Emmy Noether y el inicio del Álgebra Abstracta

por

Pilar Carrasco

In the judgment of the most competent living mathematicians, Fräulein Noether was the most significant creative mathematical genius thus far produced since the higher education of women began. In the realm of algebra, in which the most gifted mathematicians have been busy for centuries, she discovered methods which have proved of enormous importance in the development of the present-day younger generations of mathematicians.

Albert Einstein, The New York Times (5 de mayo de 1935)

Emmy Noether nació en Erlangen, Alemania, el 23 de marzo de 1882. Su nombre era realmente Amalie, pero la llamaban siempre 'Emmy'. Su padre, Max Noether, fue un notable matemático en su época y profesor en Erlangen; su madre, Ida Amalie Kaufmann, procedía de una familia acomodada de Colonia. Ambos eran de origen judío y Emmy, la mayor de cuatro hermanos, sobrevivió a la niñez junto con su hermano Fritz.

Emmy Noether estudió en el *Höhere Töchter Schule* en Erlangen desde 1889 hasta 1897. De niña, no se interesó especialmente por las matemáticas, sino que prestó más atención en el colegio al estudio de idiomas, en especial francés e inglés. Su madre le enseñó las habilidades tradicionales que había de tener una mujer de su época. Aprendió a cocinar, limpiar y recibió clases de piano y danza. Amaba la danza y le encantaba ir a fiestas con los hijos de los colegas de su padre. Su deseo era ser profesora de idiomas y, después de obtener el grado de bachiller, se preparó para los exámenes que aprobó en el año 1900, obteniendo el título de profesora de francés e inglés para impartir clases en los colegios de niñas del Estado de Baviera.

Emmy Noether en 1907

Sin embargo Emmy Noether nunca llegó a ejercer esta profesión. En su lugar, a los 18 años, decidió escoger un camino difícil para una mujer en aquel tiempo y estudiar matemáticas en la universidad. En las universidades alemanas no estaba permitido que las mujeres fueran alumnas de forma oficial, aunque le aceptaron asistir a clase como oyente, siempre bajo el permiso de cada profesor. Así estuvo, durante dos años, en la Universidad de Erlangen, donde su hermano Fritz era también estudiante de matemáticas. En 1903 se presentó y aprobó el examen de ingreso en Nüremberg, lo que le permitiría ser una estudiante de doctorado de matemáticas y conseguir, finalmente, ser estudiante oficial en la Universidad. Durante el curso 1903/04 fue a la Universidad de Gotinga y se matriculó en cursos impartidos por Blumenthal, Hilbert, Klein y Minkowski.

Posteriormente, ya en la Universidad de Erlangen, Emmy Noether trabajó bajo la dirección del profesor Paul Gordan, amigo de su padre, y llamado por sus alumnos *el rey de la teoría de invariantes* (título que se ganó por su increible habilidad en hacer cálculos mentales). Gordan dirigió su tesis doctoral sobre 'Los sistemas completos de invariantes para las formas bicuadráticas ternarias' (listando los sistemas de 331 formas covariantes), que defendió el 13 de diciembre de 1907 y obtuvo la calificación de *summa cum laude*. Noether fue así la segunda mujer en Alemania en doctorarse en matemáticas, después de Sonia Kovalevskaya (veáse LA GACETA 7.1, 73–100).

Paul Gordan

Terminado su doctorado, hubiera sido natural que continuara su carrera académica hasta la habilitación como profesora en la Universidad. Esta posibilidad le estaba vetada a las mujeres y Noether permaneció en Erlangen para ayudar a su padre, e impartir alguna de sus clases en el Instituto de Matemáticas de Erlangen, cuando él estaba enfermo. No obstante, ella comenzó a hacer su propia investigación y a publicar sus primeros artículos; en particular fue esencial para el desarrollo de Noether como matemática la influencia de Ernst Fischer, quien sustituyó a Gordan en 1911 y la llevó del tipo de investigación de Gordan hacia los métodos más abstractos de David Hilbert. La reputación de Noether comenzó a crecer cuando aparecieron sus publicaciones. En 1908 entró a formar parte del *Circolo Matemático di Palermo* y en 1909 de la *Deutsche Mathematiker Vereinigung*, en este mismo año fue invitada al congreso anual de la Sociedad de Salzburgo. En 1913 impartió una conferencia en Viena.

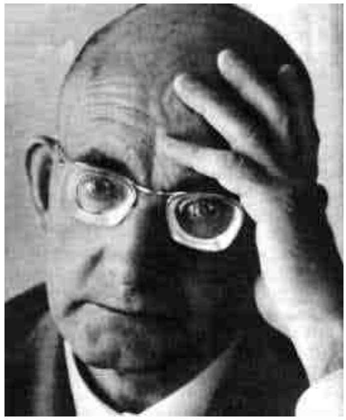
El conocimiento de Noether sobre teoría de invariantes resultó ser de utilidad en las investigaciones que Hilbert estaba realizando sobre la teoría de la relatividad de Einstein; en la primavera de 1915 Noether aceptó la invitación de Hilbert y Felix Klein a trasladarse a la Universidad de Gotinga. Hilbert intentó sin éxito que las autoridades de la universidad le concedieran un puesto. En uno de sus intentos ante el claustro de la Facultad, Hilbert dijo: "No veo que el sexo de la candidata sea un argumento contra su admisión como *Privatdozent*. Después de todo somos una universidad y no una casa de baños". En 1919, un año después del final de la Primera Guerra Mundial, Alemania pasó a ser una República, los derechos de las mujeres mejoraron y en particular adquirieron el derecho al voto. Noether consiguió finalmente un puesto especial como profesora que, si bien no incluía un salario, era un título que le permitía enseñar con su propio nombre. Tres años después, se le asignó una retribución.

