y, al mismo tiempo, contar tales clases como objetos a los que podrían aplicarse estos tests de pertenencia.

Si escribimos "$a \in b$" para denotar que "a es un elemento de b" y "$a \notin b$" para "a no es miembro de b", podemos expresar el principio general de Frege como sigue. Denotemos $\{y|\Phi(y)\}$ por C: Entonces para cualquier objeto a, $a \in C$ si y solo si $\Phi(a)$. Russell, mientras desarrollaba una idea de Cantor, observó que si $\Phi(y)$ es la propiedad $y \notin y$ de no ser miembro de uno mismo, entonces surge una contradicción. Pues, si B es la clase de aquellos objetos que no son miembros de sí mismos, en símbolos, $B = \{y|y \notin y\}$, entonces para cualquier y se tiene que $y \in B$ si y solo si $y \notin y$ y, por tanto, para el caso particular en el que y es B, tenemos que $B \in B$ si y solo si $B \notin B$.

En respuesta a esto, hubo algunos que desearon dejar totalmente de lado las areas más especulativas de las matemáticas, que utilizaban el infinito y, en concreto, las teorías de Cantor sobre los cardinales y los ordinales. Kronecker, Poincaré, Brouwer y Hermann Weyl deben ser mencionados aquí.

Pero hubo otros –notablemente, Hilbert– que desearon resistir esta amputación masiva, y se propuso un programa cuyo objetivo era la formalización de las matemáticas –el lenguaje, los axiomas, las formas de razonamiento, etc.– y demostrar, por métodos cuya solidez no podría dudarse, que el sistema resultante estaba libre de contradicción, es decir, era consistente.

Dije "formalizar las matemáticas", pero esto es ambiguo: ¿cuántas matemáticas podemos o debemos incluir? Ciertamente, Hilbert deseaba mantener el trabajo de Cantor sobre los ordinales en su formalización de las matemáticas, ya que fue Cantor quien hizo posible a Hilbert: Hilbert alcanzó la fama con su *Teorema de la base* que, en terminología moderna, afirma que si todo ideal del anillo conmutativo R está finitamente generado, lo mismo sucede para el anillo $R[X_1, \ldots, X_n]$ de polinomios en las indeterminadas $X_1, \cdots, X_n$ con coeficientes en R, y estudios recientes han probado que no solo la demostración de este resultado se apoya en la buena-fundación del tipo de orden ω^ω sino que además es, en un sentido muy preciso[4], equivalente a ella.

Así, cuando Hilbert hablaba del paraiso de Cantor, no era un tributo infundado: agradecía la creación de un contexto conceptual para la inducción transfinita gracias a la cual la geometría algebraica pudo avanzar.

Las ideas de Russell para evitar las paradojas condujeron a su *teoría de tipos ramificada*. Esta teoría era muy engorrosa. Un sistema más sencillo fue propuesto por Zermelo en la primera década del siglo. Fraenkel y Skolem, en la tercera década, propusieron el axioma de reemplazo para fortalecer el sistema de Zermelo. El sistema resultante se conoce como Zermelo-Fraenkel. Añadiendo el axioma de elección, que fue articulado por primera vez por Zermelo y es de gran ayuda en análisis funcional y álgebra superior, y el axioma de buena

[4]Ver [M21].

fundación, debido a von Neumann, ZFC ha demostrado ser un sistema muy servicial[5].

Hay dos elementos en el programa de Hilbert: el lado creativo, proponer un sistema dentro del cual trabajar, y el lado crítico, comprobar la adecuación y la consistencia del sistema propuesto. Naturalmente el grupo Bourbaki, o los bourbakistas, conscientes de la posibilidad de contradicción en las matemáticas, estaban determinados a que sus libros de texto quedaran libres de tales problemas y de hecho un primer volumen en su serie, *La Teoría de conjuntos,* se dedicó a establecer los fundamentos necesarios para los volúmenes posteriores.

El otro día pensé que debería leerlo.

Me quedé profundamente horrorizado: parecía ser el trabajo de alguien que había leido los *Elementos de lógica teórica*, de Hilbert y Ackermann, y las *Lecciones sobre los números transfinitos* de Sierpińsky, que fueron (ambos) publicados en 1928, pero [que no había leído nada] desde entonces.

Perplejo, tanto por la actitud de Bourbaki hacia los fundamentos como hacia la teoría de conjuntos, comenzé a investigar los antecedentes y encontré que los bourbakistas habían publicado varios artículos en los años treinta y cuarenta exponiendo la posición del grupo respecto de la cuestión de los fundamentos.

Henri Cartan y Jean Dieudonné escribieron ensayos firmando en su propio nombre sobre los fundamentos de las matemáticas. Despues de la Segunda Guerra Mundial, el propio Nicolás Bourbaki pronunció una conferencia en la *Asociación para la Lógica Simbólica* en América y su charla se publicó en el *Journal of Symbolic Logic.* Además, escribió un ensayo sobre *La arquitectura de las matemáticas*, que fue traducido al inglés y apareció en el *American Mathematical Monthly.*

Hay cierta uniformidad en todos estos ensayos: en lo que se refiere a su parte creativa, la teoría de conjuntos que proponen es la de Zermelo –dejadme que lo enfatize: no la de Zermelo-Fraenkel– y declaran que ésta es la adecuada para todas las matemáticas; y respecto de la parte crítica, todos muestran la influencia del programa formalista de Hilbert. Ninguno de ellos menciona a Gödel.

A la vista de su militancia en el programa de Hilbert, que es muy notable, algunos comentarios sobre los Teoremas de Incompletitud de Gödel son apropiados.

