Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

Einstein, la relatividad y las matemáticas

por

José Manuel Sánchez Ron

Como físico, Albert Einstein posiblemente sólo tenga como igual a Isaac Newton. Ambos, en efecto, realizaron aportaciones fundamentales a la teoría del movimiento de los cuerpos, a la gravitación y a la teoría de la luz. Sin embargo, en un aspecto, el de sus aportaciones a la matemática, Newton superó claramente a Einstein. Aún así, debido a la dinámica interna del desarrollo de alguna de sus aportaciones, Einstein mantuvo durante una extensa parte de su carrera una intensa relación con las matemáticas. Sobre tal relación, y lo que tanto la física como la matemática ganaron con ella, versa el presente artículo.

La formación matemática de Einstein

A los diecisiete años Albert Einstein (1879-1955) ingresó en el Politécnico de Zúrich como estudiante de matemáticas y física. "Allí", recordó en sus notas autobiográficas, "tuve excelentes profesores (por ejemplo, Hurwitz, Minkowski), de manera que realmente podría haber adquirido una profunda formación matemática. Yo, sin embargo, me pasaba la mayor parte del tiempo trabajando en el laboratorio de física, fascinado por el contacto directo con la experiencia... El que descuidara hasta cierto punto las matemáticas no respondía exclusivamente a que el interés por las ciencias naturales fuese más fuerte que el que sentía por aquéllas, sino también a la siguiente circunstancia. Yo veía que la

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: josef@us.es

matemática estaba parcelada en numerosas especialidades, cada una de las cuales, por sí sola, podía arrebatarnos el breve lapso de vida que se nos concede, hallándome así en la situación del asno de Buridán, que no podía decidirse por ninguno de los dos montones de heno. Esto obedecía, evidentemente, a que mi intuición en el terreno matemático no era lo bastante fuerte como para discernir con seguridad entre lo básico, lo de importancia fundamental, y toda la demás erudición más o menos dispensable. Pero, aparte de eso, no cabe duda de que mi interés por el estudio de la naturaleza era más fuerte; y en mi época de estudiante no comprendía aún que el acceso a los conocimientos fundamentales y más profundos de la física iba ligado a los métodos matemáticos más sutiles. Es algo que sólo fui entreviendo paulatinamente tras años de trabajo científico independiente"[2]. En la física, sin embargo, pronto aprendió "a olfatear y entresacar aquello que podía conducir a la entraña, prescindiendo en cambio de todo los demás, de la multitud de cosas que atiborran la mente y la desvían de lo esencial"[3].

Esta formación un tanto limitada en matemáticas no constituyó sin embargo ningún obstáculo para los trabajos científicos que llevó a cabo con anterioridad a 1913. Un somero vistazo a "Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento", el artículo de 1905 en el que desarrolló la teoría de la relatividad especial, muestra que la matemática que se utiliza en él es muy básica: como mucho alguna ecuación en derivadas parciales (las de la electrodinámica de Maxwell) y diferencial ordinaria de segundo orden, y ninguna de ellas afecta a la verdadera esencia del trabajo[4]. Por otra parte, la interpretación cuadridimensional de la relatividad especial que utiliza un espacio (espacio-tiempo) de métrica pseudoeuclidea, que terminó imponiéndose en la mayor parte de las presentaciones de la teoría, no se debe a Einstein sino a su antiguo profesor en el Politécnico de Zúrich, Hermann Minkowski (1864-1909), y tampoco es que semejante presentación –que Einstein no consideró conveniente hasta que ya estaba sumergido en la búsqueda de una teoría relativista de la gravitación– fuese muy exigente desde el punto de vista matemático[5].

[2] A. Einstein, "Autobiographical Notes/Autobiographisches", en Paul Arthur Schilpp, ed., *Albert Einstein: Philosopher-Scientist* (Open Court, La Salle, Illinois 1949), pp. 2-94. Yo he utilizado la versión al español: Albert Einstein, *Notas autobiográficas* (Alianza Editorial, Madrid 1984); pp. 20-21.

[3] Ibíd., p. 21.

[4] Albert Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", *Annalen der Physik* 17, 891–921 (1905). Existe traducción al español ("Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento") de este artículo en: *Einstein 1905: un año milagroso*, John Stachel, ed. (Crítica, Barcelona 2001), pp. 111-142.

[5] Minkowski presentó su formulación cuadridimensional de la relatividad especial en una conferencia que dictó el 5 de noviembre de 1907 en la Sociedad Matemática de Gotinga. El texto de esta conferencia no fue publicado, sin embargo, hasta 1915 (Minkowski falleció en 1909): Hermann Minkowski, "Das Relativitätsprinzip", *Annalen der Physik* 47, 927–938 (1915). Su primera publicación en este dominio fue: Hermann Minkowski, "Die Grundglei-

La idea del principio de equivalencia

Acabo de aludir a la búsqueda por parte de Einstein de una teoría relativista de la gravitación, la relatividad general, como finalmente se denominaría, una teoría que, según tendremos ocasión de comprobar, sería determinante en el cambio de su postura con respecto a la matemática[6]. La construcción de esta teoría llevó a Einstein muchos más esfuerzos que los que empleó para llegar a la teoría especial. Podemos, en efecto, datar en 1907 su primer esfuerzo significativo por desarrollar una teoría relativista de la gravitación. Tal esfuerzo apareció como parte de un artículo que el premio Nobel de Física (y futuro nazi) Johannes Stark le solicitó que escribiese para la revista que dirigía, el *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* (*Anuario de Radiactividad y Electrónica*). Se trataba de que allí Einstein –todavía un empleado de la Oficina de Patentes de Berna– recopilase todo lo que entonces se conocía sobre la teoría de la relatividad especial[7]. Y lo hizo, pero no podía dejar de tratar un aspecto muy importante.

La relatividad especial es, en esencia, un conjunto de requisitos (geométricos o cinemáticos) que deben verificar todas las fuerzas de la naturaleza. Ahora bien, en 1905-1907 sólo se conocían dos fuerzas: la electromagnética y la gravitacional. En cuanto a formulaciones teóricas, por entonces la prime-

chungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern", *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Nachrichten*, 53–111 (1908). Mucho más influyente fue, no obstante, la presentación de carácter general que Minkowski llevó a cabo en la conferencia que pronunció el 21 de septiembre de 1908, durante la 80 Reunión de Científicos y Médicos Alemanes celebrada en Colonia, que fue publicada poco después: Hermann Minkowski, "Raum und Zeit", *Physikalische Zeitschrift* 10, 104–111 (1909). Son famosas las líneas iniciales de este artículo: "Las visiones del espacio y el tiempo que deseo presentarles han surgido del terreno de la física experimental y de ahí toman su fuerza. Son radicales. A partir de ahora el espacio por sí mismo y el tiempo por sí mismo están condenados a desvanecerse en meras sombras, y solamente una especie de unión de los dos conservará una realidad independiente".

Quiero aprovechar la ocasión en que me refiero a la versión cuadridimensional de la relatividad especial, para señalar que en una presentación diferente sería necesario analizar las aportaciones y puntos de vista de Henri Poincaré (1854-1912), el matemático galo que combinó como pocos intereses matemáticos, físicos y filosóficos. Desgraciadamente, la línea argumental que sigo en el presente escrito impide que dé cabida en él a Poincaré.

[6]También en lo que se refiere a sus ideas filosóficas, pero no trataré esta cuestión aquí, más que, si acaso, de pasada. He estudiado esta cuestión en otros lugares: J. M. Sánchez Ron, *El origen y desarrollo de la relatividad* (Alianza, Madrid 1983, 1985); "¿Físicos o filósofos? Sobre la problemática relación entre ciencia y filosofía", en *Actas I Simposio Hispano-Mexicano de Filosofía*, págs. 244–253, vol. I (Ediciones Universidad de Salamanca, Salamanca 1986); *El triángulo mágico: Física, matemáticas y filosofía a propósito de Albert Einstein*, lección inaugural del curso 2003-2004, Universidad Autónoma de Madrid (Cantoblanco 2003).

[7]Albert Einstein, "Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen", *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* 4, 411–462 (1907).

ra estaba gobernada por la electrodinámica de Maxwell y la segunda por la teoría de la gravitación universal de Newton. Sucede, sin embargo, que la formulación maxwelliana es perfectamente compatible con la relatividad especial, mientras que la segunda no[8]. Había, por consiguiente, que buscar una teoría de la gravitación que fuese compatible con los principios relativistas.

Esto es lo que se planteaba Einstein en una de las secciones (la 17, titulada "Sistemas de referencia acelerados y campos gravitacionales") de su artículo de 1907, y aunque entonces no llegó a resolver el problema, sí que sentó las bases para solucionarlo. Cómo lo hizo, constituye en mi opinión uno de los momentos más grandiosos de toda la historia del pensamiento científico.

Por un lado, Einstein se preguntaba, en el mejor espíritu "filosófico", por qué una teoría con pretensiones de fundamentalidad, como era la relatividad especial, tenía que basarse en principios uno de los cuales era que las leyes de la física no deben distinguir entre sistemas inerciales (esto es, sistemas que se mueven con velocidad constante entre ellos). En su ansia generalizadora, Einstein pensó que las leyes de la física no debían distinguir entre ningún sistema de referencia, o, dicho de otra manera, que el principio de relatividad que él había utilizado en 1905 ("Si los dos sistemas de coordenadas están en movimiento relativo de traslación paralela uniforme, las leyes de acuerdo con las cuales cambian los estados de un sistema físico no dependen de con cuál de los dos sistemas están relacionados dichos cambios")[9] debía ser generalizado[10]. Tal propósito estaba bien, pero tomado en sí mismo no justifica la alabanza que acabo de hacer ("uno de los momentos más grandiosos..."); para entenderla hay que recordar el otro punto que introdujo Einstein en 1907.

Tomando en consideración un hecho conocido al menos desde los tiempos de Galileo (es la base de su célebre –ya lo hiciese realmente o simplemente lo imaginase– experimento en la torre de Pisa, que mostraba que los cuerpos caen con la misma aceleración, independientemente de su masa) y que está incluido en la mecánica que Newton presentó en 1687: que la masa inercial es proporcional (idéntica en un sistema de unidades que siempre se puede introducir) a la masa gravitacional; tomando, digo, en consideración este hecho,

[8]Dicho de otra manera: la electrodinámica maxwelliana es invariante bajo las transformaciones de Lorentz, que caracterizan a la relatividad especial, mientras que la gravitación newtoniana no lo es (su grupo de invariancia es el de Galileo). El que la electrodinámica fuese una teoría relativista especial antes de que ésta hubiese sido formulada, hizo que muchos científicos no fuesen capaces de entender la novedad que aportaba la teoría de Einstein de 1905.

[9]A. Einstein, "Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento"; en *Einstein 1905: un año milagroso*, *op. cit.*, p. 114.

[10]"Hasta ahora", escribía Einstein ("Über das Relativitätsprinzip...", *op. cit.*, p. 454), "hemos aplicado al principio de relatividad –es decir, la suposición de que las leyes de la naturaleza son independientes del estado de movimiento del sistema de referencia– solamente a sistemas de referencia no acelerados. ¿Es concebible que el principio de relatividad sea válido también para sistemas acelerados entre sí?"