Durante el tiempo que Noether permaneció en Gotinga, el Instituto de Matemáticas era conocido informalmente como 'La Meca de las Matemáticas'. Quizá nunca haya habido un departamento de matemáticas formado por miembros tan prestigiosos, que haya atraido a visitantes de todo el mundo, como el de Gotinga durante el periodo 1923-1933. En este contexto, al principio de los años treinta, el círculo de algebristas alrededor de Noether había alcanzado el reconocimiento de ser el más activo en el Instituto; Noether también, juntó a un grupo de estudiantes, conocidos como 'los chicos de Noether', que venían de lugares tan alejados como Rusia, para poder estudiar con ella. Ella era una persona amable que se preocupaba mucho por sus discípulos, a los que consideraba parte de su familia y siempre deseaba escuchar sus problemas. Su estilo de enseñanza era muy difícil de seguir aunque permitió a sus discípulos desarrollar sus propias ideas. Muchos de estos discípulos fueron después grandes matemáticos.

Emmy Noether al fin recibió reconocimiento por sus ideas. Si previamente, en los años 1923-25, tenía que demostrar la importancia de las teorías que había desarrollado; en 1932, en el Congreso Internacional de Matemáticas en Zürich, Noether fue plenamente aclamada. Su verdadero triunfo fue el pleno reconocimiento del trabajo matemático realizado; trabajo que ella misma leyó, en forma resumida, a los asistentes al congreso. En el congreso de Zürich, Noether alcanzó sin duda el punto más alto de su reputación científica internacional.

En 1933, con la llegada de Hitler y el partido Nazi al poder, todo la excelencia de Gotinga se dispersó a los cuatro vientos. Los grandes logros matemáticos de Noether no contaron para nada cuando los nazis la obligaron a dimitir por su origen judío. El gran matemático P. S. Alexandroff amigo de Noether, se encargó de encontrarle una salida en Rusia, pero, finalmente, con la ayuda de la Fundación Rockefeller, buscó refugio en Estados Unidos. Trabajó como profesora de Matemáticas en el Bryn Mawr College, una universidad femenina, durante el curso 1933-34 y colaboró con el Instituto para Estudios Avanzados de Princeton, donde trabajaba en ese momento Einstein. Fue también miembro de la AMS.

E. Noether en Zürich en 1923



P.S. Alexandroff

Emmy Noether murió en Princeton el 14 de abril de 1935, a los 54 años, de complicaciones cardíacas tras una intervención quirúrgica. Su muerte sorprendió a todos, casi nadie sabía que estaba enferma, le habían detectado un cáncer de mama y únicamente lo conocían sus amigos más cercanos.

Las matemáticas de Noether

> *Ella originó sobre todo un estilo nuevo de pensar en álgebra que marcó una época.*

Con estas palabras Herman Weyl [34] describió el legado de Emmy Noether en álgebra. Quizá, mas que cualquier otra persona, Emmy Noether se identifica con el enfoque axiomático en matemáticas, pero este hecho es particularmente cierto en álgebra. Su idea revolucionaria fue trabajar de forma abstracta con anillos e ideales y en este sentido, su gran amigo P.S. Alexandroff en [1] hace el siguiente comentario:

> Fue ella quien nos enseñó a pensar en términos de conceptos algebraicos generales –homomorfismos, grupos y anillos con operadores, ideales– más que en términos de complicados cálculos algebraicos. Ella, por tanto, nos llevó a descubrir principios algebraicos unificadores en lugares donde previamente éstos habían estado tapados por complicadas condiciones específicas que la matemática clásica no reconocía como algebraicos.

y J. Dieudonne en [12] nos dice:

> En 1925, Emmy Noether estaba abordando el proceso de rehacer enteramente el álgebra..., dando prioridad sistemáticamente a los conceptos sobre los cálculos. En lo que se refiere, en particular, al álgebra lineal, la liberó de la plaga de matrices y determinantes que había estado sufriendo durante un siglo, sustituyendo estas herramientas sin significado geométrico por las ideas intrínsecas de módulos y homomorfismos.

Herman Weyl divide la producción científica de Noether en tres épocas agrupadas en los periodos 1908-1919, 1920-1926 y 1927-1935. Alexandroff en su discurso [1] expresa:

> Cuando hablamos de Emmy Noether como matemática... queremos decir no tanto sus trabajos iniciales, sino mas bien el periodo que se inicia alrededor de 1920 que es cuando ella descubrió el camino hacia una nueva clase de álgebra, llegando a ser la líder de la... *begriffliche Mathematik*.