En septiembre de 1930 hubo una reunión en Königsberg en la que se concedió a Hilbert, que se había retirado de su decanato en Götinga en enero de ese mismo año, [el título de] ciudadano de honor. La famosa y potente charla que impartió en esta feliz ocasión, *Naturerkennen und Logik*, está impregnada

[5]Zermelo incluyó el axioma de elección en su lista de axiomas de 1908. La costumbre actual es mencionarlo explícitamente como un axioma extra.

de su creencia en que no existen problemas insolubles[6] y finaliza con su firme grito de guerra:

"Wir müssen wissen; wir werden wissen",

–debemos saber, sabremos. Con la delicada ironía de la historia, al mismo tiempo tenía lugar otra reunión en Königsberg sobre los fundamentos de las matemáticas, a la que aparentemente no asistió Hilbert, en la que justo el día anterior Gödel había anunciado su demostración de incompletitud, con sus aplicaciones a sistemas como la aritmética de Peano o Zermelo-Fraenkel[7]. Uno podría esperar que esto causase sensación: Hilbert había expuesto una respuesta muy positiva a las paradojas y discípulos como Herbrand habían establecido, en el espíritu de Hilbert, ciertos casos del problema de la decisión. Gödel demostró que había serias limitaciones en la propuesta de Hilbert[8]. Demostró que ningún sistema que verifique ciertas condiciones mínimas (como el claramente deseable requisito de que exista un algoritmo que nos diga de cualquier sentencia del sistema si es –o no– uno de los axiomas) captura todas las matemáticas, y también probó que las demostraciones de consistencia de un sistema de este tipo sólo se pueden dar en sistemas cuya inconsistencia es más creible que la del sistema bajo discusión.

Dada la importancia de este resultado para el estudio de los fundamentos, y dada la entusiasta respuesta de von Neumann y otros a las ideas de Gödel, es natural preguntar qué efecto tuvo Gödel sobre los bourbakistas. Lo extraño es que uno busca en sus publicaciones la mención de su nombre en vano. Casi podría decirse que lo ignoraron, pero el tono de ciertos de sus trabajos sugiere un conflicto entre una difícil advertencia de que algo había sucedido y el deseo de pretender que esto no había sido así. Es como si hubieran descubierto la existencia de una isla con un dragón y en respuesta hubiesen elegido creer que si no le daban nombre al dragón entonces éste no existiría.

Por ejemplo, Henri Cartan, en un trabajo titulado, *Sobre el fundamento lógico de las matemáticas*[9], presenta el sistema de Zermelo, incluyendo el axioma de elección. Aunque dice que tiene en cuenta las modificaciones introducidas por Fraenkel, no incluye la principal: el axioma de reemplazo. Comenta que el sistema de Zermelo es inconveniente, carece de definiciones adecuadas para par ordenado, etc.; y revela su desconocimiento de las distinciones que

[6]La penultima sentencia de la conferencia de Hilbert [M13] es la siguiente: "*La verdadera razón por la que Comte no tuvo éxito en la búsqueda de un problema insoluble es, en mi opinión, que tales problemas no existen*".

[7]El anuncio de Gödel en Königsberg fue seguido por la comunicación de un *abstract* a la Academia de Viena el 23 de octubre de 1930 y la recepción el 17 de Noviembre de 1930 del texto de su artículo para publicación.

[8]Para valoraciones recientes del programa de Hilbert se puede consultar, por ejemplo, [M11], [M18] y [M20].

[9][M5]: El manuscrito fue recibido el 15 de enero de 1942 y publicado en 1943.

subrayó Gödel al decir “verdadero” cuando quería expresar “demostrable”, “falso” para expresar “refutable” y “dudoso” para “sin decidir”.

Habla de teorías contradictorias y dice que al problema de decidir si una teoría dada es contradictoria conduce al *Entscheidungsproblem*, que consiste en encontrar un método general para decidir si una relación dada (i.e., una fórmula) es una identidad lógica (i.e, un teorema). Este problema, afirma, solo ha sido resuelto en casos particulares. En general uno no sabe cómo hacerlo. Entonces dice: “Pero estos problemas, aunque son importantes, quedan fuera de nuestro tema”.

Menciona la tesis de Herbrand, las *Lecciones sobre los números transfinitos* de Sierpiński, adopta una visión que atribuye a Dieudonné, mencionando que estas ideas, aunque publicadas en 1939, “se remontan a 1938” y hace la siguiente afirmación:

> “Una teoría matemática es sencillamente una teoría lógica determinada por un sistema de axiomas. Las entidades de la teoría se definen *ipso facto* por el sistema de axiomas, que engendra de cierta forma el material al cual se pueden aplicar las proposiciones verdaderas. La parte propiamente matemática de la teoría lógica consiste en definir estas entidades, nombrarlas y aplicarles proposiciones y fórmulas”.

Menciona a Cantor, Kronecker, Zermelo, Brouwer, la paradoja de Skolem, Poincaré y Lebesgue. **¡Pero no a Gödel!**

Claramente Cartan estaba pensando en la cuestión de los fundamentos: ¿Entonces por qué no menciona los resultados de Gödel? Existe cierto desacuerdo entre los francoparlantes a los que he podido consultar, respecto al significado, en 1942, de la frase *es todo un ideal* y también sobre si el artículo de Cartan revela cierta preocupación sobre los resultados de incompletitud y el deseo de comunicar esta preocupación, que uno presume él debió poseer, al lector. El párrafo en cuestión es el siguiente:

> “El problema de decidir si una proposicion dada es cierta en una teoría se reduce al siguiente: ¿una relacion dada es una identidad lógica? De igual manera se plantea el problema de decidir si una teoría es o no contradictoria. Estos problemas se reducen en definitiva al *Entscheidungsproblem* que consiste en encontrar un método general que permita decidir si una relacion dada explícitamente es o no una identidad lógica. Este problema ha sido resuelto solo en ciertos casos particulares.
>
> De manera que, hasta nueva orden, la repartición en las tres categorias que acabamos de mencionar (proposiciones ciertas, falsas y dudosas) es todo un ideal: en una teoría de la que supieramos que no es contradictoria, hay proposiciones que se han probado ciertas, otras que se han probado falsas (las negaciones de las ciertas

> anteriores), otras que no se ha verificado si son ciertas o falsas. Y todavía, de manera general, ni siquiera sabremos probar que una teoría dada no es contradictoria".

Actitudes equívocas análogas se encuentran en el artículo de 1939, de Jean Dieudonné, citado por Cartan: *Los métodos axiomáticos modernos y los fundamentos de las matemáticas*. Él describe los logros de Cantor, que Hilbert había encontrado tan útiles, como "¡resultados contrarios al sentido común!". Trata la crisis de los fundamentos de principios de siglo como resuelta por la doctrina formalista de Hilbert [según la cual] la corrección de una obra matemática es cuestión de seguir ciertas reglas y no una cuestión sobre su interpretación; comenta que

> "el principal logro del enfoque formalista es haber borrado definitivamente la obscuridad que aún ensombrece el pensamiento matemático",

y dice que

> "Naturalmente, aún queda por demostrar que la idea de Hilbert puede realizarse".