Einstein se dio cuenta de que *localmente* (esto es, para distancias pequeñas) un sistema de referencia no inercial (acelerado) es equivalente a una fuerza gravitacional. A esta equivalencia la denominó "principio de equivalencia", y fue la única pieza a la que permaneció fiel durante los más de siete años que median entre 1907 y noviembre de 1915, cuando llegó a la formulación final de su teoría relativista de la gravitación: la teoría de la relatividad general.

La geometrización de la gravitación: la teoria de la relatividad general

Explotando el principio de equivalencia y utilizando el caso de un disco en rotación, Einstein llegó hacia 1912 a la conclusión de que la teoría relativista de la gravitación que buscaba debía basarse en un espacio-tiempo cuya geometría dependiese de su contenido energético-material, o, en otras palabras, que la gravitación curva el espacio-tiempo[11]. Sería éste, en consecuencia, no sólo una variedad métrica sino también una de geometría variable, no prefijada e inmutable como sucedía con todas las teorías físicas conocidas hasta entonces (y después, hasta la fecha). Más aún, el objeto matemático que describía esa geometría debía ser el mismo que el que describiese la fuerza gravitacional. En este sentido, la gravitación se *geometrizaba*; se incluía, subsumía, la gravitación en la geometría. Y como la geometría está definida en todos los puntos del sistema al que hace referencia, la conclusión inevitable era que la nueva teoría relativista de la gravitación tenía que ser una *teoría de campos*.

Einstein necesitaba, por tanto, recurrir a una geometría más compleja y general que la clásica establecida en los *Elementos* de Euclides (que algunos datan en torno al 325 a. C.), la geometría de los espacios bi- o tri-dimensionales planos, la que contiene un postulado (el quinto) que afirma que por un punto exterior a una recta sólo puede pasar una paralela a esta; la geometría en la que se cumplen propiedades tan familiares como la de que los ángulos interiores de un triángulo suman 180 grados. Afortunadamente, la base –mejor, los rudimentos– de esa geometría n-dimensional curva se había establecido durante el siglo XIX. En efecto, los repetidos esfuerzos encaminados a demostrar que el quinto postulado de los *Elementos* de Euclides era una pieza superflua en la estructura de la obra, que podía deducirse de otros axiomas, llevaron, durante el primer tercio del siglo XIX, a la sorprendente conclusión de que no solamente era realmente independiente, sino que de su negación no se deducían contradicciones; esto es, que se puede sustituir por otros postulados alter-

[11]Cómo llegó Einstein a estas conclusiones utilizando el principio de equivalencia y un disco que gira, es algo que fue estudiado por John Stachel: "The rigidly rotating disk as the 'missing link' in the history of general relativity", en A. Held, ed., *One Hundred Years after the Birth of Albert Einstein*, vol. 1 (Plenum Press, Nueva York 1980), pp. 1-5; reproducido en John Stachel, *Einstein, from 'B' to 'Z'* (Birkhäuser, Boston 2002), pp. 245-260.

nativos que conducen a geometrías diferentes de la euclídea, pero lógicamente correctas. Me estoy refiriendo a las geometrías asociadas primordialmente a los nombres de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nicolai Ivanovich Lobachevskii (1792-1856) y Janos Bolyai (1802-1860). Inicialmente, el descubrimiento de las geometrías no euclídeas no atrajo excesivo interés, pero una combinación de sucesos relanzó su estudio. En primer lugar, está la publicación, entre 1860 y 1865, de la correspondencia de Gauss con su amigo, el astrónomo Heinrich C. Schumacher (1780-1850), con su referencia favorable al trabajo de Lobachevskii. En segundo lugar, la demostración de Eugenio Beltrami (1835-1899), en 1868, de que la geometría de Lobachevskii podía interpretarse como la geometría de una superficie de curvatura constante y negativa. Finalmente, se tiene la lección de habilitación que Bernhard Riemann (1826-1866) pronunció en 1854: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* (*Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría*); de ahí que sea común hablar de "espacios riemannianos"[12].

El problema para Einstein es que reconocía la necesidad de recurrir a una geometría curva no estática, pero no disponía de los conocimientos necesarios. Es cierto que el programa de estudios que había seguido en Zúrich incluía un curso sobre geometría dictado por el matemático Carl Friedrich Geiser (1843-1934), en el que se trató de los trabajos de Gauss sobre superficies curvas descritas de forma intrínseca (sin considerar que podían estar sumergidas en un espacio de dimensión superior), pero no parece que lo aprovechase demasiado, no, desde luego, como para poder ser matemáticamente autosuficiente en 1913. En cuanto a los trabajos de Riemann o el artículo que los matemáticos italianos Gregorio Ricci-Curbastro y Tullio Levi-Civita publicaron en 1901, que contiene la mayor parte de los elementos de la geometría riemanniana necesarios para la relatividad general, simplemente los desconocía[13].

La ayuda le llegó de un amigo y compañero de estudios en el Politécnico de Zúrich, Marcel Grossmann (1878-1936), que ya había intervenido decisivamente en su vida años antes, en 1902, cuando el padre de Grossmann logró que la Oficina de Patentes de Berna emplease al entonces desvalido Albert[14].

[12] *Briefwechsel zwischen K. F. Gauss und H. C. Schumacher*, C. A. F. Peters, ed., 6 vols. (Altona, 1860-1865). Eugenio Beltrami, "Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea", *Giornale di Mathematiche* 6, 284-312 (1868). Bernhard Riemann, "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen", *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13 (1868), reimpreso en Bernhard Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass* (Teubner, Leipzig 1892), pp. 272-287. Existe versión al español (reproducida junto al texto original alemán) en Bernhard Riemann, *Riemanniana Selecta*, edición de José Ferreirós (Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid 2000), pp. 1-18.

[13] Gregorio Ricci y Tullio Levi-Civita, "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications", *Mathematische Annalen* 54, 125-201 (1901).

[14] A mencionar también que Einstein dedicó su tesis doctoral (*Eine neue bestimmung der moleküldimensionen* [Berna 1905]) a Grosssmann. Esto es lo que escribió allí: "Meinem Freun-

Cuando en febrero de 1912 Einstein fue nombrado catedrático en su antigua *alma mater*, el Instituto Politécnico de Zúrich, se encontró allí con Grossmann, que ocupaba una cátedra de matemáticas. Fue una coincidencia afortunada, ya que Grossmann se había especializado precisamente en geometría diferencial. Juntos escribieron un artículo que representa un momento decisivo en la carrera de Einstein, así como en la historia de la física. En la carrera de Einstein porque, como veremos, el "estilo einsteniano" cambiaría de una manera radical a partir de entonces. En la historia de la física, porque nadie hasta entonces había hecho lo que sus autores llevaron a cabo en aquel trabajo: "reducir", geometrizar, la gravitación; utilizar un marco geométrico curvo que dependía de su contenido energético-material.


A la izquierda A. Einstein con M. Grossmann, G. Geissler y E. Grossmann; a la derecha Marcel Grossmann (1878–1936).

El artículo en cuestión, que la editorial Teubner decidió publicar a finales de 1913 como un folleto de 28 páginas[15], se titulaba *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation* (*Esbozo de una teoría general de la relatividad y de una teoría de la gravitación*)[16]. Su estructura no dejaba dudas acerca de las diferentes responsabilidades de sus autores: comenzaba con una "Parte física", firmada por Einstein, y continuaba con una "Parte matemática", debida a Grossmann.

de Herrn Dr. Marcel Grossmann Gewidmet" ("Dedicada a mi amigo el Sr. Dr. Marcel Grossmann").

[15]Casi un año más tarde, dos meses después de que Einstein se hubiese instalado en Berlín, apareció en la revista científica *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 62, 225–259 (1914).

[16]Albert Einstein y Marcel Grossmann, *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation* ("I. Physikalischer teil" por A. Einstein; "II. Mathematischer teil" por M. Grossmann) (Teubner, Leipzig, 1913).

Las ecuaciones del campo gravitacional que se proponían en este *Esbozo* no eran correctas y Einstein terminaría por abandonarlas[17]. Comenzó entonces un largo, complejo y con frecuencia oscuro conceptualmente, período –que sólo finalizaría en noviembre de 1915– durante el cual Einstein pugnó por determinar los principios básicos de la teoría relativista de la gravitación que buscaba, incluyendo, claro, las ecuaciones del campo gravitacional. No puedo, naturalmente, detenerme en los detalles de esa búsqueda; para mis propósitos aquí lo realmente importante es señalar que aunque los argumentos físicos no desaparecieron de los razonamientos de Einstein, cada vez iban cobrando más fuerza los puramente matemáticos, con el cálculo tensorial ocupando una posición central. La fascinación que Einstein iba sintiendo por el poder de las matemáticas se hace patente en el pasaje inicial del artículo que leyó en la sesión plenaria de la Academia Prusiana de Ciencias el 4 de noviembre de 1915, en el que se quedó a un paso de formular la versión final de la teoría de la relatividad general[18]: "Nadie que la haya entendido realmente [la teoría métrica que presentaba allí] puede escaparse de su belleza, porque significa el verdadero triunfo del cálculo diferencial absoluto tal y como fundado por Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci y Levi-Civita".

Veintiún días después, el 25 de noviembre de 1915, Einstein presentaba a la Academia Prusiana la formulación definitiva de la teoría general de la relatividad; esto es, la formulación que incluía las ecuaciones correctas del campo gravitacional, expresadas, por supuesto, en forma tensorial[19]. "Finalmente", escribía allí Einstein, en el párrafo último, "hemos completado la teoría general de la relatividad como una estructura lógica. El postulado de la relatividad en su formulación más general (que convierte a las coordenadas espacio-temporales en parámetros desprovistos de significado físico) conduce con absoluta necesidad a una teoría de la gravitación muy específica que también explica el movimiento del perihelio (punto de la órbita más cercano al Sol) de Mercurio", un problema que había permanecido sin resolver en la

[17]De hecho, esas ecuaciones de campo eran tales que coincidían con las que Einstein finalmente propuso en diciembre de 1915 para el caso del campo gravitacional en el vacío, precisamente la situación que acaparó durante décadas la mayor parte de las consecuencias comprobables experimentalmente de la relatividad general.

[18]A. Einstein, "Zur allgemeinen Relativitätstheorie,", *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*, pp. 778–786 (1915), p. 779. La fecha de publicación de este artículo es el 2 de diciembre de 1915. El detalle que le separaba de la versión definitiva de la teoría es que en este trabajo Einstein no exigía la invariancia (covariancia) general. "Al igual", escribía (p. 779), "que la teoría especial de la relatividad se basa en el postulado de que todas las ecuaciones deben ser covariantes con respecto a transformaciones lineales ortogonales, la teoría desarrollada aquí se basa en el postulado de *la covariancia de todos los sistemas de ecuaciones con respecto a las transformaciones cuyo determinante es 1"*.

[19]A. Einstein, "Die Feldgleichungen der Gravitation", *Koniglich Preussische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*, 844–847 (1915).

teoría newtoniana durante más de un siglo. No hacía referencia a otras dos predicciones experimentales, el desplazamiento de las líneas espectrales y la curvatura de los rayos de luz debido al campo gravitacional, una limitación que desaparecería en un nuevo artículo, más extenso, completo y pedagógico: "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" ("El fundamento de la teoría general de la relatividad"), recibido en la redacción de los *Annalen der Physik* el 20 de marzo de 1916[20].