En este artículo nos centraremos en la segunda de estas épocas, y para un detallado estudio del trabajo de Noether en las otras dos épocas remitimos al lector a [5] y a [6], en este mismo volumen.

Señalemos, no obstante, que en la primera época, como ya comentábamos en la breve introducción biográfica, su trabajo se centró en teoría de invariantes (diferenciales) y sus conexiones con la teoría de la relatividad de Einstein. Destacan fundamentalmente los artículos [25] y [26]. El segundo de ellos, que Noether presentó para su habilitación en 1918, incluye un teorema hoy conocido como 'Teorema de Noether', que según el físico Peter G. Bergmann constituye una de las piedras angulares en teoría de la relatividad [19]. Cuando Einstein leyó el trabajo de Noether, escribió a Hilbert, "Ayer recibí de Miss Noether un artículo muy interesante sobre formas invariantes... ella ciertamente sabe realmente lo que está haciendo" [20].

Las investigaciones de Emmy Noether en el periodo 1920-1926 están en torno a la teoría de anillos conmutativos y de lo que, en ese tiempo, fue llamado 'la teoría general de ideales'. De los trabajos que realizó en este área destacamos fundamentalmente dos: *Idealtheorie in Ringbereich* [27] de 1921, y *Abstrakter Aufbau del Idealtheorie in Algebraischen Zahl- und Funktionskörpern* [29] de 1926 (también hay que resaltar el artículo [28] donde Noether demuestra el conocido 'Lema de Normalización', fundamental por sus aplicaciones, entre otras, en el estudio de la dimensión de variedades algebraicas). El primero de estos trabajos fue calificado posteriormente por I. Kaplansky [18] de 'revolucionario', por su influencia en el desarrollo de la teoría general de ideales. Con él, Noether comenzó a ser reconocida como matemática por derecho propio y no como ayudante de Hilbert o Klein. En ambos artículos presenta un elegante enfoque abstracto que fue muy novedoso por aquel tiempo, y en los que además obtuvo resultados nuevos y significativos que no habían sido probados en los casos particulares. Sus resultados indicaban de forma tangible el potencial del enfoque axiomático, así como presagiaban la riqueza de las nuevas matemáticas que iban a producirse. Los puntos de vista iniciados por Noether en estos trabajos y posteriormente desarrollados por W. Krull (alumno de Noether que estuvo el año académico 1921/22 en Gotinga) originaron esencialmente la materia que llamamos *Álgebra Conmutativa*.

E. Artin

Van der Waerden

La comunidad matemática fuera de Alemania comenzó a conocer el contenido de estos dos artículos y, en general la ideas de Noether, a través del tratado de álgebra de Van der Waerden *Moderne Algebra*, hoy con el título de *Algebra* [32], basado en apuntes tomados a Noether y Artin (de hecho, él mismo dice en el prefacio que realmente su tratado tiene varios autores, entre los que incluye a Emmy Noether y a Artin). En el capítulo 15 (12 en la primera versión) se estudian los resultados principales de [27], mientras que el capítulo 17 (15 en la primera versión) es una traducción de [29]. Dieudonné en [11] comenta:

> Cuando estos libros salieron a la venta (1930), causaron una gran impresión, el conocimiento del álgebra en ese momento era ínfimo, un poco de determinantes y de resolubilidad de ecuaciones; no se sabía lo qué era un ideal y sólo un poco lo que era un grupo.

Van der Waerden llegó a Gotinga en el otoño de 1924. Enseguida dominó las teorías de Noether y fue su principal difusor. Sin duda *Moderne Algebra* fue el medio a través del cual la influencia de Noether ha sido mayor.

Históricamente el desarrollo de la teoría de ideales tiene dos puntos de partida: La teoría de ideales de anillos de enteros algebraicos de R. Dedekind, y la teoría de ideales en anillos de polinomios iniciada por Hilbert, Lasker y

Macaulay. Sin embargo estas dos teorías se desarrollaron para tratar problemas completamente diferentes. En el primer caso el problema central era el de factorización, esto es, la formulación de un teorema fundamental de la aritmética (cada número entero se expresa de forma única como producto de números primos) para otros números además de los enteros. Mientras que en el caso de ideales de anillos de polinomios, las cuestiones que se planteaban eran la determinación de los ceros de un ideal (esto es, de las soluciones de un sistema de ecuaciones polinómicas), y el establecimiento de las condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio pertenezca a un ideal.

La teoría de anillos e ideales estaba en aquel tiempo en su etapa inicial (para un interesante estudio histórico del tema véase [2] y, para el caso de módulos [24]). R. Dedekind en 1871 introduce el término *ideal*, aunque no el concepto moderno, para anillos (Dedekind los llama *Ordnung*) de enteros algebraicos (brevemente, por un entero algebraico se entiende un número complejo que es raíz de un polinomio mónico con coeficientes enteros). Posteriormente Hilbert en 1894 usó el término *anillo* (*Zahlring* o *Ring*), también en el contexto de números algebraicos, para lo que Dedekind había llamado *Ordnung*, y utiliza ya la terminología de ideales para anillos de polinomios. En 1914, A. Fraenkel, estimulado por los *Zahlring* de Hilbert así como por los sistemas de números hipercomplejos y anillos de matrices, define un concepto abstracto de anillo aunque su definición no es la usada comúnmente hoy.