De nuevo, no se menciona a Gödel. Pero Dieudonné, sin embargo, apunta una preocupación excéptica respecto a los resultados de Gödel con las siguientes palabras:

> "Al parecer, de acuerdo con trabajos muy recientes, en contra de lo que creía Hilbert, las reglas metamatemáticas que se requieren para demostrar la consistencia de las matemáticas son de un grado de abstracción tan elevado como las reglas matemáticas en sí mismas, lo que reduce enormemente la utilidad o el significado de una tal "demostración".

Él confirma esta preocupación algunos años despues en su obituario a Hilbert, pero aún no se decide a mencionar el aterrador nombre:

> "Parece que la intuición de Hilbert le llevó, por una vez, a esperanzas ligeramente exageradas, y ahora existen buenas razones para dudar de la existencia de tales 'demostraciones' [de consistencia]".

Nicolás Bourbaki[10], en *Los fundamentos de las matemáticas para el matemático en activo*[11], de nuevo presenta la teoría de conjuntos de Zermelo más el axioma de elección, y concluye:

[10] Ver [M4] y [M2] o su traducción, [M3].
[11] ¿Es esta la primera aparición en la historia de esta odiosa expresión?

> "Sobre esta base, afirmo que puedo edificar la totalidad de las matemáticas actuales, y si hay algo original en mi procedimiento, radica exclusivamente en el hecho de que, en vez de contentarme con tal afirmación, procedo a demostrarla de la misma forma que Diogenes probó la existencia del movimiento, y mi demostración se completará más y más conforme mi tratado crezca".

Como ya podréis esperar en ese artículo no se menciona, ni siquiera se sugiere la existencia del trabajo de Gödel, que en 1948 llevaba publicado 17 años.

En el otro ensayo de Bourbaki, *La arquitectura de las matemáticas,* tampoco se menciona a Gödel, pero esta vez sí hay una "llamada de atención" sobre "dificultades".

Las preguntas que quiero tratar son: **¿Por qué Bourbaki no menciona a Gödel?** y **¿Por qué Bourbaki no repara en que su sistema de la teoría de conjuntos de Zermelo con AC era inadecuado para las matemáticas existentes?**

Pienso que estas cuestiones son importantes porque el grupo Bourbaki tuvo una enorme influencia: no discuto el aspecto positivo de sus textos ni la magnitud de sus logros, pero sugiero que su actitud hacia la lógica y la teoría de conjuntos, que ha transmitido a las generaciones más jóvenes de matemáticos[12], es dañina porque excluye la preocupación por las percepciones de la naturaleza de las matemáticas que están fortaleciéndose, y casi me aventuro a sugerir que si, como algunos afirman, Bourbaki ha muerto, fue asesinado por la esterilidad de sus propias actitudes.

Antes de intentar dar respuestas, que serán necesariamente especulativas, a estas cuestiones, vamos a investigar un poco más los comentarios de los bourbakistas sobre esta materia.

En *La arquitectura de las matemáticas* Bourbaki distingue cuidadosamente entre el formalismo lógico, al cual se opone, y el método axiomático, que aprueba.

> "Lo que el método axiomático establece como su objetivo fundamental es precisamente lo que el formalismo lógico, por sí mismo, no puede suministrarnos. A saber, la profunda inteligibilidad de las matemáticas".

De manera que él no interpreta el método axiomático como un superesquema deductivo para todas las matemáticas sino simplemente la disciplina mental de podar las áreas hasta sus esqueletos, clarificar las semejanzas y hacer la teoría "transportable".

[12]Las lecciones sobre teoría de conjuntos que impartía un discípulo de Bourbaki a estudiantes de una antigua universidad, en 1988, contenían errores, en forma de demostraciones incorrectas de resultados falsos, cuyo origen podría atribuirse al estancamiento bourbakista de los cuarenta y seis años anteriores.

> "La unidad que [el método axiomático] da a las matemáticas no es la armadura de la lógica formal, la unidad de un esqueleto sin vida.
>
> Muchos matemáticos han estado poco dispuestos a ver en la axiomática otra cosa sino una inútil superchería lógica, incapaz de fructificar en ninguna teoría.
>
> Nada está más alejado del método axiomático que una concepción estática de la ciencia. No deseamos inducir al lector a pensar que hemos perfilado el estado definitivo de la ciencia.
>
> Es perfectamente posible que, con el desarrollo futuro de las matemáticas, pueda aumentar el número de estructuras fundamentales, revelando la utilidad de nuevos axiomas o nuevos conjuntos de axiomas".

André Weil pone la visión bourbakista de la lógica como la gramática de las matemáticas con más diplomacia[13]:

> "Pero, si la lógica es la higiene del matemático, no es su fuente de comida: son los grandes problemas matemáticos los que conforman su pan de cada día.

reflejando, por supuesto, de esta forma su creencia en que no existen problemas importantes en lógica. Aunque sin mencionar a Gödel, Weil llega a sugerir su conciencia de que quizás aún no se ha pronunciado la última palabra en lógica:

> "Podría muy bien suceder que un día nuestros sucesores quieran introducir en la teoría de conjuntos formas de razonamiento que nosotros no permitimos".

Esta visión vital, que recuerda la del último párrafo citado anteriormente de Bourbaki, está en contraste con la última osificación expresada por Dieudonné en su *Panorama de las matemáticas*[14] segun el cual, "la teoría de conjuntos está bien establecida".

El enfoque general de Bourbaki se establece claramente en su manifiesto:

> "El principio organizativo será el concepto de jerarquía de estructuras, yendo de lo simple a lo complejo, de lo general a lo particular.
>
> La teoría de grupos, ... la teoría de conjuntos ordenados, (incluyendo los buenos órdenes), ... la teoría de las estructuras topológicas ...",

[13] En "*El futuro de las matemáticas* [M24]."

[14] [M10]: Este trabajo omite el nombre de Shelah de una lista de importantes contribuyentes a la teoría de modelos. Los primeros dos libros y 322 artículos de Shelah están convenientemente listados en las páginas 398-418 de [F1].

pero debería observarse, de paso, que entre estas afirmaciones inobjetables existe una que, sin más comentarios, podría malinterpretarse:

> Los primeros tratamientos axiomáticos (Dedekind-Peano, para la aritmérita, Hilbert y Euclides, para la geometría) tratan con teorías univalentes, i.e. teorías que están totalmente determinadas por su sistema completo de axiomas, a diferencia de la teoría de grupos".