Un mundo matemático

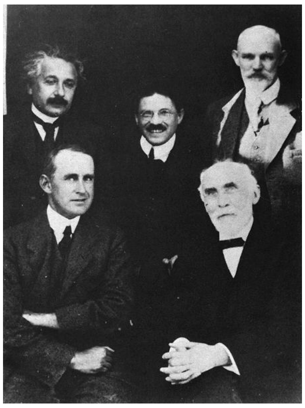
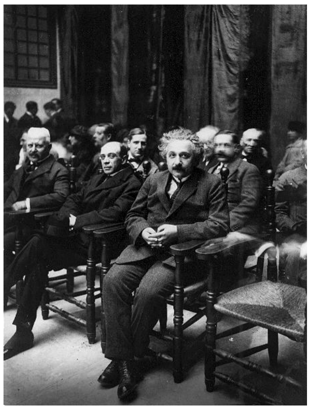
Desde el artículo que había escrito con Grossmann en 1913, era evidente que Einstein navegaba por océanos que sólo los matemáticos, algunos matemáticos, habría, más apropiadamente, que decir, estaban preparados para surcar. Fueron, efectivamente, matemáticos sobre todo los que se dedicaron a investigar el nuevo campo, la relatividad general, abierto por Einstein. De los físicos, pocos se atrevieron, aunque algunos lo hicieron con celeridad y buen hacer, como sucedió con el gran físico teórico holandés Hendrik A. Lorentz (1853-1928) y el astrónomo, astrofísico y físico teórico británico, además de magnífico matemático (era producto del *Mathematical Tripos* de Cambridge), Arthur Eddington (1882-1944). Dejando por el momento aparte las aportaciones de Eddington a la generalización de la geometría riemanniana, cuestión de la que hablaré más adelante, es interesante mencionar que Lorentz ya mostró su interés por la teoría relativista de la gravitación que Einstein intentaba encontrar antes incluso de noviembre de 1915, publicando un artículo, centrado en una de las versiones preliminares propuestas por Einstein, en el que recomendaba utilizar la formulación de Hamilton, que él mismo desarrollaba[21]. De especial interés es el trabajo que Lorentz llevó a cabo sobre el movimiento de cuerpos en un campo gravitacional, según la teoría de la relatividad general, junto a su estudiante de doctorado Johannes Droste (1886-1963), que había iniciado este estudio en su tesis doctoral[22]. Se trataba de un problema de gran dificultad, que implica la resolución aproximada de conjuntos de ecuaciones no

[20] A. Einstein, "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", *Annalen der Physik* 49, 769–822 (1916).

[21] H. A. Lorentz, "On Hamilton's principle in Einstein's theory of gravitation", en H. A. Lorentz, *Collected Papers*, vol. 5 (Martinus Nijhoff, La Haya 1937), pp. 229-245. Publicado originariamente en *Versl. Akad. Amsterdam* 23, 1073 (1915) y en *Proc. Acad. Amsterdam* 19, 751 (1915).

[22] H. A. Lorentz y J. Droste, "The motion of a system of bodies under the influence of their mutual attraction, according to Einstein's theory", en H. A. Lorentz, *Collected Papers*, vol. 5, op. cit., pp. 330-355. Publicado originariamente en *Versl. Akad. Wet. Amsterdam* 26, 392 (1917). La tesis doctoral de Droste, publicada antes que este trabajo (que utilizaba sus resultados), es: J. Droste, *Het zwaartekrachtveld van één of meer lichamen volgens de theorie van Einstein* (E. J. Brill, Leiden 1916).

lineales en derivadas parciales, en el que trabajarían una década después, entre otros, Tullio Levi-Civita, Arthur Eddington y Gordon L. Clark, y el propio Einstein junto a dos de sus colaboradores Leopold Infeld y Banesh Hoffmann, que produjeron la denominada "aproximación EIH"[23].

A la izquierda A. Einstein con A. Eddington,
P. Ehrenfest, H. A. Lorentz y W. de Sitter;
a la derecha A. Einstein en Barcelona en 1923.

Los casos de Lorentz y Eddington eran, como indiqué, poco frecuentes. Al igual que sucedió cuando se hizo patente que la teoría de grupos, en la que pocos físicos estaban instruidos, constituía un valioso instrumento para el desarrollo de la mecánica cuántica, el calculo tensorial y la geometría riemanniana resultaban extraños para la mayoría de los físicos, y continuaron siéndolo durante mucho tiempo, más que en el caso de la teoría de grupos y la física cuántica. Un ejemplo bastante representativo de las habilidades que los físicos, y más aún los "físicos clásicos", poseían con relación a la matemática necesaria para comprender la relatividad general es el de Oliver Lodge (1851-1940), un físico británico muy distinguido, *professor* de física en Liverpool y posteriormente rector de la Universidad de Birmingham, que contribuyó de manera importante al desarrollo del electromagnetismo. Lodge encontró la re-

[23]T. Levi-Civita, "The relativistic problem of several bodies", *American Journal of Mathematics* 59, 9–22 (1937); A. S. Eddington y G. L. Gordon, "The problem of n bodies in general relativity theory", *Proceedings of the Royal Society of London A* 166, 465–475 (1938); A. Einstein, L. Infeld y B. Hoffmann, "Gravitational equations and the problem of motion", *Annals of Mathematics* 39, 65–100 (1938). Sobre la historia del problema de movimiento en relatividad general, ver Peter Havas, "The early history of the 'problem of motion' in general relativity", en D. Howard y J. Stachel, eds., *Einstein and the History of General Relativity* (Birkhäuser, Boston 1989), pp. 234–276.

latividad general bastante difícil de comprender, especialmente debido a sus limitados conocimientos de matemáticas. En una fecha tan tardía como el 27 de mayo de 1929, confesaba a Edmund Whittaker (1873-1956), catedrático de Matemáticas Aplicadas en Edimburgo, sus limitaciones: "Le agradezco que me enviase su conferencia sobre '¿Qué es la energía?'[24]. Pero estoy horrorizado al encontrar que no la puedo seguir; esto es, comprenderla completamente. Más bien, me sorprende que los tensores tengan que ser introducidos en conexión con una cosa tan fundamental como la energía. Ni siquiera sé lo que es un tensor. Sé que un vector es un escalar con dirección al igual que magnitud. Uno se ha acostumbrado a utilizar vectores. Pero ¿que son realmente? ¿Se trata de un *twist* [enroscadura], o lo que Robert Ball denominó un *wrench* [torcedura]? A mi edad no voy a aprender el cálculo tensorial, pase lo que pase. Y me sorprende bastante que la conservación de la energía se haya mezclado con la conservación del momento, para lograr una formulación completa"[25].

Einstein reconoció el hecho que estoy comentando, y por ello en la extensa presentación que realizó en 1916 de la relatividad general, ya citada ("Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie"), escribía en las primeras líneas: "Las herramientas matemáticas que son necesarias para la relatividad general ya estaban a disposición nuestra en el 'cálculo diferencial absoluto', que se basa en la investigación sobre variedades no euclideanas, de Ricci y Levi-Civita y que ya ha sido aplicado a problemas de física teórica. En la sección B de este artículo he desarrollado todas las herramientas matemáticas necesarias –que no puedo suponer que son conocidas por todo físico– y he intentado hacerlo de la manera más simple y transparente posible, de forma que no sea necesario realizar un estudio especial de la literatura matemática para comprender el presente artículo"[26].

Antes, y en un sentido no muy diferente, había escrito, hacia el 10 de abril de 1915, a su amigo Heinrich Zangger: "La teoría de gravitación todavía no encontrará su camino hacia las cabezas de mis colegas durante bastante tiempo. Solamente *uno*, Levi-Civita de Padua, probablemente haya captado completamente el punto principal, porque está familiarizado con las matemáticas que se utilizan"[27].

Basta, efectivamente, con consultar el tomo de *The Collected Papers of Albert Einstein* que contiene su correspondencia correspondiente a 1915 para comprobar que Tullio Levi-Civita (1873-1941), entonces profesor de Mecánica Racional en la Universidad de Padua, fue uno de sus corresponsales más fre-

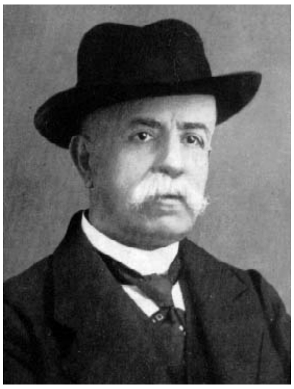
[24]E. T. Whittaker, "What is energy?", *Mathematical Gazette* (abril de 1929), pp. 401–406.

[25]Citado en J. M. Sánchez Ron, "Larmor versus general relativity", en *The Expanding Worlds of General Relativity*, H. Goenner, J. Renn, J. Ritter y T. Sauer, eds. (Birkhäuser, Boston 1999), pp. 405-430; cita en p. 408.

[26]A. Einstein, "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", *op. cit.*, p. 769.

[27]*The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte A (*The Berlin Years: Correspondence, 1914-1917)*, Robert Schulmann, A. J. Kox, Michel Janssen y József Illy, eds. (Princeton University Press, Princeton 1998), p. 117.

cuentes y más familiarizados con las sutilidades del cálculo tensorial[28]. Y también de los primeros en responder a las versiones últimas, así como a la definitiva, de la relatividad general, algo no demasiado sorprendente habida cuenta de que, recordemos, había sido uno de los autores, junto a su maestro, Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), del ya citado artículo: "Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications"[29]. De hecho, debemos considerar a Levi-Civita como otro de los distinguidos miembros de la escuela (o tradición) italiana en geometría, una escuela-tradición a la que pertenecieron matemáticos como Luigi Cremona (1830-1903), el ya citado anteriormente Eugenio Beltrami, Corrado Segre (1863-1924), Luigi Bianchi (1856-1928), autor de tres tomos de unas *Lezioni di geometria differenziale* (1902-1909) que ahondaban en la senda abierta por la monumental obra de Gaston Darboux (1842-1917), *Leçons sur la théorie genérale des surfaces* (4 vols; 1887-1896), y, por supuesto, Ricci-Curbastro, el principal responsable de la creación de lo que se vino en denominar "cálculo diferencial absoluto"[30].



G. Ricci-Curbastro
(1853–1925)

T. Levi-Civita
(1873–1941)

[28] Ver, asimismo, Carlo Cattani y Michelangelo de Maria, "The 1915 epistolary controversy between Einstein and Tullio Levi-Civita", en D. Howard y J. Stachel, eds., *Einstein and the History of General Relativity*, *op. cit.*, pp. 174–200.

[29] Sobre Ricci, Levi-Civita y las relación de ambos con el estudio de invariantes diferenciales y la relatividad general, ver Humberto Bottazzini, "Ricci and Levi-Civita: from differential invariants to general relativity", en Jeremy J. Gray, ed., *The Symbolic Universe. Geometry and Physics 1890-1930* (Oxford University Press, Oxford 1999), pp. 241–259.