Los conceptos modernos de anillo, ideal y módulo sobre un anillo aparecen por primera vez en el artículo de Noether '*Idealtheorie...*' (aunque parece que la definición actual de anillo conmutativo fue previamente establecida por M. Sono en 1917 [15]). Noether extiende la definición de ideal en un anillo de enteros o en un anillo de polinomios, a anillos conmutativos en abstracto: Un ideal de un anillo conmutativo $R = (R, +, \cdot)$ es subgrupo aditivo α, que contiene a todos los productos ra para cualesquiera $r \in R$ y $a \in \alpha$. Pero sin duda, el concepto más importante en [27] es el de la *condición de cadena ascendente* (CCA) para ideales. Explícitamente, un anillo conmutativo R satisface esta condición si toda cadena ascendente de ideales de R:

$$\alpha_1 \subseteq \alpha_2 \subseteq \cdots \subseteq \alpha_n \subseteq \cdots$$

es estacionaria, esto es, existe $k \geq 1$ tal que $\alpha_k = \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \cdots$.

Esta condición había sido previamente estudiada por Dedekind en 1894 [13] y Lasker en 1905 [22]. La principal contribución de Noether fue definirla en un contexto abstracto y mostrar su importancia y naturalidad. Es fundamentalmente por el artículo '*Idealtheorie...*' que los anillos que verifican la CCA se llaman *anillos noetherianos* (denominación que se cree debida a C. Chevalley [7]). El anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$ es un anillo noetheriano.

En 1890 Hilbert había probado [16] el, hoy día conocido como, *teorema de la base de Hilbert* para el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, que establece que todo ideal en el anillo de polinomios $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ es finitamente generado. Noether demuestra que este resultado también es cierto para anillos noetherianos, es decir: un anillo conmutativo R satisface la CCA para ideales si, y solamente si, todo ideal α de R es finitamente generado (esto es, existen elementos $a_1, \cdots, a_s \in \alpha$ de forma que todo elemento de α es combinación lineal de ellos, con coeficientes en R). La otra forma familiar, equivalente a la CCA, es la condición de *maximalidad* por la que toda familia no vacía de ideales del anillo tiene un elemento maximal. R. Gilmer comenta en [15] que esta condición no aparece en [27] y, por ello, algunas demostraciones de resultados estándar son mas largas de lo esperado.

El objetivo principal de Noether en [27] es la obtención, en el contexto general de anillos conmutativos noetherianos, de la *descomposición primaria de ideales*. Expliquemos esto, en el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$ todo ideal es principal (i.e., está generado por un entero positivo) y entonces, por el teorema fundamental de la aritmética, todo ideal en $\mathbb{Z}$ se expresa como producto finito de ideales primos (un ideal π, de un anillo conmutativo R, se dice *primo* si siempre que $ab \in \pi$, con $a, b \in R$, entonces o bien $a \in \pi$ ó $b \in \pi$). Sin embargo, en general, aún en el caso noetheriano, no cabe esperar dicha descomposición de ideales. El concepto que aquí aparece, algo más sutil, es el de ideal *primario* que más adelante concretaremos. Previamente, señalemos que la cuestión de obtener una descomposición primaria surge inicialmente a raíz del problema de determinar cuándo un polinomio $f \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ pertenece al ideal generado por un conjunto de polinomios dados $f_1, \cdots, f_r$. El teorema de Max Noether (padre de Emmy) resuelve este problema para dos variables, i.e. en $\mathbb{C}[X, Y]$, y en el caso de ideales generados por dos elementos. Parece que Hilbert fue el primero que puso de manifiesto el interés de generalizar este teorema a n variables. En 1905, Emmanuel Lasker, alumno de Hilbert, resuelve este problema probando en [22], que cada ideal de $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ ó de $\mathbb{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ es una intersección finita de ideales primarios. Posteriormente, F.S. Macaulay en [23] dio un proceso algorítmico para determinar una representación primaria de un ideal α, del anillo de polinomios, a partir de un sistema de generadores (finito) de α. Hoy en día, existen algoritmos, implementados por los paquetes matemáticos *CoCoa*, *Singular*, etc., para obtener la descomposición primaria de un ideal en el anillo de polinomios $K[X_1, \cdots, X_n]$, donde K es cualquier cuerpo (véase [9]).