Es cierto que las geometrías Euclídeas tanto en dimension dos como tres, tal cual fueron axiomatizadas por Hilbert, están totalmente determinadas, de modo que una afirmación de la geometría plana demostrable utilizando geometría sólida tendrá su demostración en geometría plana[15]. Pero Gödel nos dice que la aritmética, con su axiomatización de Peano o con cualquier otra, no es univalente (ni, curiosamente, tampoco lo es la geometría proyectiva bidimensional, aunque pasa a ser univalente si se le añade como único axioma más, el enunciado del teorema de Desargues)[16]. Al decir que la aritmética de Peano es univalente Bourbaki probablemente tiene en mente alguna caracterización de segundo orden del modelo estándard de la aritmética, lo que es, por supuesto, perdonar la cuestión.

Mi lectura de todos estos estractos es que Bourbaki se había aferrado a los aspectos más positivos y valiosos del trabajo de Hilbert y dio la bienvenida a la idea de reducir la corrección de las matemáticas a un conjunto de reglas. Pero sin embargo persistió, incluso despues de que el trabajo de Gödel demostrase que el programa de Hilbert nunca podría ser completado, en pensar en la lógica y la teoría de conjuntos como algo que uno debía incluir en el Volumen 1, y, a partir de ese momento, olvidarlo.

Las ediciones posteriores de los libros de Bourbaki cambian hasta el punto de que mencionan a Gödel, hablan de los resultados de independencia, e incluyen el axioma de reemplazo. Pero las actitudes pre-Gödelianas, cuya percepción me hizo comenzar esta investigación, persisten. Así pues, parece que esta importante exposición de las matemáticas está escrita por personas cuya comprensión del trabajo sobre los fundamentos es de 1929.

Volviendo a mi primera pregunta:

> **¿Por qué los bourbakistas no adaptan sus actitudes para tener en consideración la supremamente importante contribución de Gödel a la cuestión de los fundamentos?**

[15] La afirmación de que si un enunciado de la geometría euclídea bidimensional tiene una demostración tridimensional, entonces tiene demostración bidimensional, es consecuencia del teorema de completitud de Tarski, que es el Teorema II.3.32 en la página 234 de: *Metamathematische Methoden in der Geometrie* (Hochschultext) (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983). Este teorema dice que para cada n positivo, la teoría de la geometría euclídea n-dimensional es completa (y decidible). Su demostración se obtiene por eliminación de cuantificadores.

[16] Para un tratamiento meticuloso de estas cuestiones, ver [M1].

Bien podríamos preguntarnos por qué la comprensión de Bourbaki de los fundamentos no avanzó con el progreso de los estudios fundacionales.

Las respuestas podrían ser a diferentes niveles: sociológico, fisiológico o matemático.

Podría, por ejemplo, existir un elemento nacionalista en la postura de Bourbaki. Comparémoslo con la perspectiva de Alexandre Koyré[17], segun la cual

> "entre las razones por las que Hegel fue ignorado en Francia durante cien años estan la oscuridad de sus escritos, la estrechez de las tradiciones Cartesianas y Kantianas, el protestantismo de Hegel, pero sobre todo la incredulidad de los franceses respecto de la identidad estricta de la síntesis lógica de Hegel y el ser histórico. Para los racionalistas franceses, la historia estaba separada de la razón o la lógica, que era eterna, intemporal".

Ejemplos de chauvinismo intelectual se encuentran tanto en Francia como en cualquier otro lugar y podrían incluir la centenaria resistencia de la Universidad de París a las ideas de Paracelso[18] y la resistencia, bajo la influencia de Descartes, a las ideas de Leibnitz respecto de los infinitesimales[19].

Hubo, sin embargo, a finales de los treinta, estudiosos franceses que conocían bien el trabajo de Gödel y lo diseminaron activamente: ver, por ejemplo, la monografía de Albert Lautman *Los esquémas de génesis* y las de Jean Cavaillès tituladas *El problema de los fundamentos de las matemáticas* y *La no-contradicción de la Aritmética*[20]. De modo que cualquier elemento nacionalista en la actitud anti-Gödeliana podría ser local al grupo Bourbaki.

Es interesante que Cavaillés ve el año 1929 como marcador de la transición entre dos periodos, a los que denomina el intuitivo y el crítico, en el desarrollo de la lógica moderna. Por tanto, eso sugiere que, a nivel psicológico, los bourbakistas se resisten a moverse de la concepción intuitiva de la lógica, con la que habían crecido, concepción en la que no pocos matemáticos europeos están [aún] imbuidos.

La actitud de los bourbakistas hacia la lógica podría derivarse de la actitud socarrona de Poincaré hacia el trabajo de Cantor y Russell. Aunque en sus *Últimos ensayos* Poincaré se movió hacia la comprensión de sus oponentes y en una conferencia, *La alianza moral*, que tuvo lugar tres semanas antes de su muerte, abogó por el respeto mútuo entre aquellos que, con ideas y métodos distintos, persiguen un ideal común, estos gestos oscilantes podrían

[17] Ver [H4] y [H6].

[18] Documentada, con todo su habitual entusiasmo por la lucha intelectual, por el imperecedero Lord Drace de Glanton [H2].

[19] Esta disputa, sin embargo, fue resuelta conmparativamente rápido. Ver Mancosu [H5].

[20] Estoy agradecido al doctor Mancosu, del Wolfson College, Oxford, por colocarme sobre la pista de [M6] y [M14].

no haber desecho el daño provocado por sus primeros escritos críticos sobre lógica, sardónicos, salvajemente divertidos pero, en el fondo, defectuosos.

En su prefacio a la edición francesa de los *Escritos lógicos* de Herbrand, van Heijenoort, comentando el triste estado de la lógica en Francia, observa que el daño realizado por Poincaré fue agravado por las muertes prematuras de varios lógicos franceses, como Couturat, atropellado por un camión durante la movilización de 1914, Nicod, que murió de tuberculosis en 1924 a la edad de 31 años, Herbrand, muerto en un accidente de montañismo a la edad de 23, y Cavaillès y Lautman, que, con 41 y 36 años, respectivamente, fueron fusilados por los alemanes en 1944, por su participación en la resistencia.