[30] Algunos aspectos de las aportaciones de los matemáticos italianos a la relatividad se estudian en Judith R. Goodstein, "The Italian mathematicians of relativity", *Centaurus* 26, 241-261 (1983).

El ejemplo de Levi-Civita es significativo, aunque, contemplado desde el conjunto de la matemática, seguramente no demasiado representativo. La aparición de la teoría de la relatividad general influyó profundamente en su producción científica; así, cuando se analiza su bibliografía encontramos que el primer artículo suyo dedicado a la nueva teoría gravitacional einsteniana apareció en 1917: "Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionalle nella teoria di Einstein"[31]. De acuerdo a la lista de publicaciones incluida en el último volumen de sus obras completas[32], antes de este artículo había publicado 114 más, muchos dedicados a temas de física matemática, como mecánica analítica, el problema de tres cuerpos o el electromagnetismo. A partir de entonces los temas dedicados a la relatividad general o a apartados matemáticos relacionados con ella ocuparon una parte muy relevante de su producción científica, que incluyó monografías como *Qüestions de Mecànica clàssica i relativista* (Barcelona 1921), fruto de unas conferencias que dio en el Institut d'Estudis Catalans en 1921, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto* (Roma 1925), vertido al inglés en 1927 (*The Absolute Differential Calculus* [Londres]), *Fundamenti di Meccanica relativista* (Bolonia 1928) o *Le problème des n corps en relativité genérale* (París 1950), publicado póstumamente (en inglés apareció en 1964). Más adelante mencionaré alguna de sus contribuciones más originales al campo de la relatividad general, pero ahora quiero considerar el caso de otro de los primeros científicos que reaccionaron ante los trabajos de Einstein en este domino: el matemático David Hilbert (1862-1943).

Einstein, Hilbert y la relatividad general

Hilbert es, naturalmente, uno de los grandes de la matemática de todos los tiempos, muy probablemente el más grande de finales del siglo XIX y comienzos del XX (Poincaré sería su gran rival en esta clasificación). Dejó, en efecto, su marca en muy variadas ramas de la matemática: en la teoría de invariantes, teoría algebraica de números, fundamentos de geometría y de la matemática en su conjunto, ecuaciones integrales, principio de Dirichlet, cálculo de variaciones, así como en la física teórica y matemática.

Entre los intereses científicos de Hilbert, la física ocupó, efectivamente, un lugar notable. Uno de esos intereses se centró (hacia 1913) en la teoría del campo electromagnético que Gustav Mie (1868-1957) estaba intentando desarrollar por entonces[33]. La característica más llamativa de esa teoría es que pretendía

[31] *Rendiconti Accademia Lincei* 26, 381–391 (1917).

[32] "Elenco cronologico generale delle pubblicazione di Tullio Levi-Civita", en Tullio Levi-Civita, *Opere Matematiche. Memorie e Note*, vol. VI (Nicola Zanichelli Editore, Bolonia 1973), pp. 447-472.

[33] Gustav Mie, "Grundlagen einer Theorie der Materie (I)", *Annalen der Physik* 37, 511–534 (1912); "Grundlagen einer Theorie der Materie (II)", *Annalen der Physik* 39, 1–40 (1912); "Grundlagen einer Theorie der Materie (III)", *Annalen der Physik* 40, 1–66 (1913).

ser capaz de dar cuenta de la materia, de explicarla, en base únicamente al campo electromagnético (la materia sería, desde esta perspectiva, algo así como "concreciones" del campo, zonas de alta densidad de éste). Pues bien, en noviembre de 1915, y en medio de un intenso intercambio epistolar con Einstein (que había dictado un curso de seis conferencias de dos horas cada una en Gotinga entre el 29 de junio y el 7 de julio de 1915, a las que asistieron además de Hilbert, matemáticos como Felix Klein y Emmy Noether), el 20 de noviembre –esto es, cinco días antes que Einstein presentase el artículo en que establecía la formulación final de la relatividad general– Hilbert entregó para su publicación a la Academia de Ciencias de Gotinga un artículo titulado "Die Grundlagen der Physik" ("Los fundamentos de la física")[34]. Este artículo apareció publicado el 31 de marzo de 1916, y cuando se lee encontramos que en él aparecen las ecuaciones del campo gravitacional y el requisito de covariancia general que Einstein estableció en su artículo definitivo del 25 de noviembre[35].

Antes de preguntarnos acerca de lo que significan las fechas mencionadas, es preciso señalar que en su trabajo Hilbert se benefició claramente de sus habilidades matemáticas; en concreto de su dominio de las formulaciones basadas en principios variacionales, así como de su capacidad para comprender algunas de las consecuencias de exigir invariancia bajo una transformación arbitraria de coordenadas. En cuanto a lo que pretendía, era, nada más y nada menos, que formular un principio variacional del que se dedujesen las leyes de la física de la gravitación y del electromagnetismo, éste último entendido a la manera de Mie. En su relatividad general, Einstein, por el contrario, se limitaba a la interacción gravitacional.

Pasando, ahora ya sí, a la cuestión de las fechas, la pregunta que surge inmediatamente es la siguiente: si el artículo de Hilbert contiene las ecuaciones de la relatividad general, en su versión más general, esto es, la que admitía la invariancia general y no sólo (como hizo Einstein durante bastante tiempo) para transformaciones de coordenadas cuyo determinante fuese la unidad, y si este artículo fue entregado por Hilbert cinco días antes que el de Einstein, ¿no debería recaer el mérito del descubrimiento de la versión definitiva de la teoría de la relatividad general en Hilbert, por mucho que se reconozca que fue Einstein quien preparó el escenario principal (espacio-tiempo riemanniano; geometrización de la gravitación)? Más aún: ¿no deberíamos reconocer que el

[34]David Hilbert, "Die Grundlagen der Physik, (Erste Mitteilung)", *Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, pp. 395–407 (1915).

[35]La historia completa de la relación de Hilbert con la genesis de la relatividad general se narra en trabajos como: Jagdish Mehra, *Einstein, Hilbert, and the Theory of Gravitation* (Reidel, Dordrecht 1974); Leo Corry, "Hilbert and physics (1900-1915)", en J. J. Gray, ed., *The Symbolic Universe. Geometry and Physics 1890-1930*, *op. cit.*, pp. 144-188; Leo Corry, Jürgen Renn y John Stachel, "Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute", *Science* 278, 1270–1273 (1997); y John Stachel, "New light on the Einstein-Hilbert priority question", en J. Stachel, *Einstein from 'B' to 'Z'*, *op. cit.*, pp. 353–364.

mérito de Hilbert fue incluso superior al de Einstein, ya que el catedrático de Gotinga no sólo geometrizó la gravitación sino también la otra interacción entonces conocida en la física, la electromagnética?

Pero olvidemos la contingente cuestión de los reconocimientos personales, y pensemos en disciplinas. ¿No representaría, al menos en este caso, el logro y prioridad de Hilbert una manifestación de superioridad última de la "vía matemática" en el descubrimiento de las leyes fundamentales de la física? No tendría porque ser así siempre, por supuesto, pero al menos lo habría sido en un caso de especial relevancia, lo que mostraría una posible guía heurística para el futuro.

Pues bien, la respuesta a estas preguntas es negativa, y ello por dos motivos. El primero, un tanto menos importante que el segundo, es porque la teoría hilbertiana no era realmente idéntica a la einsteniana: sólo era formalmente igual. Las ecuaciones del campo tenían la misma forma matemática que las de la relatividad general, pero, siguiendo el espíritu de la teoría de Mie, que Hilbert imitaba, el tensor de energía-momento (que representa el contenido energético-material del sistema, el responsable de la deformación del espacio-tiempo) que incluía, era de naturaleza puramente electromagnética, lo que no ocurría en la teoría de Einstein.

El segundo motivo es más importante y sorprendente, aunque sólo se ha conocido muy recientemente. Resulta que el contenido de lo que presentó Hilbert a la Academia de Ciencias de Gotinga el 20 de noviembre no coincide con lo que apareció finalmente publicado. Como parte de su investigación en la historia del desarrollo de la relatividad general, en 1997 Leo Corry descubrió los ejemplares de las pruebas de imprenta del artículo del 20 de noviembre, corregidas (el 6 de diciembre) por el propio Hilbert[36]. Y al estudiarlas, comprobó que Hilbert modificó lo que había presentado el 20 de noviembre teniendo en cuenta el contenido del artículo de Einstein del 25 de noviembre.

Ahora lo importante no es si Hilbert plagió o no a Einstein; de hecho, para llegar a una conclusión equilibrada habría que tener en cuenta el estilo de trabajo de Hilbert, un estilo en el que la interacción con otros era importante, aspecto que en más de una ocasión le llevó a apropiarse de contribuciones de otros científicos, aunque seguramente no lo hacía por egoísmo personal, sino porque pensaba que lo importante no son los individuos sino el avance de la ciencia. Pero dejemos, digo, estos aspectos (al fin y al cabo, después de algunas tensiones, ambos, Einstein y Hilbert, continuaron manteniendo una buena relación), y veamos qué se puede decir de Hilbert y Einstein y la relación entre física y matemáticas, sirviéndome para ello de las cartas que el propio Einstein escribió a dos distinguidos científicos.

La primera carta la envió el 24 de mayo de 1916 a uno de sus mejores amigos, el físico teórico de la Universidad de Leiden Paul Ehrenfest (1880-

[36]L. Corry, J. Renn y J. Stachel, "Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute", *op. cit.*

1933)[37]: “La descripción de Hilbert no me atrae”, escribía allí Einstein, “es innecesariamente especializada con respecto a la ‘materia’, innecesariamente complicada, y no natural (=del tipo Gauss) en su construcción...”. La segunda la dirigió al matemático y físico matemático, sobre el que enseguida diré más, Hermann Weyl, el 23 de noviembre de 1916[38]: “La suposición de Hilbert sobre la materia me parece infantil, en el sentido de un niño que no conoce ninguno de los trucos del mundo exterior... En cualquier caso, no se puede aceptar mezclar las sólidas consideraciones que surgen del postulado de la relatividad con tales osadas, infundadas hipótesis relativas a la estructura del electrón o la materia. Admito sin ningún problema que la búsqueda de una hipótesis adecuada, o de la función de Hamilton para el diseño estructural del electrón, es una de las tareas teóricas más importantes en la actualidad, Sin embargo, el ‘método axiomático’ es de poca utilidad ahí”[39].

Einstein mostraba aquí su recelo ante la aproximación del matemático. No podía aceptar que lo que guiase la búsqueda de las leyes básicas de la física estuviese dominado por la habilidad matemática, que fuese la heurística matemática la que controlase la física. Y, sin embargo, ese estilo sería precisamente el que terminaría dominando su propia investigación.

Generalizaciones matemáticas en la búsqueda de una teoría del campo unificado

El dominio de aplicación de la teoría de la relatividad general era la interacción gravitacional, pero la gravitación no es la única fuerza que existe en el universo: en la época en la que Einstein la desarrolló se conocía perfectamente la existencia de otra, la electromagnética, pero todavía no se habían identificado claramente, aunque existiesen indicios de ellas, las interacciones débil y fuerte. Era, por consiguiente, natural que Einstein o algún otro se plantease incluir en el marco de la relatividad general también al electromagnetismo; esto es, geometrizar no sólo la fuerza gravitacional sino también la electromagnética. De hecho, esto es lo que había intentado Hilbert.