Pues bien, Noether moviéndose de lo concreto, anillos de polinomios, a lo abstracto, un anillo conmutativo noetheriano, obtiene cuatro teoremas de descomposición de ideales. De estos cuatro, el segundo, conocido por el *Teorema de Lasker-Noether*, es el de descomposición primaria y el que más ha perdurado. A continuación enunciamos este teorema y remitimos al lector al artículo de Gilmer [15], donde se exponen las cuatro descomposiciones, y se hace un interesante análisis del tipo de demostraciones que Noether hace en [27], comparándolas con las que aparecen en el libro de van de Waerden. En primer lugar damos la definición de ideal primario: *Un ideal $\mathcal{Q}$ de un anillo conmutativo R se dice primario si $\mathcal{Q} \subsetneq R$, y siempre que $ab \in \mathcal{Q}$, $a, b \in R$, ó bien $a \in \mathcal{Q}$ ó bien $b^n \in \mathcal{Q}$, para algún $n \geq 1$.* El concepto de ideal primario obviamente generaliza el concepto de ideal primo y es fácil encontrar ejemplos de ideales primarios que no son primos (en $\mathbb{Z}[X]$ el ideal de los polinomios con término independiente un múltiplo de 4, es primario y no primo); sin embargo si $\mathcal{Q}$ es un ideal primario, es un ejercicio fácil demostrar que su radical, $\sqrt{\mathcal{Q}} = \{a \in R/a^m \in \mathcal{Q}$ para algún $m \geq 1\}$, es un ideal primo. Entonces el teorema de descomposición primaria establece:

Todo ideal propio (i.e., propiamente contenido en el anillo) α de un anillo conmutativo noetheriano R, admite una descomposición primaria reducida. Esto es una expresión

$$\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{Q}_i, \tag{1}$$

donde cada $\mathcal{Q}_i$ es un ideal primario de R, y tal que $i)$ los ideales primos $\sqrt{\mathcal{Q}_i}$, $i = 1, \cdots, n$, son todos distintos, y $ii)$ $\bigcap_{j \neq i} \mathcal{Q}_j \nsubseteq \mathcal{Q}_i$, para cada $1 \leq i \leq n$.

Esta descomposición primaria, que no es necesariamente única, tiene algunos elementos invariantes: Noether demuestra que el conjunto de ideales primos $\{\sqrt{\mathcal{Q}_i}; i = 1, \cdots, n\}$ es independiente de la descomposición de α. Por otro lado, también demuestra la unicidad de las *componentes aisladas.* Aunque no vamos a especificar aquí qué son las componentes aisladas de una descomposición, señalemos que si $\sqrt{\mathcal{Q}_j}$ es minimal entre los ideales primos que contienen a α, entonces el ideal primario $\mathcal{Q}_j$ en (1) es también un invariante, es decir, aparece en cualquier descomposición primaria reducida de α.

La unicidad de las componentes aisladas y de los primos pertenecientes a una descomposición primaria reducida son ejemplos de resultados importantes, que Noether obtuvo y que no aparecían en los trabajos anteriores de Lasker y Macaulay en el contexto concreto de anillos de polinomios.

Acabamos estos comentarios sobre descomposición primaria, señalando que en [27], Emmy Noether también se interesa por descomposición en módulos. Aunque no llega a obtener una generalización de la descomposición primaria reducida a este caso, lo más importante es, como decíamos, que Noether define el concepto actual de *módulo* (izquierda) sobre un anillo R (en principio no necesariamente conmutativo). Obtiene resultados tan conocidos como que *cada submódulo de un R-módulo M, es finitamente generado si, y solamente si, M satisface la CCA para submódulos* (i.e., M es un R-módulo noetheriano). O también, que si *M es un R-módulo finitamente generado y R es un anillo conmutativo noetheriano, entonces M también es noetheriano* (véase [24] para un estudio sobre el origen de los módulos).

El otro de los trabajos de Noether que hemos citado como fundamental en su segunda época es *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen....*, [29]. Su motivación se encuentra, en este caso, en la teoría de ideales en anillos de enteros algebraicos desarrollada por R. Dedekind en [13]. Es destacable que este último fue el primer trabajo en el que los objetos básicos del álgebra fueron introducidos axiomáticamente, estando además escrito, de acuerdo a Bourbaki, “de una forma general y en un estilo completamente nuevo”.

Emmy Noether admiraba mucho el trabajo de R. Dedekind (1831-1916). Esto es evidente no sólo en su trabajo matemático, sino también en su enseñanza. Weyl escribió, [34],

> De sus predecesores en álgebra y teoría de números, Dedekind fue el de más estrecha relación con ella, por el que sentía una veneración profunda. Ella pretendía que sus alumnos leyeran los anotaciones de Dedekind sobre los seminarios de teoría de números de Dirichlet, no sólo en una, sino en todas sus ediciones.

Es en *Abstrakter Aufbau...* donde se aprecia con mayor intensidad su admiración y deferencia hacia él. En una de las notas a pie de página, Noether dice que Dedekind ya conocía, para anillos de enteros algebraicos, que un módulo finitamente generado sobre un anillo noetheriano es un módulo noetheriano, y que en esta demostración de Dedekind es la primera vez que se hace uso de las condiciones de cadena.