Estas ultimas pérdidas son parte de un fenómeno más amplio: los lógicos europeos, en su huida de Hitler, iniciciaron en Estados Unidos e Israel escuelas de lógica que han florecido, dejando a Europa atrás[21].

Podría ser que los bourbakistas fueran conducidos al mal camino por Hilbert, y su militancia en el Programa [de Hilbert] les hiciera muy difícil al principio aceptar el trabajo de Gödel: pero al recuperarse del *shock* más rápidamente que sus discípulos franceses, que eran mucho más jóvenes, alguna explicación adicional de su comportamiento se hace necesaria. Podría ser que, como muchos otros científicos, estaban cegados por sus prejuicios, y no pudieron ver el significado de los hechos que conocian.

Pero sea cual sea la razón, permanece el hecho de que no incorporaron los teoremas de incompletitud de Gödel en su visión de las matemáticas: y ninguna explicación sociológica o psicológica de la resistencia de Bourbaki a los logros de Gödel puede resolver las dificultades matemáticas y filosóficas presentadas por el trabajo de Gödel a los que creen en el programa de Hilbert.

Conjeturaría que en algún nivel de su psique los bourbakistas estaban incapacitados. No estaban preparados para encarar la posibilidad, fuertemente sugerida por el trabajo de Gödel, de que *no* existen fundamentos de las matemáticas en el sentido propuesto por Hilbert y abrazado por Bourbaki, que *no* hay forma de fundar las matemáticas en la lógica o en las clases, o cualquier otra cosa, de modo que una vez se haya logrado la base en ciertas ideas primitivas, no se necesite repensarlas. Que, aunque existen de hecho cuestiones fundacionales, éstas *no* se pueden confinar al Capítulo Uno del Gran Libro, pues ellas impregnan [todas] las matemáticas.

La segunda cuestión que propuse anteriormente era:

¿Por qué el grupo Bourbaki no observó la no adecuación de la teoría de conjuntos que ellos eligieron como fundamento para las matemáticas?

[21]Por ejemplo, mientras los estudiantes de Cambridge, durante un periodo de 4 años, pueden recibir alrededor de 50 clases sobre temas de lógica, en Harvard o Princeton puede que reciban unas 250 clases y en Berkeley, donde se toman la lógica en serio, puede que reciban unas 400.

Sugiero[22] como respuesta que sólo estaban interesados en areas de las matemáticas para las que [la axiomática de] Zermelo es apropiada, y que este area puede ser descrita en términos generales como la geometría, en oposición a la aritmética.

Leibnitz escribió que existen dos famosos laberintos en los que nuestra razón se pierde con frecuencia. Uno es el problema de la libertad y la necesidad, y el otro se ocupa de la continuidad y el infinito. Sin preocuparme por este segundo peligro, deseo ahora explorar lo que creo es la dualidad subyacente de las matemáticas, a saber, la tensión entre estas dos intuiciones primitivas: la aritmética y la geometría[23]. Esta tensión podría ser ilustrada de forma divertida con el siguiente acertijo:

"¿Puedes describir una escalera de caracol sin mover tus manos?"

Esta cuestión es difícil, quizás, porque las palabras son temporales y por tanto aritméticas mientras que las espirales son espaciales. La fuente de dificultades podría ser fisiológica puesto que existe una abundante cantidad de evidencia médica[24] de que normalmente el lado izquierdo del cerebro maneja conceptos temporales mientras que el lado derecho maneja los conceptos espaciales[25].

---

[22]El Dr. Bricogne, en vista de la brillante y exitosa polinización cruzada entre geometría y aritmética presente en los trabajos de André Weil, Serre, y otros, pone en duda la validez de mi sugerencia. Sin embargo, él comparte con Bourbaki la rechazable actitud según la cual "es indeseable que las cuestiones fundacionales puedan incidir directamente sobre estas áreas de las matemáticas", y yo me pregunto por qué personas tan sensibles hacia un tipo de polinización cruzada deberían ser tan resistentes a otras. Para consultar ejemplos recientes de problemas en geometría algebraica que han sido resueltos con técnicas de la lógica, ver [F2], [F3] y [F5].

[23]El Dr. Mancosu ha llamado mi atención sobre el capítulo VI, *Geometría cartesiana y aritmética leibniziana,* del texto de Belaval [H1] en el que este dualismo se utiliza para interpretar la oposición entre Descartes y Leibniz.

[24]Ver [P1], [P2], [P3]. Estoy agradecido a John Davis, profesor emérito de pediatría en Cambridge, por mostrarme esta investigación.

[25]De hecho, un crítico amistoso de un boceto anterior de este artículo, preguntaba: "¿Qué mitad de sus cerebros utilizó Bourbaki? Mi impresión es que la izquierda. Quizás esté proyectando. Los bourbakistas no se sentían a gusto con las matemáticas [asociadas a] la parte derecha del cerebro, de los geómetras italianos, y por una buena razón: partes significativas estaban bajo sospecha y podrían, si uno toma "verdadero" y "falso" como conceptos de la parte izquierda del cerebro y "correcto" y "erróneo" como conceptos de la parte derecha del cerebro, ser descritas de manera justificada como correctas pero falsas".

"En vez de desarrollar las herramientas analíticas y topológicas que soportan la forma de razonar italiana (Lefschetz, Hodge, et. al.) los bourbakistas eligen la ruta de la algebraización (Zariski, Weil, Grothendieck). Esta elección me parece significativa. En el caso de Weil, me pregunto si no estaba pervirtiendo sus inclinaciones naturales. Siempre tuve la impresión de que él pensaba analíticamente pero era lo bastante brillante como para adoptar modos de

Bourbaki conoce el problema de la relación entre geometría y aritmética, que es muy antiguo y fue discutido por los eleatas, y en *La arquitectura de las matemáticas* escribe:

> " De hecho, aparte de la matemática aplicada, siempre ha existido una dualidad entre los orígenes de la geometría y de la artimética (ciertamente, en sus aspectos elementales) , ya que la última era en sus comienzos una ciencia de las magnitudes discretas mientras que la primera siempre ha sido una ciencia del continuo. Estos dos aspectos han desembocado en dos puntos de vista que han sido opuestos el uno con el otro desde el descubrimiento de los irracionales. De hecho, es precisamente este descubrimiento lo que frustró el primer intento de unificar la ciencia: a saber, la aritmetización de los Pitagóricos ('todo son números')".