Habida cuenta de que esa geometrización se llevaba a cabo utilizando el elemento básico de los espacios de Riemann, el tensor métrico, $g_{\alpha\beta}$, para

[37]Citada en *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte A, *op. cit.*, p. 288.

[38]Ibíd., p.. 366.

[39]A todo esto hay que añadir que, como escribió el 23 de julio de 1916 a Théofile de Donder (1872-1957), catedrático de Física matemática en la Universidad de Bruselas, Einstein admitía: “que, al contrario que la mayoría de nuestros colegas, yo no soy en absoluto de la opinión de que toda teoría debe ser puesta en la forma de un principio variacional. Atribuyo esta inclinación general al hecho de que todos están acostumbrados a escalares pero no a tensores”. Ibíd.., p. 318. Y la base de la contribución de Hilbert era un principio variacional. La referencia al “método axiomático” se debe a que este era el favorecido por Hilbert, que deseaba reducir toda teoría física a una base axiomática.

describir el campo gravitacional, la pregunta era si sería posible utilizarlo también para incluir al electromagnetismo. Y se encontró que no, que era preciso ir más allá de los espacios de Riemann, generalizarlos.

Sin embargo, no fue Einstein, ni algún otro físico, el que tomó la iniciativa en este programa. Fueron matemáticos, aunque no Hilbert. La historia es, de hecho, demasiado extensa como para poder siquiera resumirla adecuadamente aquí[40]. Simplemente diré que, estimulados por la aparición y poder de la teoría de la relatividad general, algunos matemáticos analizaron los fundamentos de la geometría riemanniana. Así, en 1917 Gerhard Hessenberg (1874-1925), catedrático de Matemáticas en la Escuela Técnica de Breslau (Wroclaw, Polonia, en la actualidad), y Tullio Levi-Civita, publicaron sendos artículos en los que señalaban que la formulación natural de una geometría riemanniana era basándose en la noción de transporte paralelo infinitesimal de un vector, algo que también hizo el año siguiente el matemático holandés Jan Arnouldus Schouten (1883-1971)[41]. Conociendo estos trabajos, en 1918 Hermann Weyl (1885-1955) resaltó que al transportar paralelamente un vector, el valor de su modulo (su "longitud") depende del camino que se sigue en tal transporte, de manera que para describir un espacio que tomase en cuenta tal propiedad era necesario introducir un nuevo conjunto de funciones; esto es, que no bastaba para definirlo con el tensor métrico.

Weyl, uno de los científicos más interesantes de esta historia, un matemático absolutamente permeable a la física y a la filosofía, escogió para presentar sus ideas geométricas un libro cuyo título ya expresa su relevancia para el tema del presente artículo: *Raum-Zeit-Materie. Vorlesungen uber allgemeine Relativitätstheorie* (*Espacio-Tiempo-Materia. Conferencias sobre relatividad general*)[42]. Con respecto a la generalización de la geometría rie-

[40]Ver, por ejemplo, Vladimir P. Vizgin, *Unified Field Theories* (Birkhäuser, Basilea 1994).

[41]Gerhard Hessenberg, "Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie", *Mathematische Annalen* 78, 187-217 (1917); Tullio Levi-Civita, "Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana", *Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo* 42, 173-205 (1917); Jan Schouten, "Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie", *Verhandelingen Koninklijke Akademie van Wetenchappen te Amsterdam* 12, 3-98 (1918). Entre las contribuciones de Schouten a la geometría diferencial destaca su influyente libro *Der Ricci-Kalkul* (Berlín 1924), que fue vertido al inglés, aunque sustancialmente modificado en 1954 bajo el título de *Ricci-Calculus.* Prácticamente toda la carrera científica de Schouten estuvo dedicada a la geometría diferencial y sus aplicaciones, incluyendo la teoría de la relatividad y las teorías de campo unificado. Algunos detalles sobre la relación de Schouten con Levi-Civita y el cálculo tensorial se encuentran en el artículo de Dirk Struik, "Schouten, Levi-Civita and the emergence of tensor calculus", en *The History of Modern Mathematics*, vol II *(Institutions and Applications)*, David E. Rowe y John McCleary, eds. (Academic Press, San Diego 1989), pp. 99–105. Struik (1894-2000), que también efectuó contribuciones a la geometría diferencial, fue estudiante de Schouten en la Universidad Politécnica de Delf.

[42]El libro fue publicado por la editorial Julius Springer de Berlín. Sobre Weyl ver, por ejemplo, Skuli Sigurdsson, *Hermann Weyl, Mathematics and Physics, 1900-1927*, tesis doc-

Jan A. Schouten
(1883–1971)

Hermann Weyl
(1885–1955)

manniana, Weyl escribía en esta obra[43]: "Inducido por las sólidas inferencias de la teoría de Einstein a examinar de nuevo los fundamentos matemáticos, el presente autor hizo el descubrimiento de que la geometría de Riemann sólo llega a medio camino en lo que se refiere a alcanzar el ideal de una geometría infinitesimal pura. Todavía permanece por erradicar el último elemento de geometría 'a distancia', un residuo de su pasado euclideano. Riemann supone que también es posible comparar las longitudes de dos elementos de línea en puntos *diferentes* del espacio; *en una geometría 'de lo infinitamente próximo' no es permisible utilizar comparaciones a distancia*".

Consecuencia de la generalización geométrica introducida, el nuevo espacio (al que muchos llaman en la actualidad "espacios de Weyl") necesitaba para quedar definido el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, pero también un cuadrivector, ψ_a. Con estas nuevas cuatro variables, Weyl argumentaba que podía introducir –esto es, "geometrizar" – el campo electromagnético.

Cuando Weyl le informó del contenido de sus investigaciones y le envió su libro, Einstein quedó fascinado. "Estoy leyendo con genuino deleite las pruebas de su libro, que voy recibiendo página a página", le escribía a Weyl el 8 de marzo de 1918. "Es como una pieza sinfónica maestra. Cada palabra tiene su relación con el conjunto, y el diseño de la obra es grandioso. ¡Que magnífico método es el desplazamiento infinitesimal de vectores para deducir el tensor de Riemann! Cuán naturalmente surge todo. Y ahora ha dado usted a luz al

toral (Harvard University, Cambridge, Mass. 1991), así como los diversos artículos incluidos en Erhard Scholz, ed., *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a General Introduction to His Scientific Work* (Birkhäuser, Basilea 2001).

[43]He utilizado la traducción al ingles de la cuarta edición alemana (1922): Hermann Weyl, *Space-Time-Matter* (Dover, Nueva York 1952), p. 102.

niño que yo no pude obtener: ¡la construcción de las ecuaciones de Maxwell a partir de los $g_{\alpha\beta}$!"[44].

Es cierto que Einstein enseguida encontró puntos (consecuencias físicas) con los que estaba en desacuerdo[45], pero no olvidó la lección que el ejemplo del intento de Weyl implicaba: nuevas matemáticas, generalizaciones de los espacios riemannianos que había utilizado para la relatividad general, podían abrir el camino para resolver el problema que siguiendo a Hilbert y a Weyl él también asumió, encontrar una teoría geométrica unitaria de la gravitación y el electromagnetismo. Una tarea, por cierto, a la que también se unió pronto Arthur Eddington, que en 1921 profundizó en la línea abierta por Weyl, y cuyas ideas influyeron bastante en Einstein[46].

Durante los años a los que estoy refiriéndome, los primeros después de que Einstein completase la teoría de la relatividad general, las interacciones entre matemáticas, matemáticos y relatividad general no hacían sino crecer. Felix Klein (1849-1925), el patriarca de Gotinga, estaba entusiasmado por cómo la teoría de la gravitación einsteniana (y también, de hecho, la teoría especial) resonaba con su célebre "Programa de Erlangen"[47], la tesis que, influida por los trabajos sobre la teoría de grupos continuos de Sophus Lie (1842-1899), planteó en la lección inaugural que pronunció al tomar posesión en 1872 de una cátedra en la Universidad de Erlangen. La geometría, vino a decir entonces Klein, no es sino el estudio de los invariantes de un grupo de transformaciones. Existen, en otras palabras, tantas geometrías como grupos de transformaciones, una perspectiva que permitía ver a la relatividad especial como una geometría lorentziana, y a la general como la geometría del grupo de transformaciones generales. Confiado en sus habilidades, Klein

[44]Citada en Robert Schulmann, A. J. Kox, Michel Janssen y Jozsef Illy, eds., *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte B (Princeton University Press, Princeton 1998), pp. 669–670.

[45]"H. Weyl", escribía Einstein a Hilbert el 12 de abril de 1918, "ha presentado a la Academia de aquí [la Prusiana de Ciencias] a través mío un artículo altamente interesante, en el que busca comprender la gravitación y el electromagnetismo como un sistema de conceptos geométricamente unificado. Matemáticamente, la cosa es maravillosa. Pero físicamente no lo puedo aceptar". Citada en *The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte B, *op. cit.*, p. 716.

[46]Arthur S. Eddington, "A generalization of Weyl's theory of the electro-magnetic and gravitational fields", *Proceedings of the Royal Society A* 99, 104–122 (1921). Es imposible no mencionar en una ocasión como la presente que Eddington fue autor de un influyente libro titulado *The Mathematical Theory of Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge 1923). Sobre la relación entre Einstein y Eddington, ver John Stachel, "Einstein and Eddington", en J. Stachel, *Einstein from 'B' to 'Z'*, *op. cit.*, pp. 453-475.

[47]Felix Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (A. Deichert, Erlangen 1872). El texto de Klein ha sido traducido al, al menos, inglés y francés, lengua esta última en que es accesible fácilmente: Felix Klein, "Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes", en F. Klein, *Le Programme d'Erlangen* (Editions Jacques Gabay, París 1991).

se lanzó a investigar la relatividad general, inundando a Einstein con numerosas y frecuentemente extensas cartas. A mencionar también que Klein y Hilbert fueron decisivos en que Emmy Noether (1882-1935), la extraordinaria matemática que pugnaba (a la postre vanamente) por abrirse camino en el machista mundo universitario germano, abandonase durante un tiempo sus investigaciones sobre invariantes algebraicos dedicándose a estudiar las relaciones en principios variacionales entre simetrías (o invariancias) y leyes de conservación, con el propósito último de elucidar el papel de las denominadas "identidades de Bianchi" en las ecuaciones del campo de la relatividad general. En 1918, Noether resolvió el problema, publicando un artículo que contiene los que se denominan "teoremas de Noether", unos instrumentos matemáticos esplendorosos no sólo (ni siquiera principalmente) para la relatividad general sino para el conjunto de la física teórica[48]. Einstein, por cierto, recibió con entusiasmo estos trabajos de Noether; en este sentido, escribía a Hilbert el 24 de mayo de 1918[49]: "Ayer recibí un artículo muy interesante de la Srta. Noether sobre la generación de invariantes. Me impresiona que estas cosas puedan ser tratadas desde un punto de vista tan general". Y añadía[50]: "No habría hecho daño a la vieja guardia de Gotinga que se hubiese enviado a la Srta. Noether para que les diese clase". Unos meses más tarde, el 27 de diciembre, tras recibir el segundo de los artículos de Noether, repetía su admiración por ella, que como mujer era rechazada por los claustros universitarios, en una carta a Felix Klein: "Lo que me incita a escribirle hoy es un asunto diferente. Al recibir el nuevo artículo de la Srta. Noether, de nuevo he sentido la gran injusticia que es el que le sea negada la *venia legendi*. Yo apoyaría con fuerza el tomar medidas de presión en el Ministerio".