En la primera frase de [29], Emmy Noether indica que el propósito del artículo es proporcionar una caracterización abstracta de aquellos anillos cuya teoría de ideales coincida con la de un anillo de enteros de un cuerpo de números algebraicos. Noether da cinco axiomas para caracterizar este tipo de anillos, que hoy en día se llaman *Dominios de Dedekind* (término usado por primera vez por I.S. Cohen en 1950, [8]), esto es, *dominios de integridad* (es decir sin divisores de cero no nulos) *donde todo ideal propio no nulo es un producto finito de ideales primos, y dicha factorización es única.* Para ello, Noether define, en un contexto abstracto, el concepto de *dependencia entera.* Este concepto, que ya aparece en el trabajo de Dedekind, es al artículo *Abstrakter Aufbau...* lo que la CCA es a *Idealtheorie....*, y se ha convertido en un concepto de importancia básica en Álgebra Conmutativa. La definición de Noether es como sigue:

Sea $R \subset T$ una inclusión de anillos, donde T (y entonces también R) es un dominio de integridad. Un elemento $t \in T$ *es entero sobre* R si la sucesión de R-submódulos de T, $\{(t^0, t, \cdots, t^{i-1})\}_{i=1}^{\infty}$ es estacionaria.

Esto es equivalente a que t verifique una ecuación polinómica mónica con coeficientes en R. En el primer apartado de [29], Noether establece algunas de las propiedades básicas de la dependencia entera como por ejemplo, la transitividad de la dependencia entera o que el conjunto de elementos en T enteros sobre R, denominado la *clausura entera* de R sobre T, constituyen un subanillo de T.

Pues bien, los cinco axiomas que Noether formula para caracterizar a los dominios de Dedekind son como sigue:

1) R es noetheriano.

2) R/α es un anillo *artiniano*, para cada ideal no nulo α de R.

3) R tiene elemento unidad.

4) R es un dominio de integridad.

5) R es íntegramente cerrado en su cuerpo de cocientes.

Hagamos algunos comentarios de estos axiomas: En primer lugar, es usual suponer la existencia de elemento unidad en un anillo (y en este trabajo así lo hacemos); Noether, sin embargo, no siempre impone esta última condición y, en la medida en que no la necesita, la omite; de ahí el axioma 3). La condición de *artinianidad* sobre un anillo no es otra que la condición 'dual' de la *noetherianidad*, esto es, la *condición de cadena descendente* (CCD), (i.e., toda cadena descendente de ideales es estacionaria). Poco después del buen partido que sacó Noether de la CCA, E. Artin destacó en 1927 la utilidad de la CCD. Más tarde, Noether en su también famoso trabajo [30], en reconocimiento al trabajo de Artin, obtiene importantes resultados para anillo artinianos no necesariamente conmutativos. El axioma 2) nos dice entonces que toda cadena descendente de ideales de R, que contengan a un ideal no nulo α, es estacionaria. Finalmente, es bien conocido que todo dominio de integridad R, es un subanillo de su *cuerpo de cocientes* $K(R)$ (que se construye, a partir de R, de forma análoga a la construcción del cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ a partir de los enteros $\mathbb{Z}$). El axioma cinco expresa que R coincide con su clausura entera en $K(R)$. En otras palabras, 5) nos dice que si $\frac{a}{b} \in K(R)$ es raíz de un polinomio mónico con coeficientes en R, entonces a es múltiplo de b y consecuentemente $\frac{a}{b} \in R$.

Actualmente hay hasta 37 caracterizaciones de los dominios de Dedekind. Una de las más conocidas establece que un dominio de integridad, R, es un dominio Dedekind si, y solamente si, se verifican en R los axiomas 1), 5) y el siguiente axioma 2'): Cada ideal primo no nulo de R es *ideal maximal* (los ideales maximales son los elementos maximales en el retículo de ideales del anillo). Utilizando el hecho de que la condición de *artinianidad* sobre anillos conmutativos es equivalente a la condición de noetherianidad, junto con la propiedad de que todo primo no nulo es maximal (Akizuki 1935, Cohen 1950, [17]), se sigue que 1) y 2) son equivalentes a 1) y 2'). Los axiomas 1), 2') y 5) se han referido como *los tres axiomas de Noether* (Gilbert-Butts, 1968 [14]), aunque en realidad esta caracterización no aparece en [29].

En *Abstrakter Aufbau...*, Noether frecuentemente hace uso de los resultados de [27], en particular de la descomposición primaria reducida de ideales para demostrar que los ideales de un anillo, verificando los axiomas 1)-5), se expresan de forma única como producto finito de ideales primos. Por otro lado, en la demostración del recíproco, aparece implícita la noción de *ideal invertible* y se define el concepto de *ideal fraccionario*. Aunque en este trabajo no entraremos a especificar estos conceptos, señalemos únicamente que Noether demuestra que en todo dominio donde hay factorización única de ideales por primos, el conjunto de ideales fraccionarios no nulos constituye un grupo con el producto de ideales. Esta última propiedad es la más utilizada, actualmente, para definir a los dominios de Dedekind, [17].

Cada uno de los enunciados y conceptos mencionados anteriormente son reconocidos, por aquellos que ahora trabajan en Álgebra Conmutativa, como estándar y significativos; una prueba de la influencia duradera de Emmy Noether en el área.