Si retrocedemos un siglo encontramos a Augustus de Morgan escribiendo:

> "El razonamiento geométrico y los procesos aritméticos tienen cada cual su propia oficina. Mezclarlos en la instrucción elemental es perjudicial para la adquisición adecuada de ambos".

Retrocedemos otros mil trescientos años y en el quadrivium de Boecio encontramos las matemáticas divididas en aritmética y geometría, música y astronomía, siendo el segundo par las versiones aplicadas del primero. Esto es por tanto también una división en dos. Por otra parte, J. J. Sylvester, en [su conferencia] *"Una lección liberadora sobre Geometría"*[26], el 4 de diciembre de 1854 dijo:

> "Hay tres ideas dominantes: tres, por así decirlo, esferas de pensamiento que impregnan la totalidad de la ciencia matemática, a una u otra de las cuales –o a dos o a todas ellas combinadas– toda verdad matemática puede ser referida. Éstas son las tres nociones cardinales de número, espacio, y orden".
>
> "La aritmética tiene como objetivo estudiar las propiedades de los números en sentido abstracto. En álgebra, vista como la ciencia de las operaciones, el orden es la idea predominante. El negocio de la geometría es la evolución de las propiedades y las relaciones del espacio, o de los cuerpos vistos como existentes en el espacio... ".
>
> "La provincia del metafísico es investigar la naturaleza del espacio como existe en sí mismo o en relación a la mente humana. El negocio (menos ambicioso pero más satisfactorio) del geómetra es tratar el espacio como una realidad objetiva...".

---

razonamiento no congénitos. Esta puede ser la razón por la que su libro *Fundamentos de la Geometría Algebraica* es generalmente considerado engorroso".

[26]Ver sus *Collected Works* [M23].

> "Pero a partir del descubrimiento de las secciones cónicas, atribuido a Platón[27], la ley de gravitación universal podría no haber sido obtenida hasta ahora. Poco podía el propio Platón haber imaginado que estaba escribiendo la gramática del lenguaje en el que se demostraría en épocas posteriores que están escritas las páginas del universo".
>
> "Aquel que conozca qué es la geometría debe aventurarse en sus profundidades y aprender a pensar y sentir como un geómetra".

Pero las tres divisiones de Sylvester podrían reducirse a dos, tratando el orden como una superestructura de las otras dos, y uno podría preguntarse si otra (y definitiva) reducción es posible[28]. Yo especularía, sin embargo, que la separación fisiológica por el cerebro del procesado de lo espacial y el procesado del pensamiento temporal apoya la tesis de que una unificación completa de las matemáticas no es posible.

Vamos pues a considerar estas dos intuiciones, la aritmética y la geométrica.

Las dos intuiciones no son disjuntas: el lenguaje de cada una de ellas es lo bastante rico como para permitir traducciones de la otra. Dentro de la teoría de conjuntos uno puede realizar un simulacro de la recta real construyendo primero los racionales y entonces (digamos) las cortaduras de Dedekind, y uno puede resaltar puntos equiespaciados en una recta como [representación de los] puntos enteros. Pero cuando se realizan estas traducciones, las paradojas son propensas a surgir, ya que las traducciones lo son de propiedades formales y no de las intuiciones subyacentes.

Así los Pitagóricos deseaban creer que todo son números, pero quedaron consternados ante la demostración de que la diagonal de un cuadrado es incon-

[27]Hoy en día se atribuye el descubrimiento de las cónicas más bien a Menecmo (siglo IV a.C.), que fue discípulo de Platón y de Eudoxo. Naturalmente, el tratado más famoso es el de Apolonio, redactado en el siglo siguiente. [Nota del editor, J.F.]

[28]Sobre este tema el mismo crítico amistoso escribe: "Freeman Dyson, en el capítulo 3 de su libro [F4], habla extensamente sobre los unificadores y los diversificadores. Los unificadores gozan con la unidad y los diversificadores con la diversidad. Siempre he creído que los matemáticos tienden a ser unificadores. Por otra parte, creo que los téoricos conjuntistas que posean un fuerte interés en la técnica de *forcing* casi nunca lo son.

Pienso que en el caso de Bourbaki la distinción de Dyson es más vital que la tuya. Bourbaki estaba interesado en la unidad por encima de cualquier otra cosa. Se puede lograr cierto grado de unidad extendiendo cuidadosamente la teoría de la medida, o convirtiendo una teoría analítica en una teoría algebraica, ampliando su campo de aplicación y capturando más casos simultáneamente. Parece que el álgebra es la bestia de carga del unificador. Bourbaki intenta hacer claro el contenido combinatorio, en cierto sentido, de aquellas ramas de las matemáticas que estaban "maduras" para este tratamiento".

¿Cómo, pregunto, se diferencia la distinción de Dyson de la realizada entre creación y consolidación en el primer párrafo de este ensayo?

mensurable con su lado. Aquí, importar una sencilla construcción geométrica generó una paradoja aritmética.

Stifel (1487-1567) preguntó qué son los irracionales: la geometría sugiere que son admisibles, pero como longitudes, no como números. Stifel escribió: "un irracional no es un número real porque yace bajo la sombra del infinito". Él no creía en $\sqrt{2}$.

En la otra dirección está la paradoja de Banach-Tarski, según la cual una esfera se puede descomponer en un número finito de piezas que pueden reordenarse, mediante traslaciones espaciales y rotaciones, para formar dos esferas del mismo tamaño que la original. La demostración de esto se deduce del argumento de Schröder-Bernstein, en conjunción con el axioma de elección (en ausencia del cual el teorema de Banach-Tarski podría fallar).

Aquí argumentos que son naturales en un contexto conjuntista conducen a conclusiones que son geométricamente paradójicas. Esto es similar en espíritu al resultado de Fibonacci en el siglo trece de que la solución de cierta cúbica no es uno de los irracionales de Euclides.