También en Francia encontró eco la relatividad general, y en nada más y nada menos que Élie Cartan (1869-1951), uno de los líderes de la matemática gala, que a lo largo de su carrera cultivó dominios como los de la teoría de los grupos de Lie, la teoría de los espinores, sistemas de ecuaciones en derivadas parciales y teoría de espacios con conexiones lineales, en algunos casos realizando aportaciones fundamentales. El interés de Cartan por los trabajos de Einstein y la relación que mantuvo con éste surgió de la siguiente manera.

Sabedor, a través sobre todo de los trabajos de Weyl, de las posibilidades que para geometrizar también el electromagnetismo tenía generalizar los

[48]Emmy Noether, "Invarianten beliebiger Differentialausdrücke", *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 37–44 (1918); "Invariante Variationsprobleme", *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 235–257 (1918). Esta aportación de Noether (que falleció en 1935, como consecuencia de una operación nada complicada a la que fue sometida en Estados Unidos, a donde tuvo que emigrar en 1933 por su condición de judía) se estudia en David Rowe, "The Göttingen response to general relativity and Emmy Noether's theorems", en *The Symbolic Universe*, *op. cit.*, pp. 189-233.

[49]*The Collected Papers of Albert Einstein*, vol. 8, Parte B, *op. cit.*, p. 774.

[50]Ibíd., p. 976.

espacios de Riemann, en 1928 Einstein presentó, separados por una semana (7 y 14 de junio), a la Academia Prusiana de Ciencias dos artículos con los que pretendía desarrollar una teoría del campo unificado utilizando la noción de paralelismo a distancia, a la que enseguida volveré[51]. En estos artículos de Einstein no hay ninguna nota o mención que permita averiguar si las ideas matemáticas que utilizaba (y que se explicaban sobre todo en el primer trabajo) las había desarrollado él mismo o las había tomado de otros, aunque la manera en que se expresaba parece indicar que eran propias. Por entonces, sin embargo, existía una cierta literatura matemática sobre la clase de espacios de Riemann que estaba utilizando Einstein, unos espacios que incluían además de la noción tradicional de curvatura, otra denominada "torsión", representada por un tensor antisimétrico. En aquellos espacios que la conexión es lineal, existen dos posibilidades: (a) si la torsión es igual a cero, pero no así la curvatura, el espacio en cuestión es el de Riemann; (b) si la curvatura es cero, pero no la torsión, se trata de un espacio con *Fernparallelismus* (paralelismo a distancia)[52].

La literatura matemática a la que me refiero tiene como nombres propios a dos matemáticos: a Élie Cartan y al estadounidense Luther Pfahler Eisenhart (1876-1965)[53].

Establecida semejante base de partida, podemos continuar. Y hacerlo citando de una carta que el 8 de mayo de 1929 Cartan dirigía a Einstein[54]: "En sus recientes artículos en el *Sitzungsberichte* dedicados a una nueva teoría de la relatividad generalizada, ha introducido usted la noción de *Fernparallelismus*

[51]A. Einstein, "Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus", *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*, sesión del 7 de junio 1928, pp. 217–221; "Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feld-theorie von Gravitation und elektrizität", *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*, sesión del 14 de junio 1928, pp. 224–227.

[52]Los autores de lengua inglesa solían traducir *Fernparallelismus* por *Absolute parallelism*, mientras que los franceses utilizaban la expresión *Parallélisme à distance*.

[53]E. Cartan, "Sur une géneralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 174, 593–595 (1922) y "Sur les variétés à conexión affine et la théorie de la relativité généralisée", *Annales de l'École Normale* 40, 325–412 (1923); L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry* (American Mathematical Society Colloquium Publications, Nueva York 1927). Eisenhart fue una autoridad en el campo de la geometría riemanniana. Recordemos, en este sentido, sus libros: *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces* (1909) y *Riemannian Geometry* (1926). Sobre Eisenhart, consultar: Solomon Lefschetz, "Luther Pfahler Eisenhart", en Peter Duren, ed., *A Century of Mathematics in America*, Parte I (American Mathematical Society, Providence 1988), pp. 57–67.

[54]Citada en Robert Debever, ed., *Elie Cartan-Albert Einstein. Letters on Absolute Parallelism, 1929-1932* (Princeton University Press, Princeton 1979), pp. 4–5. Algunos aspectos de esta correspondencia se estudian en Michel Biezunski, "Inside the coconut: the Einstein-Cartan discussion on distant parallelism", en D. Howard y J. Stachel, eds., *Einstein and the History of General Relativity*, *op. cit.*, 315–324.

Élie Cartan
(1869–1951)

L. P. Eisenhart
(1876–1965)

en un espacio riemanniano. Ahora bien, la noción de un espacio riemanniano provisto de un *Fernparallelismus* es un caso especial de una noción más general, la de espacio con una conexión euclidea, que yo esbocé brevemente en 1922 en un artículo en las *Comptes Rendus* (vol. 174, pp. 593–595), publicado cuando usted pronunció sus conferencias en el Collège de France; recuerdo incluso haber intentado, en casa de M. Hadamard, darle a usted el ejemplo más simple de un espacio de Riemann con *Fernparallelismus*...".

A vuelta de correo, el 10 de mayo, Einstein admitía que Cartan tenía razón: "Veo, efectivamente, que las variedades que he utilizado son un caso especial de las estudiadas por usted". E inmediatamente mencionaba otros nombres: "Eisenhart (en Princeton) y Weitzenböck (en Saar) también establecieron parcialmente los fundamentos matemáticos de mi teoría antes de que lo hiciese yo. Este último, en un artículo publicado en las actas de nuestra Academia, los *Sitz. Ber.* 1928, XXVI, ha dado una (supuestamente completa) bibliografía de trabajos matemáticos relevantes, pero ha pasado por alto el trabajo de usted". Refiriéndose a las explicaciones que Cartan le había dado en 1922 en casa de Hadarmard, Einstein señalaba que "no las comprendí en absoluto... todavía menos claro fue para mí cómo podían ser utiles para una teoría física".

El matemático citado por Einstein, Roland Weitzenböck (1885-1955), se había ocupado de los invariantes en teorías físicas desde 1913, y todo indica que estimulado por los últimos trabajos de Einstein se había unido al nuevo campo físico-matemárico, publicando el artículo que el creador de la relatividad citaba y que incluía catorce referencias, pero ninguna de Cartan, para irritación de éste[55]. El hecho es, en cualquier caso, que de esta manera se inició un intercambio epistolar entre Einstein y Cartan que se mantuvo hasta 1932 y cuya lectura nos muestra las exigencias matemáticas a las que se veía constantemente sometido el genial físico. Exigencias ante las que, justo es reconocerlo, respondía muy bien, aunque dada la novedad de muchas de las técnicas que necesitaba en su búsqueda de una teoría del campo unificado, y también la complicación de los cálculos implicados, recurriese a ayudantes matemáticos.

Las matemáticas y los ayudantes de Einstein

Cuando se repasa la biografía científica de Einstein, y los colaboradores con los que se relacionó, se encuentra que con anterioridad a 1917, y con la excepción de Marcel Grossmann, estos fueron físicos, no matemáticos. Así, a partir de 1909 colaboró con: Ludwig Hopf (1884-1939), un estudiante de Arnold Sommerfeld con quien en 1910 escribió un artículo titulado "Sobre un teorema del cálculo de probabilidad y su aplicación a la teoría de la radiación"; Jakob Johann Laub (1882-1927), con el que trabajó sobre la teoría especial de la relatividad; Walther Ritz (1878-1909), con quien abordó problemas relacionados con la teoría especial de la relatividad y la electrodinámica; y Erwin Finlay Freundlich (1885-1964), el astrónomo (el 1 de julio de 1910 fue designado ayudante en el Observatorio Real de Berlín) al que en 1911 Einstein pidió que investigase las consecuencias astronómicas de la teoría relativista de la gravitación que estaba intentado desarrollar entonces[56].

En 1917, el año, recordemos, en que aparecieron los trabajos antes citados de Hessenberg y Levi-Civita, Einstein tomó como ayudante a Jakob Grommer (1879-1933), un judío ruso que cuando llegó a Gotinga se hizo notar por su extraordinaria capacidad para aprender rápidamente matemáticas[57]. Grommer colaboró con Einstein hasta 1928, cuando consiguió un puesto en Minks, donde falleció.

Con Grommer, Einstein trabajó en la teoría que propuso en 1921 el matemático polaco (asignando a Polonia sus fronteras actuales) y lingüista dis-

[55] R. Weitzenböck, "Differential-invarianten in der Einsteinschen Theorie der Fernparallelism", *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte*, sesión del 18 de octubre de 1928, pp. 466-474. Ver, asimismo, R. Weitznböck, "Über Bewegungsinvarianten", *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften* (Wien). *Mathematisch-naturwissenschafteliche Klasse. Abteilung Iia*, pp. 1241–1258, 1565–1606 (1913), 406–431, 567–581, 679–1697 (1914); 309–331 (1915).

[56] Detalles de las relaciones de Einstein con algunos de sus colaboradores se mencionan en Lewis Pyenson, "Einstein's early scientific collaborators", *Historical Studies in the Physical Sciences* 7, 83-123 (1976).

[57] Grommer presentó su tesis doctoral (dirigida por David Hilbert) en Gotinga (1914); se titulaba: *Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen.*

tinguido Theodor Kaluza (1885-1954)[58]. La teoría de Kaluza, que el propio Einstein presentó para su publicación a la Academia Prusiana de Ciencias, introducía otra novedad matemática: pretendía unificar gravitación y electromagnetismo utilizando una variedad geométrica de cinco dimensiones, y aunque no parece que la idea entusiasmase demasiado a Einstein, no desestimó considerarla, buscando con Grommer soluciones exactas de sus ecuaciones del campo[59]. También trabajó con él en el dominio de las teorías introducidas por Weyl y Eddington.

Theodor Kaluza
(1885–1954)

Cornelius Lanczos
(1892–1974)

Tras Grommer, durante un año (1928-1929) trabajó con Einstein el físico y matemático húngaro Cornelius Lanczos (1892-1974), un gran admirador de Einstein que ya había publicado trabajos sobre la relatividad, tema al que dedicaría una buena parte de su obra. Entre los temas que abordaron figura el del paralelismo a distancia, pero no llegaron a publicar nada juntos[60]. Después de Lanczos vino Walther Mayer (1887-1948), un matemático natural de Graz (Austria) que había estudiado en el Politécnico de Zúrich, Viena, París y

[58]Kaluza había concebido su teoría en 1919, aunque solo la publicó en 1921: Theodor Kaluza, "Zum Unitätsproblem der Physik", *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte*, pp. 966–972 (1921). En 1926, Oskar Klein (1894-1977) intentó aplicar la teoría de Kaluza a la física cuántica, motivo por el cual se terminó llamando a esta teoría como "de Kaluza-Klein". Oskar Klein, "Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie", *Zeitschrift für Physik* 37, 895–906 (1926).