Finalmente, el resultado de Dedekind de factorización única de ideales en un anillo de enteros algebraicos es consecuencia de los resultados de [29], pero a la vez se va más allá, Noether concluye que también hay factorización única (i.e., son dominios de Dedekind) de ideales en los anillos que aparecen en el estudio de curvas algebraicas. Aquí se considera un cuerpo $K(X,Y)$, donde K es un cuerpo base, por lo general algebraicamente cerrado, X es transcendente sobre K (i.e., X es una variable) e Y es algebraico sobre $K(X)$, esto es, Y satisface una ecuación de la forma $a_0Y^n + a_1Y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, donde cada $a_i = \frac{p_i(X)}{q_i(X)}$, es un cociente de polinomios con coeficientes en K. Entonces el subanillo de los elementos de $K(X,Y)$ que son enteros sobre $K[X]$, el anillo de polinomios, es un dominio de Dedekind. Este resultado, para el caso en que K sea el cuerpo de los números complejos, había sido ya obtenido por Dedekind conjuntamente con H. Weber en [10], trabajo que puede también considerarse como precursor de *Abstrakter Aufbau...*.

Terminamos este trabajo haciendo unos breves comentarios sobre la tercera y última época de la producción matemática de Noether. En 1926, en contacto con el topólogo holandés L. Brouwer y el topólogo ruso P. Alexandroff (con quien llegaría a tener una gran amistad), Noether observó que sus desarrollos teóricos en módulos tenían aplicaciones en los fundamentos de la topología combinatoria. Concretamente no tuvo dificultad en observar que los números de Betti y los coeficientes de torsión, invariantes numéricos de un espacio compacto triangulado, podían ser sustituidos por módulos de homología (en [12] se hace una explicación detallada de este hecho). Posteriormente, habría de ser H. Hopf, entonces comenzando su brillante carrera que le convertiría en una de las figuras claves de la Topología Algebraica, quien utilizando estos módulos de homología obtendría importantes resultados en Topología Algebraica. No obstante, varios topólogos contemporáneos de Noether, incluido Lefschetz, fueron al principio escépticos con este nuevo punto de vista; pero finalmente la perspicacia de Noether con esta nueva percepción tuvo consecuencias fundamentales en la evolución posterior de la Topología Algebraica.

A partir de 1927, antes de que sus contemporáneos pudieran comprender la verdadera profundidad de su teoría abstracta de ideales en el caso conmutativo, el interés matemático de Noether comenzó a moverse en otra dirección: El álgebra no conmutativa, la teoría de ideales de sistemas hipercomplejos (K-álgebras, en la terminología actual, con K un cuerpo) y sus aplicaciones a representaciones de grupos finitos. Ideales en (y módulos sobre) anillos no conmutativos no son menos naturales que sus análogos en el caso conmutativo. Noether se dio cuenta de ello y vio que sería interesante estudiar una teoría de ideales no conmutativos como medio de estudiar cuestiones aritméticas.


L. Brouwer


H. Hopf

Uno de los trabajos fundamentales del último periodo es *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie* de 1929, [30], que produjo grandes cambios en la teoría de Frobenius de representaciones de grupos. En este trabajo, dividido en cuatro capítulos, Noether desarrolla una teoría de ideales y módulos en anillos no conmutativos verificando ciertas condiciones de finitud, con el objeto de tratar de forma unificada la teoría de estructura de álgebras y la teoría de representaciones de grupos finitos (un estudio detallado de este artículo y su influencia se realiza en [21]; véase también [33]). Noether presenta una versión modulo-teórica de la teoría de representaciones de grupos que no sólo recupera los resultados clásicos de ésta, sino, lo más importante, que permite desarrollar una teoría general de representaciones de grupos y álgebras sobre cuerpos arbitrarios (frente a la teoría clásica válida para cuerpos algebraicamente cerrados y de característica cero). Además, el nuevo punto de vista planteado por Noether siembra la semilla para estudiar la teoría moderna de representaciones enteras (esto es, representaciones sobre anillos conmutativos en general). Los capítulos 16 y 17 del libro de van der Waerden *Moderne Algebra* constituyen una versión completa y elegante de los sistemas hipercomplejos (álgebras) y sus representaciones desde el punto de vista teórico del artículo [30]. La atemporalidad de estos dos capítulos es quizá el mejor testimonio de la profunda influencia de Noether en la materia. Hoy en día la mayoría de los estudiantes aprenden teoría de representaciones con el método de Noether y van der Waerden, vía módulos, ideales, descomposición en suma directa, semisimplicidad, etc.

Durante este periodo, destacamos también el artículo realizado en colaboración con R. Brauer *Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen*, [3], donde por primera vez se define de forma clara la noción de *cuerpos de descomposición* para representaciones (es decir, en los que una representación dada se descompone en representaciones completamente irreducibles), relacionándolos con cuerpos de descomposición de álgebras simples y álgebras de división. Este artículo marcó el comienzo del interés de Noether en álgebras centrales simples; en su también famoso artículo *Nichtkommutative Algebren*, [31], realiza un estudio detallado de cuerpos de descomposición de álgebras simples y en [4], R. Brauer, H. Hasse y Noether completan la clasificación de álgebras de división centrales sobre un cuerpo de números algebraicos.