La actitud tomada por Bourbaki respecto al tema de la geometría *versus* la aritmética es aún hoy relevante, puesto que recientemente el distinguido matemático americano Saunders Mac Lane ha pedido la revitalización de la discusión sobre la filosofía de las matemáticas y ha criticado lo que denomina la Gran Fundación Conjuntista de la Matemática en frases como:

> "la Gran Fundación Conjuntista es una visión erróneamente unilateral de las matemáticas. La teoría de conjuntos es bastante irrelevante para la práctica de la mayor parte de las matemáticas";
>
> "el Logicismo, el formalismo y el Platonismo han estado demasiado dominados por las nociones de teoría de conjuntos y rigor deductivo";

Ha habido también críticas como la de Thom:

> "la teoría de conjuntos parece suprimir a la geometría",

y, antes de todas estas, la deliciosa nota final del artículo de 1922 de Skolem, que reza, traducida a grandes rasgos, así:

> "el resultado más importante anterior es la relatividad de los conceptos de la teoría de conjuntos. Mencioné esto oralmente al profesor F. Bernstein en Götinga en el invierno de 1915/16. Hay dos razones por las que no he publicado nada sobre esto antes: primero, desde entonces he estado ocupado en otras materias; la segunda es que pensé que estaba tan claro que esta teoría axiomática de conjuntos era insatisfactoria como fundamento de las matemáticas que la mayoría de los matemáticos no se preocuparían por ella. Recientemente he observado, para mi sorpresa, que muchos matemáticos tratan la teoría de conjuntos como el fundamento ideal de las

> matemáticas. Me parece, por tanto, que ya es hora de publicar una crítica[29]".

Sugiero que este ataque no ha sido renovado debido al conocimiento de la lógica matemática de Bourbaki, fosilizado[30] en su nivel de 1929. Mac Lane, que, habiendo sido alumno de Bernays entre 1930 y 1933, tiene una comprensión mucho más fuerte de la lógica de la que poseen los bourbakistas, está, en otras palabras, atacando una posición de la que los lógicos se han estado alejando los últimos 60 años, pero en la que los matemáticos se encuentran aún.

Este no es el lugar para iniciar una discusión completa sobre la fortalezas y las debilidades del punto de vista mantenido por Mac Lane en su libro *Matemáticas: forma y función*, pero algunas breves observaciones son pertinentes.

Contra Skolem yo sostendría que no existe una fundamentación definitiva de las matemáticas, pero la teoría de conjuntos captura una parte substancial de las matemáticas. Estaría de acuerdo con el primer comentario de Mac Lane y con el de Thom, y los relaciono con mi idea de que la teoría de conjuntos está más en el lado aritmético que en el lado geométrico de las matemáticas. Matizaría el segundo argumento de Mac Lane diciendo que la teoría de conjuntos no es particularmente relevante para la práctica de la geometría, pero es muy importante para la aritmética en su sentido más general.

Aunque estoy bastante de acuerdo con la tercera crítica de Mac Lane, cuestiono su uso de la expresión: *la teoría de conjuntos y el rigor deductivo.* Él piensa que ambas cosas están estrechamente relacionadas y objeta que ellas [son sólo] una mascarada de la solución final para las matemáticas. Yo quisiera separarlas. La lógica es el estudio de nuestro uso del lenguaje[31]. La teoría de conjuntos es el estudio de la buena fundación y no, como piensa Mac Lane, el estudio del proceso de formación de conjuntos.

Esta es la gran diferencia entre Zermelo-Fraenkel y Zermelo –más precisamente, el subsistema de Zermelo que uno podría denominar teoría de conjuntos de Mac Lane, en vista del apoyo que Mac Lane le ha prestado en sus libros y en sus artículos. Es un sistema ideado para permitir la formación de conjuntos y adecuado para las consideraciones geométricas. El sistema de Zermelo-Fraenkel contiene además los instrumentos necesarios para llevar a cabo las definiciones por recursión. Es decir, permite construir estructuras dentro de lo desconocido. Este elemento, que es además el punto focal de la teoría de conjuntos de Kripke-Platek, es adecuado para el lado aritmético de las matemáticas.

[29] Ver [M22].

[30] De hecho, según la leyenda, un miembro del grupo Bourbaki dijo, en una charla dada en Princeton a una audiencia que incluía a Gödel, que nada había sucedido en lógica desde Aristóteles. ¿Puede algún lector informarme de quién fue?

[31] Esta afirmación podría ser calurosamente contestada por muchos, pero dicha respuesta sólo reforzaría mi convicción de que la lógica no es lo mismo que la teoría de conjuntos.

En la teoría de conjuntos de Zermelo uno no puede demostrar que todo buen orden es isomorfo a un ordinal de von Neumann, no puede demostrar la existencia del ordinal de von Neumann $\omega + \omega$, aunque uno puede probar la existencia y buena fundación de órdenes lineales con ese tipo de orden. Uno no puede justificar la recursión sobre los ordinales o sobre relaciones bien fundadas arbitrarias. Así, la inducción, que está en el corazón de la aritmética, se pierde en (grandes partes de) la geometría. Por otra parte, la intuición espacial está ausente en la aritmética. De manera que necesitamos de ambas.

La concepción geométrica de los enteros como puntos equiespaciados en una recta sugiere que todos los números naturales están al mismo nivel, lo que en términos rusellianos significa que son del mismo tipo. En la concepción geométrica, el 0 es el número natural más simple y los números positivos mayores se generan a partir de y son por tanto más complejos que los menores, de modo que no hay dos números naturales distintos que tengan igual tipo[32]. Resulta violento intentar subordinar cualquiera de estas intuiciones a la otra. Quizás deberíamos buscar una filosofía de las matemáticas que permita desarrollar ambas intuiciones en saludable interacción.

La teoría de conjuntos que propone Mac Lane en su libro como base para las matemáticas es un subsistema de la la teoría de conjuntos de Zermelo más el axioma de elección. Sus propuestas, por tanto, no hacen nada por responder las críticas hechas aquí, en el sentido de que Bourbaki presenta una visión pre-Gödeliana de las matemáticas, y de una porción de las matemáticas, sesgada hacia la geometría.

[32]Esta sucesión de enteros "aritméticos" está hermosamente capturada por la definición de von Neumann de número ordinal. Es por esta razón que no puedo aceptar el punto de vista del profesor Mac Lane según el cual la definición de von Neumann es un mero "truco publicitario".

Dejadme finalizar con una observación positiva, recordando una afirmación de Jean Dieudonné:

> "No hemos comenzado a comprender la relación entre las matemáticas conceptuales y la combinatoria".

y sugiriendo que ambas, la filosofía que reclama Mac Lane y la comprensión que busca Dieudonné, emergerán de un estudio renovado de la relación que existe entre aritmética y geometría.

REFERENCIAS

TRABAJOS MATEMÁTICOS

[M1] K. BORSUK AND W. SZMIELEW, *Foundations of Geometry*, North Holland, 1960, pp 277, 435.