[59]Albert Einstein y Jakob Grommer, "Beweis der Nichtexistenz eines überall regulären zentrisch symmetrischen Feldes nach der Feld-Theorie von Th. Kaluza", *Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolymitanarum: Mathematica et Physica* 1, 1–5 (1923).

[60]La relación de Lanczos con la teoría de la relatividad y con Einstein se trata en *Cornelius Lanczos Collected Published Papers with Commentaries*, 6 vols., William R. Davis, ed. (North Carolina State University, Raleigh 1998).

Gotinga. A finales de 1929, cuando acababa de completar, en colaboración con Adalbert Duschek (1895-1957), un texto dedicado a la geometría riemanniana, que aparecería el año siguiente[61], Mayer comenzó a servir como ayudante de Einstein, naturalmente para ayudarle con las teorías del campo unificado en las que estaba trabajando. Enseguida, en febrero de 1930 aparecía su primer artículo conjunto: trataba de soluciones estáticas de la teoría del paralelismo a distancia[62].

El ejemplo de Mayer sirve de manera magnífica para mostrar la intensidad de la relación que Einstein mantenía entonces (y básicamente la mayor parte del resto de su vida) con las matemáticas. Cuando Albert y Elsa Einstein abandonaron Europa en su primer viaje a California (30 de diciembre de 1930-marzo de 1931), Mayer, al igual que la fiel y eficaz secretaria de Einstein, Helen Dukas, acompañaron al matrimonio, puesto que el autor de las teorías de la relatividad no deseaba interrumpir su colaboración con él. Lo necesitaba. Y continuaba necesitándole cuando decidió abandonar Alemania, en la que no tenía cabida desde la llegada de Hitler al poder en enero de 1933, y Europa. Recibió muchas ofertas de trabajo (de la Universidad Central de Madrid entre ellas), pero se decidió por el Institute for Advanced Study de Princeton, en Estados Unidos, poniendo, eso sí, la condición *sine qua non*, de que se diese un puesto a Mayer en el Instituto, cuya filosofía era admitir únicamente investigadores extraordinarios. Según Albert Tucker (1905-1995), el matemático canadiense que se unió a la Facultad de Matemáticas de Princeton en 1933, progresando hasta obtener una cátedra en 1946 y que es recordado especialmente por haber sido el creador del "dilema del prisionero", "Einstein había insistido en que se le diese a Walter Mayer un puesto en el Instituto o él no iría"[63]. Como es natural, los dirigentes del Instituto, ávidos de contar con el gran genio de la física, aceptaron la condición. Un año después (1934), sin embargo, la colaboración finalizó, aunque Mayer se benefició del acuerdo impuesto por Einstein, permaneciendo en Princeton, ya dedicado a la matemática, hasta su muerte[64].

Tras Mayer llegaron para ayudar a Einstein otros jóvenes especialmente dotados para las matemáticas. Jóvenes como el inglés Banesh Hoffmann (1906-1986), el berlinés de padres rusos Valentine Bargmann (1908-1989), el también berlinés Peter Bergmann (1915-2002), que se doctoró (Praga 1936)

---

[61] A. Duschek y W. Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, 2 vols. (Teubner, Leipzig 1930).

[62] Albert Einstein y Walther Mayer, "Zwei strenge statische lösungen der feldgleichungen der einheitlichen feldtheorie", *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften (Berlin). Sitzungsberichte*, pp. 110–120 (1930).

[63] A. Tucker, "The Institute for Advanced Study in the 1930s", entrevista realizada por William Aspray,
`http://libweb.princeton.edu/libraries/firestone/rbsc/finding_aids/mathoral/pmc34.htm`

[64] Tras abandonar el campo de investigación de Einstein, Mayer se interesó por los trabajos de Marston Morse y de Herbert Busemann.

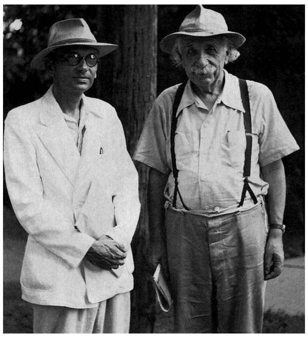
con Philip Frank sucesor de Einstein en la cátedra que éste ocupó en 1911 en la Universidad Alemana de Praga, el polaco Leopold Infeld (1893-1968), el alemán Ernst Gabor Straus (1922-1983) o la física teórica Bruria Kaufman (1918-)[65]. De hecho, Einstein pertenecía a la Escuela de Matemáticas del Instituto, cuyo primer claustro estaba formado por, nada más y nada menos, que: Oswald Veblen, Marston Morse, Hermann Weyl, John von Neumann y James Alexander, algunos de los cuales (como Veblen y, por supuesto, Weyl, habían realizado notables contribuciones a la geometría diferencial)[66]. Y en 1939 se incorporaría definitivamente (ya había pasado un año allí en 1933-34) al Instituto y a la Escuela otra luminaria interesada en las teorías de Einstein: Kurt Gödel (1906-1978).

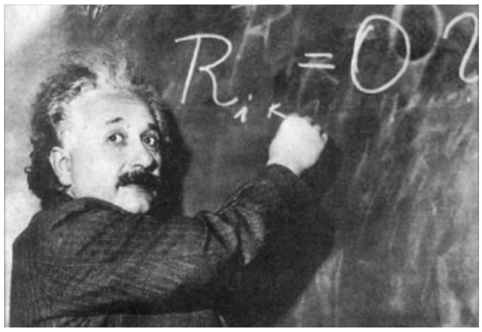
Aparte de las habilidades matemáticas que poseían los ayudantes de Einstein que acabo de citar, es difícil encontrar una caracterización común. Así, Infeld y Hoffmann (quien, por cierto, comenzó su carrera trabajando en geometría proyectiva con Veblen, con el que obtuvo su doctorado en 1932) trabajaron con Einstein sobre todo en el problema del movimiento, al que ya me referí[67]. Para hacerse una idea de lo complicado que era, matemáticamente,

[65]No menciono todos los ayudantes que tuvo Einstein, sólo los que colaboraron con él en problemas en los que la dimensión matemática era especialmente importante. En un tratamiento más extenso habría que referirse, por ejemplo, a Boris Podolsky y Nathan Rosen, que trabajaron con Einstein en su época de Princeton, publicando con él el famoso artículo de Einstein-Podolsky-Rosen sobre fundamentos de la mecánica cuántica. En su excelente libro, *'Subtle is the Lord...' The Science and the Life of Albert Einstein* (Oxford University Press, Nueva York 1982), pp. 483–497, Abraham Pais ofrece una lista de científicos que colaboraron con Einstein. Prácticamente todos los ayudantes que tuvo Einstein tenían como una de sus lenguas el alemán; asimismo, la gran mayoría eran de origen judío.

[66]Los trabajos de Veblen (1880-1960) sobre geometría dominaron su carrera, comenzando por su primer artículo ("Hilbert's foundations of geometry", *Monist* 13, 303–309 [1903]), y continuando con su tesis doctoral (*A Systems of Axioms for Geometry* [1904]), al igual que con libros como *Projective Geometry*, 2 vols. (1910, 1918). Especialmente a partir de 1922 sus trabajos geométricos, crecientemente sobre geometría diferencial, estuvieron relacionados con la teoría de la relatividad; ejemplos en este sentido son: "Geometry and physics", *Science* 57, 129–139 (1923), o "Projective relativity", *Physical Review* 36, 810–822 (1930), en colaboración con Banesh Hoffmann, quien, como hemos visto, más tarde sería uno de los ayudantes de Einstein. Sobre Veblen, consultar Deane Montgomery, "Oswald Veblen", P. Duren, ed., *A Century of Mathematics in America*, Parte I, *op. cit.*, pp. 119–129. Tampoco hay que olvidar que en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Princeton (cuyas instalaciones albergaron inicialmente al Instituto de Estudio Avanzado) se encontraba Luther Pfahler Eisenhart, con quien ya nos hemos encontrado, que como decano de la Graduate School de la Universidad intervino en la selección de miembros para la Escuela de Matemáticas del Instituto (ver Armand Borel, "The School of Mathematics at the Institute for Advanced Study", en Peter Duren, ed., *A Century of Mathematics in America*, Parte III [American Mathematical Society, Providence 1989], pp. 119–147).

[67]A. Einstein, L. Infeld y B. Hoffmann, "Gravitational equations and the problem of motion", *op. cit.* Nótese que a partir de la década de 1930, Einstein publicó con frecuencia sus artículos en revistas matemáticas.





A la izquierda K. Gödel y A. Einstein en Princeton;
a la derecha A. Einstein escribiendo las ecuaciones
de la relatividad general para el caso del vacío.

el problema, citaré lo que Infeld manifestó en la "Introducción" del libro que escribió con su compatriota Jerzy Plebanski (1928-), *Motion and Relativity* (1960)[68]: "El problema del movimiento en la teoría gravitacional fue resuelto por primera vez en un artículo de Einstein, Infeld y Hoffmann en 1938. Los cálculos fueron tan complicados que tuvimos que dejar como referencia en el Institute for Advanced Study de Princeton el manuscrito completo de los cálculos para que lo utilizaran otros".

Peter Bergmann trabajó con Einstein entre 1936 y 1941 en teorías del campo unificado, la teoría de Kaluza en su caso[69]. Las teorías del campo unificado fueron también el centro de las investigaciones de Valentin Bargmann, que fue ayudante de Einstein entre 1938 y 1943. El mismo Bargmann explicó muchos años después la naturaleza de su trabajo[70]: "Einstein sugirió que yo trabajase en un modelo clásico de un electrón, uno que no fuese esféricamente simétrico –en otras palabras, no la situación que expresa la solución de Reissner-Nödström, sino lo que él imaginaba entonces (lo que ahora llamaríamos una métrica de Kerr), pero para la que nadie conocía una solu-

[68]Pergamon Press, Oxford, p. 7. Infeld mencionó algunos detalles interesante de su colaboración con Einstein sobre el problema del movimiento en relatividad general, en L. Infeld, "On equations of motion in general relativity theory", *Fünfzig Jahre Relativitätstheorie*, André Mercier y Michel Kervaire, eds., *Helvetica Physica Acta. Supplementu*, IV (Birkhäuser, Basilea 1956), pp. 206–209.

[69]A. Einstein y P. Bergmann, "Generalization of Kaluza's theory of electricity", *Annals of Mathematics* 39, 683–701 (1938).

[70]V. Bargmann, "Working with Einstein", en *Some Strangeness in the Proportion*, Harry Woolf, ed. (Addison-Wesley. Reading, Mass. 1980), pp. 478–479.

ción–. Básicamente, exploramos varias clases diferentes de teorías del campo unitario". Que el trabajo de ambos involucraba técnicas matemáticas bastante complejas, es algo que se puede comprobar en, por ejemplo, el artículo conjunto que publicaron en 1944 sobre campos bivectoriales[71].

En cuanto al matemático natural de Múnich Ernst Straus, emigrado a Palestina a la edad de once años, que estudió en Jerusalén, Nueva York y Princeton, publicó dos artículos con Einstein, en los que los aspectos físicos resaltaban más que en otros casos[72]. No obstante, tampoco dejó Einstein de utilizar los poderes matemáticos de su ayudante, como muestra el que intentaron encontrar (en 1944-1945) un esquema matemático que les permitiese sustituir la formulación de campos de la relatividad general por una basada en la vieja noción de acción a distancia. La idea de Einstein, desesperado por entonces de sus repetidos y fracasados intentos por encontrar una teoría del campo unificado, era probar con una teoría de acción a distancia unificada, para lo cual sugirió a Straus dos métodos, uno de los cuales basado en ciertas propiedades de transformaciones integrales, y el otro en la caracterización de Cayley de la métrica euclídea en términos de relaciones algebraicas[73]. Sin embargo, nada resultó de aquellos intentos.

Claustro de la School of Mathematics del Institute for Advanced Study de Princeton. De izquierda a derecha: J. Alexander, M. Morse, A. Einstein, F. Aydelotte (director), H. Weyl y O. Veblen.

[71] A. Einstein y V. Bargmann, "Bivector fiels", *Annals of Mathematics* 45, 1–14 (1944).

[72] A. Einstein y E. G. Straus, "Generalization of the relativistic theory of gravitation", *Annals of Mathematics* 47, 731–741 (1945); "Influence of the expansion of space on the gravitational fields surrounding the individual stars", *Reviews of Modern Physics* 17, 120–124 (1945). Sobre Straus, ver Moshe Goldberg, "Ernst G. Straus (1922-1983), *Linear Algebra and Its Applications* 64, 1–19 (1985).

[73] Carta de Ernst Straus a José M. Sánchez Ron, 31 de mayo de 1979.

En su intervención en el Simposio que se celebró en Princeton en 1979 para celebrar el centenario del nacimiento de Einstein, Straus ofreció una interesante caracterización de las relaciones del creador de la relatividad con las matemáticas. Dijo entonces[74]:

> "La inventiva que Einstein llevó a las teorías que intentamos desarrollar era, esencialmente, una inventiva de estructuras matemáticas; y debo decir que era [una inventiva] extraordinariamente rica... Muy a menudo más rica de lo que le permitía explotar su propio poder matemático. El profesor Pais citó algunos comentarios de Einstein que él considera palabras de desesperación. Yo tengo que decir que las considero justamente lo contrario. Habitualmente, él hablaba de esa manera después de haberse sumergido en una grandiosa visión de posibles modelos de teorías correctas, para los que, sin embargo, sentía que sus poderes matemáticos no eran lo suficientemente grandes, y que el tiempo no le permitía tomarse la libertad de dedicarse a cosas para las que tendría que aprender más matemáticas de las que creía que todavía podía aprender. Esto se puede describir como desesperación, pero no creo que lo fuese. Por el contrario, pienso que se trataba de una especie de entusiasmo gozoso, del sentimiento de que, incluso si yo no sé suficiente, si mis matemáticas no son lo suficientemente poderosas, o no lo suficientemente ricas como para llevar a la práctica mis ideas, todas las posibilidades están ahí. Él resaltaba especialmente las ideas de caracterizaciones topológicas de un universo que tuviese sentido, aunque lo denominaba 'analysis situs', lo que hacía mi vida con los matemáticos difícil. Recuerdo que no podía ir nunca, sin sentirme mal, a un *party* en el que estuviese presente Lefschetz. Porque siempre que Einstein se lo encontraba, le preguntaba: '¿Qué hay de nuevo en el análisis situs?' Lefschetz entonces se guardaba su rabia para soltarla conmigo después, diciéndome: '¿Cómo puedes estar con un hombre que después de cincuenta años todavía llama a la topología 'analysis situs'?".

Y para completar esta lista de los colaboradores de Einstein, hay que referirse a Bruria Kaufman, la única mujer con quien Einstein publicó artículos. Kaufman había estudiado en la Universidad Hebrea de Jerusalén en 1938, doctorándose en Columbia en 1948, tras lo cual pasó al Institute for Advanced Study de Princeton, donde permaneció hasta 1955. Además de colaborar con Einstein, lo hizo con John von Neumann y con Lars Onsager. Su carrera posterior fue bastante distinguida: estuvo en, por ejemplo, el Instituto Courant de Ciencias Matemáticas de Nueva York, y, siendo una ferviente sionista, en

[74] E. Straus, "Working with Einstein", en *Some Strangeness in the Proportion*, H. Woolf, ed., *op. cit.*, pp. 483.

Israel (Instituto Weizmann y Universidad de Haifa) desde 1960 a 1988. Con Einstein publicó dos artículos sobre teorías de campos no simétricas[75]. Fueron sus últimos intentos por cumplir su sueño de encontrar una teoría del campo unificado.

LA IRRESISTIBLE ATRACCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

Albert Einstein, el viejo seguidor de la filosofía de Ernst Mach (1838-1916), sucumbió, pues, al poder, aparente o real, que esa es otra cuestión, de la matemática como guía heurística para la física teórica, aunque, bien es cierto, nunca olvidó que el juez último de una teoría física es siempre la experiencia. De hecho, se puede decir que en lo que a su relación de madurez con las matemáticas se refiere, Einstein recuperó sensaciones que ya había experimentado cuando tenía doce años, momento en que, como recordó en sus *Notas autobiográficas*, cayó en sus manos un librito sobre geometría euclídea. "Había allí asertos", recordaba entonces, "como la intersección de las tres alturas de un triángulo en un punto, por ejemplo, que –aunque en modo alguno evidentes– podían probarse con tanta seguridad que parecían estar a salvo de toda duda. Esta claridad, esta certeza, ejerció sobre mí una impresión indescriptible"[76]. Y enseguida añadía: "Si bien parecía que a través del pensamiento puro era posible lograr un conocimiento seguro sobre los objetos de la experiencia, el 'milagro' descansaba en un error. Mas, para quien lo vive por primera vez, no deja de ser bastante maravilloso que el hombre sea siquiera capaz de lograr, en el pensamiento puro, un grado de certidumbre y pureza como el que los griegos nos mostraron por primera vez en la geometría".

Lo de "si bien parecía que a través del pensamiento puro era posible lograr un conocimiento seguro sobre los objetos de la experiencia, el 'milagro' descansaba en un error", es, a todas luces, un anacronismo: esto es lo que Einstein había terminado creyendo (con razón), no lo que, más que probablemente, pensó cuando descubrió los resultados de la geometría de Euclides[77]. De hecho, el redescubrimiento del poder de las matemáticas que llevó a cabo de la mano

[75] A. Einstein y B. Kaufman, "Algebraic properties of the field in the relativistic theory of the asymmetric fields", *Annals of Mathematics* 59, 230–244 (1954); "A new form of the general relativistic field equations", *Annals of Mathematics* 62, 128–138 (1955). Ver, asimismo, B. Kaufman, "Mathematical structure of the non-symmetric field theory", *Fünfzig Jahre Relativitätstheorie*, A. Mercier y M. Kervaire, eds., *op. cit.*, pp. 227-238.

[76] A. Einstein, *Notas autobiográficas*, *op. cit.*, pp. 15-17.

[77] Al igual que hizo con Einstein, la geometría de Euclides ha fascinado a lo largo de los tiempos a innumerables personas. Como a Bertrand Russell, que en el primer volumen de su autobiografía recordó: "A la edad de once años comencé Euclides, con mi hermano como tutor. Este fue uno de los grandes sucesos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor. No había imaginado que existiese en el mundo algo tan delicioso. Después de haber aprendido la quinta proposición, mi hermano me dijo que ésta era considerada generalmente difícil, pero yo no encontré ningún tipo de dificultad. Fue la primera vez que se me ocurrió la

de la teoría de la relatividad general, el que a partir de un cierto momento, en torno a 1920, no encontrase más guía heurística para proseguir su búsqueda de una teoría del campo unificado, que tan importante era para él (creía que podía conducir a una alternativa causal para la mecánica cuántica, a la que se oponía firmemente); ese redescubrimiento del poder de la matemática, digo, le condujo a defender opiniones como la que expuso durante la conferencia Herbert Spencer que pronunció en Oxford el 10 de junio de 1933[78]:

> "Si es verdad... que la base axiomática de la física teórica no puede ser extraída de la experiencia y debe ser inventada con libertad, ¿podemos esperar que alguna vez hallemos el camino correcto?... Sin ninguna vacilación responderé que, según mi opinión, existe un camino correcto y que somos capaces de hallarlo.
>
> Hasta el momento presente nuestra experiencia nos autoriza a creer que la naturaleza es la realización de las ideas matemáticas más simples que se pueda concebir. Estoy convencido de que, por medio de construcciones matemáticas, podemos descubrir los conceptos y las leyes que los conectan entre sí, que son los elementos que proporcionan la clave para la comprensión de los fenómenos naturales. La experiencia puede sugerir los conceptos matemáticos apropiados, pero éstos, sin duda ninguna, no pueden ser deducidos de ella. Por supuesto que la experiencia retiene su cualidad de criterio último de la utilidad física de una construcción matemática. Pero el principio creativo reside en la matemática. Por tanto, en cierto sentido, considero que el pensamiento puro puede captar la realidad, tal como los antiguos habían soñado".

Largo y variado había sido el camino intelectual que había recorrido el gran maestro de la ciencia del siglo XX cuando realizó estas manifestaciones. Leídas con atención contienen la esencia de su vida como pensador, la vida de una persona que sacrificó el método a la posibilidad de describir la naturaleza, fuesen las que fuesen las herramientas que se viese obligado, o animado, a utilizar. Los procedimientos –los métodos– que empleó debieron en ocasiones mucho a venerables ideas filosóficas, esto es, a la filosofía, dando también lugar a nuevos planteamientos filosóficos. Pero entre esos métodos, la matemática llegó a desempeñar un papel central durante un largo período de su carrera. Ahora bien, todos esos planteamientos, los filosóficos o los matemáticos, siempre estuvieron dirigidos a servir a la física, a la ciencia que busca desentrañar cuales son las leyes básicas a las que obedecen los fenómenos que observamos

---

idea de que acaso tuviese alguna inteligencia". *The Autobiography of Bertrand Russell*, vol. I *(1872-1914)* (George Allen and Unwin LTD, Londres 1967), p. 36.

[78] Albert Einstein, *On the Method of Theoretical Physics* (Clarendon Press, Oxford 1933); versión al español: "Sobre el método de la física teórica", en *Ideas y Opiniones* (Bon Ton, Barcelona 2000), pp. 242-247; cita en pp. 245-246.

en la naturaleza. Física, filosofía y matemática, los tres pilares del mundo, el triángulo mágico, se unieron en su obra con una originalidad, fecundidad y variedad como difícilmente se encuentra en algún otro de los científicos que han honrado con su trabajo la historia de la ciencia.

José Manuel Sánchez Ron
Departamento de Física Teórica
Universidad Autónoma de Madrid
Cantoblanco, 28049 Madrid
Correo electrónico: josem.sanchez@uam.es

Einstein con sus ayudantes
Valentine Bargmann y Peter Bergmann,
Princeton, 2 de octubre de 1940