R. Brauer

H. Hasse

Terminamos con las siguientes palabras de Weyl, en su discurso conmemorativo [34], de reconocimiento en el tiempo de la obra de Noether y que reflejan bien el sentido del trabajo aquí presentado:

> *Su trascendencia en álgebra no debe atribuirse únicamente a sus propios logros. Emmy Noether tenía un gran poder de inspiración, y muchas de sus propuestas tomaron forma posteriormente en los trabajos de sus alumnos y colaboradores.*

Referencias

[1] P.S. Alexandroff, In Memory of Emmy Noether, *Uspekhi Mat. Nauk* 2 (1936), 254–266; Traducido al inglés en *Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work.* New York: Marcel Dekker 1982, 99–114.

[2] I.G. Bashmakova and G.S. Smirnova, *The Beginnings and Evolution of Algebra.* The Math. Association of America 2000.

[3] R. Brauer and E. Noether, Über minimale Zerfällungskörper irreduzibler Darstellungen, *Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.* (1927), 221–228.

[4] R. Brauer; H. Hasse and E. Noether, 'Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie des Algebren', *Journ. f. d. reine u. angew. Math.* 167 (1932), 399–404.

Emmy Noether con P. Dubreil y M.L. Dubreil en Göttingen en la primavera de 1931 y placa de la Noetherstrasse de Göttingen dedicada a Max y Emmy Noether

[5] J.W. Brewer and M.K. Smith, *'Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work'*. New York: Marcel Dekker 1982.

[6] José F. Cariñena, Emmy Noether: innovación y creatividad en Ciencia, La Gaceta de la RSME 7.2 (2004).

[7] C. Chevalley, 'On the theory of local rings', *Ann. Math.* 44 (1943), 690–708.

[8] I.S. Cohen, The rise of modern algebra to 1936, in *Men and Institutions in American Mathematics*. Texas Tech University 1950.

[9] D. Cox, J. Little y D. O'shea, *Ideal, Varieties and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Ney York: Springer-Verlag 1997.

[10] R. Dedekind y H. Weber, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, *Journal reine anger. Math.* 92 (1881), 181–290.

[11] J.A. Dieudonné,, The work of Nicholas Bourbaki, *Amer. Math. Monthly* 77 (1970), 134–145.

[12] J.A. Dieudonné,, Emmy Noether and Algebraic Topology, *J. of Pure and Appl. Algebra* (1984), 5–6.

[13] P.G.L. Dirichlet, *Vorlesungen Über Zahlentheorie* (presentado y revisado por R. Dedekind). Vierte Auflage Braunschweig 1894.

[14] J.R. Gilbert y H.S. Butts, Rings satisfying the three Noether axioms, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math.* 32 (1968), 211–224.

[15] R. Gilmer, Commutative Ring Theory, en *Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work* New York: Marcel Dekker 1982, 131–143.

[16] D. Hilbert, Über die Theorie des algebraischen Formen, *Math. Ann.* 36 (1890), 471–534.

[17] N. JACOBSON, *Basic Algebra II.* W.H. Freeman and Company 1980.

[18] I. KAPLANSKY, *Commutative Rings.* Allyn and Bacon 1970, Boston.

[19] C.H. KIMBERLING, Emmy Noether, *Amer. Math. Monthly* 79 (1972), 136–149.

[20] C.H. KIMBERLING, Emmy Noether, Greatest Woman Mathematician, *Math. Teacher* 84, N. 3, (1982), 246–249.

[21] T.Y. LAM, Representation Theory, en *Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work* New York: Marcel Dekker 1982, 145–156.

[22] E. LASKER, Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann.* 60 (1905), 20–116.

[23] F.S. MACAULAY, On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers, *Math. Ann.* 74 (1913), 66–121.

[24] G.H. MOORE, 'The axiomatization of Linear Algebra: 1875-1940', *Historia Math.* 22 (1995), 262–303.

[25] E. NOETHER, Invarianten beliebiger Differentialausdrüke, *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse* (1918), 38–44.

[26] E. NOETHER, Invariante Varaitionsprobleme, *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse* (1918), 235–257.

[27] E. NOETHER, Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Annalen* 83 (1921), 24–66.

[28] E. NOETHER, Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Linearer Gruppen der Charakteristik p, *Nachr. d. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys Klasse* (1926), 28–35.

[29] E. NOETHER, Abstrakter Aufbau del Idealtheorie in Algebraischen Zahl- und Funktionskörpen, *Math. Ann.* 96 (1926), 26–61.

[30] E. NOETHER, Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie, *Math. Zeitschr* 30 (1929), 641–692.

[31] E. NOETHER, Nichtkommutative Algebren, *Math. Zeitschr.* 37 (1933), 514–541.

[32] B.L. VAN DER WAERDEN, *Algebra* I, II. New York: Frederik Ungar Publishing Co. 1970.

[33] B.L. VAN DER WAERDEN, *A History of Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1985.

[34] H. WEYL, Emmy Noether, *Scripta Math.* 3 (1935), 201–220.

Pilar Carrasco
Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada
18071 Granada
Correo electrónico: `mcarrasc@ugr.es`