[M2] N. BOURBAKI, L'Architecture des Mathématiques, in [M15], pp 35–47.

[M3] N. BOURBAKI, The Architecture of Mathematics. *American Mathematical Monthly* **57** (1950), 221–232.

[M4] N. BOURBAKI, Foundations of Mathematics for the Working Mathematician, *Journal of Symbolic Logic*, **14** (1948) pp 1–14.

[M5] H. CARTAN, Sur le Fondement logique des Mathématiques, *Revue Scientifique*, **81** (1943), 3–11.

[M6] J. CAVAILLÈS, Volumes 608 and 610 of the series *Actualités scientifiques et industrielles: le Progrès de l'Esprit*, Hermann, Paris 1938. See also *Sur la Logique et la Théorie de la Science*, Presses Universitaires de France, 1947.

[M7] C. CHEVALLEY, *Mathematical Intelligencer* **7** (1985), (2) p 18; see also *Mathematical Intelligencer* **8** (1986), (2), p 5.

[M8] J. DIEUDONNÉ, Les Méthodes Axiomatiques Modernes et les Fondements des Mathématiques, *Revue Scientifique* **77** (1939), pp 224–232.

[M9] J. DIEUDONNÉ, David Hilbert, in [M15], pp 291–297.

[M10] J. DIEUDONNÉ, *A Panorama of Pure Mathematics*, Academic Press, New York 1982.

[M11] S. FEFERMAN, Hilbert's program relativized: Proof-theoretical and foundational reductions, *Journal of Symbolic Logic* **53** (1988) pp 364–384.

[M12] D. HILBERT AND W. ACKERMANN, *Grundzüge der Theoretischen Logik*, Springer Verlag, Berlin, 1928.

[M13] D. HILBERT, Gesammelte Abhandlungen, 3. Band, 378–387, Berlin 1935; reprinted Chelsea, New York 1965.

[M14] A. LAUTMAN, Volume 591 of the series *Actualités scientifiques et industrielles: le Progrès de l'Esprit*, Hermann, Paris 1938. See also his *Collected Works*, 1977.

[M15] F. le Lionnais (ed.), *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique*, Cahiers du Sud, 1948; reviewed by S.Mac Lane in *Mathematical Reviews* **10**, 230.

[M16] S. Mac Lane, *Mathematics: Form and Function*, Springer Verlag, New York 1986.

[M17] A. R. D. Mathias, The Strenght of Mac Lane Set Theory, *Annals of Pure and Applied Logic* **110** (2001) 107–134.

[M18] W. Sieg, Hilbert's program sixty years later, *Journal of Symbolic Logic* **53** (1988) 338–348.

[M19] W. Sierpiński, *Leçons sur les nombres transfinis*, Collection Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[M20] S. Simpson, Partial Realisations of Hilbert's Programme, *Journal of Symbolic Logic* **53** (1988) 349–363.

[M21] S. Simpson, Ordinal Numbers and the Hilbert Basis Theorem, *Journal of Symbolic Logic* **53** (1988) 961–974.

[M22] Th. Skolem, Einige Bermerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, to be found in *Mengenlehre*, an anthology of papers written since 1874 on the mathematical, metamathematical and philosophical aspects of set theory, selected and introduced by Ulrich Felgner, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1979.

[M23] J. J. Sylvester, *Collected Works*, Volume II, p 5, Cambridge 1908; reprinted Chelsea, New York, 1973.

[M24] A. Weil, *L'Avenir des mathématiques*, in [M15], 307-320; also in his *Collected Works*, 1947a.

Trabajos sobre Historia

[H1] Y. Belaval, *Leibniz critique de Descartes*, Gallimard, Paris, 1960, 1978.

[H2] H. R. Trevor-Roper, *Baron Dacre of Glanton*, The Paracelsian Movement, in *Renaissance Essays*, Secker and Warburg 1985.

[H3] G. Ferrières, *Jean Cavaillès: un philosophe dans la guerre, 1903-1944,* Éditions du Seuil, Paris, 1982.

[H4] A. Koyré, Rapport sur l'état des études hegeliennes en France, *Revue d'histoire de la philosophie*, **5**:2 (April-June 1931) p. 147.

[H5] P. Mancosu, The Metaphysics of the Calculus: a Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700–1706: to appear in *Historia Mathematica* **16** (1989).

[H6] M. Poster, *Existential Marxism in Postwar France from Sartre to Althusser*, Princeton University Press, 1975.

TRABAJOS SOBRE FISIOLOGÍA

[P1] M. ANNETT, *Left, Right, Hand and Brain: the Right Shift Theory*, Erlbaum, New Jersey, 1985.

[P2] A. BEATON, *Left Side, Right Side: a Review of Laterality Research*, Batsford 1985.

[P3] S. P. SPRINGER AND G. DEUTSCH, *Left Brain, Right Brain*, W.H.Freeman, New York, 1981, 1985.

OTRAS LECTURAS

[F1] J.T. BALDWIN (EDITOR), *Classification Theory,* Springer Lecture Notes in Mathematics **1292**.

[F2] J. DENEF, p-adic semi-algebraic sets and cell decomposition *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **369** (1986) 154–166.

[F3] J. DENEF AND L. VAN DEN DRIES, p-adic and real subanalytic sets, *Annals of Mathematics*, **128** (1988) 79–138.

[F4] F. DYSON, *Infinite in all directions,* Harper and Row 1988.

[F5] A. MACINTYRE, On definable subsets of p-adic fields *Journal of Symbolic Logic*, **41** (1976) 605–610.

NOTA BIBLIOGRÁFICA:

Además del presente trabajo, A. R. D. Mathias ha escrito otros dos artículos relacionados con este tema:

[MA1] A. R. D. MATHIAS, A term of lenght 4,523,659,424,929, *Synthese*, **133** (2002) 75–86.

[MA2] A. R. D. MATHIAS, *Further remarks on Bourbaki*, Manuscrito inédito, disponible en la página web: `http://www.dpmms.cam.ac.uk/~ardm/segal.ps`

A. R. M. Mathias
Université de La Réunion
Faculté des Sciences et Technologies
Depart. Mathematiques
15, av. René Cassin
BP 7151
97715 Saint-Denis Messag. Cedex
Isla Reunión
Correo electrónico: `ardm@univ-reunion.fr`
Traducido del inglés por: J. M. Almira
Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén