Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

David Hilbert, Hermann Minkowski, la Axiomatización de la Física y el Problema número seis

por

Manuel F. Rañada

Se analizan, desde una perspectiva histórica, las contribuciones de Hilbert y Minkowski al formalismo de la Física Matemática. En la primera parte, después de repasar sus biografías científicas, se analiza el problema número seis y su influencia, durante los primeros años del siglo XX, en la geometrización y la axiomatización de la Física. En la segunda parte, se resalta la importancia de las conferencias Wolkskehl en el pensamiento científico de Hilbert, y se discute la influencia del programa axiomático de Hilbert en la creación de los formalismos matemáticos para la mecánica relativista, la gravitación y la mecánica cuántica.

Introducción

Hilbert se sintió siempre bastante interesado por la física. Indudablemente esto formaba parte de la tradición matemática de Gotinga ya que tanto Gauss, como Riemann y Klein, habían compartido este interés; pero el hecho de que su actividad científica coincidiera con el nacimiento de las dos grandes teorías físicas del siglo XX, Física Cuántica (1900) y Mecánica Relativista (1905), intensificó aún más esta afición, y lo empujó a dedicarse activamente a la investigación en Física Matemática durante cierto período de su vida (primeros

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Deprtamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: `josef@us.es`

años del siglo XX). Aunque la física debe apoyarse en hechos experimentales, su aproximación consistió en considerar la física como una disciplina matemática. Sus máximos objetivos fueron: establecer con claridad los fundamentos de la física, presentar el formalismo matemático de la física desde una perspectiva geométrica, y desarrollarlo desde un punto de vista axiomático.

VIDAS PARALELAS: HILBERT–MINKOWSKI

David Hilbert nació en Enero de 1862 en Königsberg, por entonces capital de la Prusia Oriental (actualmente Kaliningrado, Rusia)[2]. Su padre Otto Hilbert era juez (primero juez de distrito (*Amtsrichter*) en un pueblo de las cercanías y posteriormente juez en la audiencia de Königsberg). Estudió en la Universidad de Königsberg teniendo como profesores a Ferdinand Lindemann y Heinrich Weber. En aquellos años de estudiante entabló amistad con dos personas que tendrían una gran influencia sobre su trabajo posterior. Uno de ellos, Adolf Hurwitz, que era un poco mayor, acababa de llegar a Königsberg después de leer la tesis doctoral con Klein (Leipzig, 1881). El otro, Hermann Minkowski, era un poco más joven pero, debido a su precocidad, había ingresado en la universidad incluso un poco antes que Hilbert. Estos tres personajes formaron un grupo que se reunía todas las tardes y en el que parece ser que Hurwitz, por razones de edad, ejercía un cierto papel de tutoría científica.

Hermann Minkowski nació en Junio de 1864 en Aleksotas, Rusia, (actualmente Kaunas, Lituania) pero pasó su infancia en Königsberg, ciudad a la que su familia había emigrado poco después de su nacimiento. Después de cursar enseñanza media en el *Gymnasium* local de Königsberg ingresó en la Universidad de Königsberg en 1880 y posteriormente se desplazó a la Universidad de Berlín (Kronecker y Weierstrass en Matemáticas, Helmholtz y Kirchoff en Física[3]). Su primer gran éxito lo obtuvo en 1883 al ganar el *Grand Prix des Sciences Mathematiques* de la Academia de Ciencias de París por un trabajo sobre un problema propuesto por la Academia en 1881: expresar un número entero como suma de cinco cuadrados. Minkowski presentó una memoria en la que estudiaba el problema utilizando la teoría de formas cuadráticas; la memoria obtuvo el premio y dio lugar a su primera publicación[4].

Este trabajo sirvió de base para su Tesis Doctoral que presentó en 1885 en la Universidad de Königsberg. Continuó trabajando en la teoría de formas cuadráticas y obtuvo su *Habilitation* en la Universidad de Bonn.

[2] Una muy buena biografía de Hilbert es [Re]; a un nivel más sencillo puede consultarse [As].

[3] Max Planck, que también estudió en Berlín (era un poco más joven ya que había nacido en 1858), describe en su autobiografía [Pl] las clases impartidas por Helmholtz y Kirchoff de una forma bastante crítica.

[4] Mémoire sur la théorie des formes quadratiques á coefficients entiers, *Mém. Acad. Sci.* (Paris) **29**, no 2, (1884).

Figura 1. David Hilbert

Figura 2. Hermann Minkowski

En 1892 Hurwitz se trasladó al E.T.H. (Instituto Tecnológico) de Zurich y su puesto fue ocupado por Hilbert. En 1893 Lindemann se mueve a Munich y Hilbert sube de categoría y ocupa su puesto de profesor Ordinarius (catedrático). A su vez la plaza que él deja vacante le es ofrecida a Minkowski. De nuevo volvían a estar juntos los dos amigos, pero por poco tiempo, porque en 1895 Hilbert se traslada, por una gestión directa de Klein, a la Universidad de Gotinga donde pasaría el resto de su vida. El puesto que deja vacante es ofrecido a Minkowski pero éste lo ocupa sólo un año ya que en 1896 se traslada al E.T.H. de Zurich donde volverá a coincidir con Hurwitz.

Minkowski trabajó, primero en Bonn y luego en Königsberg, en lo que se denominaría teoría geométrica de números, consistente en estudiar las propiedades algebraicas de los números racionales utilizando para ello propiedades geométricas; el resultado lo resumió en el libro *Die Geometrie der Zahlen* (1896). Paralelamente también se dedicaría al estudio de la geometría de conjuntos convexos.

Hilbert llegó a Gotinga con 33 años y allí permaneció llevando una vida terriblemente regular hasta su fallecimiento en 1943. De hecho, llama la atención lo metódica y ordenada que fue su vida sobre todo cuando se piensa en los grandes cambios históricos que le tocó vivir. Hilbert fue una persona enormemente trabajadora que escribió numerosos trabajos, muchos de los cuales han sido calificados de revolucionarios. Además de aportaciones con un alto grado de originalidad científica, sus artículos y libros muestran un enorme deseo de introducir orden y de establecer de forma clara y rigurosa los fundamentos de la materia que está estudiando. *Grosso modo*, sus contribuciones científicas se pueden agrupar en cinco grandes temáticas que fue desarrollando de forma consecutiva a lo largo de su vida:

(i) Invariantes Algebraicos y Teoría Algebraica de Números;

(ii) Geometría (geometrías no Euclideas y fundamentación rigurosa de la geometría);

(iii) Ecuaciones Integrales (al principio teoría rigurosa, después aplicaciones a la física);

(iv) Física Matemática (ecuaciones del campo electromagnético, mecánica relativista y gravitación);

(v) Fundamentos (sistemas formales, teoría de la demostración, y metamatemática).

La primera materia en la que trabajó Hilbert fue la teoría de invariantes algebraicos. La teoría de invariantes de formas cuadráticas había sido iniciada por Boole y continuada en Inglaterra por Cayley y Sylvester, que extendieron la teoría para polinomios homogéneos en 2, 3, o más variables; poco después el interés se trasladó a Alemania donde Clebsh y Gordan se dedicaron a trabajar en esta temática. Despues de leer la tesis doctoral (Gotinga, 1885) bajo la dirección de Lindemann, Hilbert visitó personalmente a Gordan y siguió trabajando en este tema así como en el estudio de los números algebraicos hasta completar una larga memoria (algo así como un resumen del trabajo de varios años) titulada *Die Theorie der algebraischen Zahlkoerper* (Teoría de cuerpos de numéros algebraicos) conocida coloquialmente como *Zahlbericht* (1897).

La segunda línea de investigación fue geométrica y culminó con la publicación en 1899 del libro *Die Grundlagen der Geometrie* [Hi1].

Como es bien sabido el problema de la independencia del quinto postulado condujo a una lectura crítica de los *Elementos* de Euclides. Por otra parte los trabajos de Gauss, Bolyai y Lobachevsky primero, y de Riemann y Klein después, condujeron a la necesidad de fundamentar de forma correcta no una sino las varias posibles geometrías. Los *Elementos* de Euclides tenían una estructura interna totalmente deductiva pero con algunos puntos, como la elección de los cinco axiomas iniciales, bastante discutibles. Más aún, los matemáticos de finales del XIX eran ya conscientes de que no todos los términos que se usan en una rama de las matemáticas se pueden definir. Peano se había planteado este problema en *Sui fundamenti della geometria* (1894), y llegó a la conclusión de que debe admitirse la existencia de un número reducido de ideas básicas que deben permanecer como indefinidas. Por otra parte, Hilbert era consciente de que la mayor parte de la matemática se podía desarrollar ya en una fundamentación estrictamente axiomática y decidió extender esta fundamentación a la geometría[5].

Hilbert comenzó su tratamiento considerando tres tipos de objetos indefinidos: puntos, rectas, y planos; y seis tipos de relaciones indefinidas: 'estar en', 'estar sobre', 'estar entre', 'ser paralelo', 'ser continuo' y 'ser congruente'. Lo importante no era su significado sino el que las consecuencias de utilizar esas palabras tuviera un significado claro. Hilbert sustituyó los cinco axiomas (nociones comunes) y los cinco postulados de Euclides por un conjunto de veintiun axiomas ("axiomas de Hilbert") que divide en cinco grupos:

(i) postulados de incidencia,

(ii) de orden,

(iii) de congruencia,

(iv) un único postulado sobre las paralelas que resulta equivalente al quinto postulado de Euclides en el caso de la geometría Euclidea, y finalmente,

(v) de continuidad.

En este nuevo planteamiento, los axiomas ya no se consideran verdades fundamentales que no necesitan demostración, sino simplemente puntos básicos, independientes y consistentes entre sí, y sobre los cuales se puede construir una estructura matemática sin contradicciones internas. El impacto de este libro fue enorme[6].

Max Born, que conoció a Hilbert en 1904 y posteriormente sería discípulo suyo, lo resumió de esta forma tan directa: "Todo el mundo leía su libro *Die Grundlagen der Geometrie* que se consideraba una especie de Euclides moderno" ([BB], *"Recuerdos de Gotinga"*), y añadía,

> "Al igual que en las Matemáticas de los antiguos griegos, todo el edificio de la Geometría de Hilbert se levantaba sobre una serie de axiomas rígidamente formulados, pero con criterios fundamentales totalmente nuevos: los de independencia y total ausencia de contradicción entre los axiomas. Las ideas utilizadas para este fin (la construcción de geometrías no-Euclideas, la representación de formas geométricas sobre formas aritméticas) constituían el punto de partida de un nuevo desarrollo de todas las Matemáticas: la Axiomática".

[5] Vease el prólogo de Sánchez Ron a la edición española del libro de Hilbert [Hi1].

[6] Hilbert revisó el libro en varias ocasiones. Se suele considerar como definitiva la versión de 1930.

Hilbert era ya, gracias a *Zahlbericht* y los *Grundlagen*, un matemático de enorme prestigio antes de 1900, año en el que presentó su famosa contribución en el Congreso Internacional de París; el caso es que le fue ofrecida poco después la cátedra que quedaba vacante en la Universidad de Berlín por jubilación de Fuchs. Una cátedra en Berlín era el máximo reconocimento dentro del esquema universitario alemán de aquella época. Sin embargo Hilbert estaba fuertemente identificado con Gotinga y decidió rechazarla. En esta ocasión demostró cómo el pensamiento abstracto no tiene por qué estar reñido con el sentido práctico y la capacidad negociadora, ya que decidió solicitar, a cambio de su permanencia en Gotinga, la dotación de una tercera cátedra y que ésta fuera concedida a Minkowski. Ambos deseos le fueron concedidos y de esta forma los dos amigos se volvieron a reunir en 1902.

PARÍS 1900

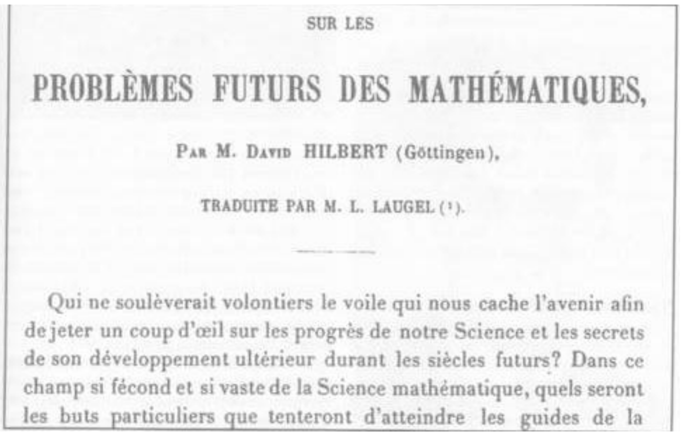
LOS 23 PROBLEMAS

Hilbert acudió, en el verano de 1900, al Segundo Congreso Internacional de Matemáticas que se celebró en París[7] y presentó, el día 8 de Agosto, una comunicación de título engañosamente simple: *Problemas Matemáticos* [Hi2]. Consta de una introducción, la parte central y unos comentarios finales. La introducción comienza con un párrafo cuyo estilo es, cuando menos, poco frecuente en la literatura científica:

> "¿Quién de nosotros no se alegraría de levantar el velo detrás del cual se oculta el futuro? ¿de echar una mirada a los próximos avances de nuestra ciencia? [. . .] ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos, en el ancho y rico mundo del pensamiento matemático, nos serán revelados en los siglos venideros?".

Pero rápidamente pasa a analizar lo que él entiende por "problema matemático", comenta cómo en cada época los científicos se han tenido que enfrentar a ciertos problemas característicos de su momento histórico. Recuerda, a modo de ejemplo, el problema de la braquistocrona de Bernoulli, y observa cómo la resolución de ciertos problemas muy concretos ha tenido consecuencias importantes en el avance de las matemáticas, a veces incluso en ramas aparentemente alejadas de la propia del problema estudiado. Finalmente plantea la conveniencia de presentar una lista de los problemas matemáticos que en ese momento, en el que empieza un nuevo siglo, permanecen abiertos a la espera de su resolución. Esta cuestión ocupa la parte central de la comunicación (unas cuatro quintas partes del total) consistente en un largo y detallado análisis de un total de 23 problemas de naturaleza bastante distinta y que en su opinión son, o debieran ser, los puntos fundamentales a investigar por los matemáticos

[7] El primero de estos congresos se había celebrado en Zurich en 1897.



SUR LES

PROBLÈMES FUTURS DES MATHÉMATIQUES,

Par M. David HILBERT (Göttingen),

TRADUITE PAR M. L. LAUGEL (1).

Qui ne soulèverait volontiers le voile qui nous cache l'avenir afin de jeter un coup d'œil sur les progrès de notre Science et les secrets de son développement ultérieur durant les siècles futurs? Dans ce champ si fécond et si vaste de la Science mathématique, quels seront les buts particuliers que tenteront d'atteindre les guides de la

Figura 3. Extracto de la comunicación de Hilbert en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos

del siglo XX. Finalmente, termina con unos comentarios en los que resalta cómo los problemas mencionados muestran la enorme variedad y riqueza de las matemáticas del momento (el comienzo del nuevo siglo) y añade unas observaciones que reflejan su visión personal de esta ciencia:

> "La ciencia matemática es en mi opinión una totalidad indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión entre sus partes. [...] La unidad orgánica de las matemáticas es inherente a la naturaleza de esta ciencia, porque la matemática es el fundamento del conocimiento exacto de los fenómenos naturales."

Hilbert discutió en su comunicación oral, se supone que por razones de tiempo, tan sólo diez de los 23 problemas. Por otra parte, en la introducción, comenta dos problemas muy particulares: 'el último teorema de Fermat' (cita a Kummer) y 'el problema de los tres cuerpos' (cita a Poincaré). Resalta que ambos problemas han sido, y continúan siendo, muy importantes no sólo por sí mismos sino también como origen de nuevos problemas derivados. Pero no los numera. Por consiguiente, si los incorporamos a la lista, el número total pasa a ser de 25. Por otra parte, el propio Hilbert introduce de forma clara una distinción entre los seis primeros y todos los demás. En efecto, después de discutir el sexto problema y antes de comenzar con el séptimo comenta

> "Hasta este momento hemos considerado sólo cuestiones relacionadas con los fundamentos de las Ciencias Matemáticas. De hecho, el estudio de los fundamentos de las Ciencias es siempre particularmente atractivo, y la comprobación de estos fundamentos siempre estará entre los problemas más interesantes para el investigador".

y a continuación añade:

> "Weierstrass dijo en cierta ocasión: El objeto final que debemos llevar en nuestra mente es llegar a una comprensión correcta de los fundamentos de la ciencia... Pero para obtener progresos es indispensable, por supuesto, el estudio de problemas particulares".

Esto es, Hilbert decide iniciar la lista colocando en primer lugar un bloque de seis problemas que, en su opinión, afectan a cuestiones fundamentales que deben preocupar a todo matemático independientemente de su especialidad. A partir del séptimo ("Estudiar si la expresión a^b es un número trascendente cuando a es algebraico y b es irracional algebraico"), y el octavo ("Conjetura de Riemann sobre los ceros de la función zeta"), todos los problemas serán (o intentarán ser) bastante más concretos, más especializados, y afectando a una rama particular de las Matemáticas.

A pesar de una aparente sencillez, Hilbert hace ostentación de unos conocimientos impresionantemente amplios[8] pero, puestos a poner defectos, digamos que algunos críticos han comentado que el conocimiento de Hilbert estaba fundamentalmente centrado en la matemática centro-europea, francesa y británica, ignorando, por ejemplo, a los geómetras italianos de finales del XIX [GG]. En efecto, se puede comprobar la ausencia de nombres italianos en la lista de referencias.

Un problema que es mucho más que un problema

Por otra parte, algunos de los problemas no son en realidad un problema concreto sino toda una temática de investigación. Esto es cierto, fundamentalmente, en el caso del último problema ("Nuevos desarrollos en los Métodos del Cálculo de Variaciones") que no consiste en proponer la resolución de alguna dificultad concreta entre las muchas que surgen en el Cálculo de Variaciones, sino en una propuesta general para desarrollar, incorporando "la moderna demanda del rigor", esta rama de las Matemáticas.

Pero consideremos el problema número seis, el último de los problemas relativos a los fundamentos de las ciencias matemáticas. Su título es: "Tratamiento Matemático de los Axiomas de la Física" y su planteamiento es el siguiente:

> "Las investigaciones en los fundamentos de la geometría sugieren el siguiente problema: *Tratar de la misma manera, por medio de axiomas, aquellas ciencias físicas en las que la matemática juegue un papel importante: en primer lugar la teoría de probabilidades y la mecánica*".

[8]Antiguamente algunos matemáticos, como Euler, Gauss o Cauchy, tenían un conocimiento casi total de todas las ramas de las matemáticas; se suele decir que Hilbert y Poincaré han sido los dos últimos ejemplares de esa especie ya extinguida.

¿Es esto un problema? No lo es en el sentido usual de la palabra, desde luego. Más bien parece algo mucho más transcendente, una propuesta para una posible línea de investigación que aparentemente envuelve, no sólo las correspondientes dificultades técnicas que deben aparecer en todo trabajo científico, sino también un muy discutible posicionamiento científico-filosófico, consistente en admitir la conveniencia de aplicar a la Física, que es una ciencia de la Naturaleza, algo que ha tenido éxito en una rama de las Matemáticas.

Llegados a este punto conviene dejar bien claro que existe una diferencia notable entre 'Matematización de la Física' y 'Axiomatización de la Física'. Como ya hemos indicado más arriba, la Física es una ciencia de la Naturaleza y, consecuentemente, es una ciencia que se debe desarrollar basandose en datos experimentales. Galileo fue el primer científico que estableció con claridad (aunque de forma un tanto poética para los gustos actuales) la idea de que las leyes de la Física son todas ellas expresables en lenguaje matemático. Primero sus seguidores en Italia (Torricelli, Viviani) y luego Huygens y Newton y sus contemporaneos (Barrow, Halley, Hooke, Wren), desarrollaron las ideas de Galileo y buscaron un formalismo matemático apropiado para la mecánica. Los desarrollos posteriores de los Bernoulli, de Riccati y sobre todo de Euler, hicieron que al finalizar el siglo XVIII, época de Lagrange y de Laplace, la mecánica (número finito de grados de libertad) pudiera considerarse como una ciencia totalmente 'matematizada'. Pero la propuesta de Hilbert va mucho más allá; propone no contentarse con descubrir el formalismo matemático que gobierna la Naturaleza (que ya es bastante), sino además demostrar que este formalismo, que recordemos debe adecuarse a los experimentos, admite además una presentación formal similar a la geométrica.

El caso es que Newton cuando, a sugerencia de Halley, se decide a escribir un libro de mecánica desde una perspectiva matemática, toma como modelo a Euclides[9]. El resultado es que los *Principia* (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687) tienen una estructura bastante axiomática donde el papel de los famosos cinco postulados de Euclides intenta ser desempeñado por un conjunto de tres leyes del movimiento ("Las leyes de Newton"). Así las cosas, el trabajo de Newton podría ser considerado como un precedente para el problema número seis, aunque conviene dejar bien claro que los *Principia*, por más que sea uno de los documentos más importantes en toda la historia de la ciencia, desde un punto de vista puramente axiomático es fácilmente criticable.

Pero consideremos la obra de Euclides. Durante muchos siglos la geometría Euclídea fue sinónimo de geometría (la geometría Cartesiana no se oponía sino que podía ser considerada como un perfeccionamiento de la geometría de Euclides). Sin embargo el siglo XIX aporta ideas geométricas totalmente nuevas; primero Beltrami, luego Klein, y más tarde Poincaré y Hilbert, demostraron

[9]Conviene resaltar que aunque Newton es un continuador de Galileo, su forma de presentar los resultados es totalmente distinta.

que la geometría hiperbólica, considerada como un sistema formal deductivo, era tan satisfactoria como la geometría Euclídea clásica. A partir de ese momento la geometría Euclídea pasó a ser una de las varias geometrías existentes (en un lenguaje Riemanniano, un caso muy particular de espacio con curvatura constante); la diferencia estribaba en que se suponía que Euclides describía el mundo real externo y las otras eran simplemente 'invención del hombre'. Sorprendentemente, esto hizo que pasara de ser una teoría matemática a ser una teoría física. Penrose, que defiende esta interpretación, clasifica, en su conocido libro *La nueva mente del emperador* [Pe], las teorías físicas en tres categorías: Soberbias, Útiles, y Tentativas. En el primer grupo incluye siete teorías físicas que, en su opinión, han demostrado tener un alcance y una exactitud realmente extraordinarios. Pues bien, la primera teoría física que coloca en este grupo es precisamente la 'Geometría Euclidea'. Comenta que, aunque los científicos de tiempos pasados pudieron no considerarla como una teoría física, eso es en su opinión lo que realmente es: "una sublime y soberbiamente precisa teoría del espacio físico (y de la geometría de los cuerpos rígidos)".

Pero volvamos al sexto problema. De entrada digamos que, aunque este problema podría ser considerado como algo peculiar y diferenciado de los demás, Hilbert lo situó entre los más importantes; al menos fue uno de los diez seleccionados para la exposición oral. Parece ser que su origen se encuentra en la doble actividad que Hilbert desarrolló durante los años previos a París: por una parte escribe *Die Grundlagen der Geometrie*, por otra empieza a impartir cursos de mecánica. Son en principio dos actividades distintas pero que, de alguna forma, se superponen y le llevan a plantearse la aplicación de la axiomática geométrica a las leyes de la física. Por aquellos años escribe [Sa]

> "La geometría es una ciencia que se ha desarrollado hasta un nivel tal que todas sus propiedades pueden ser obtenidas por deducción lógica a partir de otras propiedades previamente admitidas".

y a continuación añade

> "Se trata de una situación completamente diferente a lo que ocurre, por ejemplo, con la teoría de la electricidad o la óptica donde, incluso actualmente, se siguen descubriendo nuevos hechos".

Parece deducirse de estas frases que Hilbert ya se había empezado a plantear el sexto problema hacia 1895-97 y que, aún encontrando deseable la axiomatización de la física, era consciente de que las dificultades surgían al intentar compatibilizar esquemas formales deductivos con medidas experimentales (posibilidad de que los laboratorios descubran fenómenos nuevos que puedan romper los esquemas). No se trata pues de axiomatizar toda la física, sino algunas de sus ramas; de ahí la frase "en primer lugar la teoría de probabilidades y la mecánica" (la expresión 'teoría de probabilidades' hace referencia a la Mecánica Estadística desarrollada por los años 1880-1900 fundamentalmente por Boltzmann).

Hilbert, que está al tanto de los trabajos recientes en mecánica, no cita a los creadores del formalismo matemático de la mecánica (e.g., Poisson, Jacobi, Liouville, Hamilton) sino que comenta cómo durante esos últimos años (1890-1900) algunos físicos han hecho importantes contribuciones a los fundamentos de la mecánica (cita a Mach, Hertz, Boltzmann y Volkmann) y a continuación añade: "es por consiguiente muy deseable que la discusión sobre los fundamentos de la mecánica sea desarrollada también por matemáticos".

Hilbert y Minkowski: 1902–1909

A partir del año 1902 Hilbert y Minkowski volvieron a estar juntos, pero esta vez en Gotinga. Felix Klein, que tenía un enorme prestigio tanto en el campo científico (era el autor, con motivo de la toma de posesión en 1872 de su primera cátedra en la universidad de Erlangen, del famoso trabajo conocido como *Programa de Erlangen*), como en la gestión universitaria (había impulsado el desarrollo de las áreas científicas en Gotinga logrando la creación de varios nuevos departamentos)[10], los acogió favorablemente, y formó con ellos un trío, que luego con Carl Runge se transformaría en cuarteto, que dió una enorme fama a la Universidad de Gotinga. Max Born, que había empezado a estudiar matemáticas en su ciudad natal de Breslau (actualmente Wroklaw, Polonia) y luego se trasladó a Gotinga, lo recuerda de la siguiente forma ([BB], *"Recuerdos y reflexiones de un físico"*):

> "Me enteré de que Gotinga era La Meca de las Matemáticas teutonas, y que allí vivían tres profetas: Felix Klein, David Hilbert y Hermann Minkowski. Por consiguiente, me decidí a peregrinar hasta allí".

Y centrándose en Hilbert y Minkowski comenta ([BB], *"Recuerdos de Gotinga"*):

> "Ambos procedían de Königsberg, en Prusia Oriental, y eran amigos desde la juventud, presentando en muchos aspectos fuertes contrastes. Hilbert era un prusiano rubio, Minkowski un judío moreno, cuya familia había emigrado de Rusia hacía poco tiempo. Pero congeniaron no sólo en las matemáticas, sino también en muchos aspectos humanos, sobre todo en la ausencia de todo prejuicio, en la rectitud y honradez y en su jovialidad y franqueza ante la vida".

Al margen de la investigación (a la que luego haremos referencia), durante esos años decidieron dedicarse a impartir cursos de física (en realidad, física

[10] En aquella época las universidades alemanas tenían un representante en el Senado, y Klein fue elegido para tan distinguido puesto. Gracias a sus gestiones en Berlín, la Universidad de Gotinga consiguió la creación de varios Institutos Universitarios [BB, MR].

matemática). Dos temáticas les interesaron fundamentalmente: la mecánica de medios continuos (mecánica con ecuaciones en derivadas parciales) y la teoría de la radiación electromagnética (teoría de Maxwell-Lorentz); el último seminario que impartieron juntos fue durante el curso 1907-08 y estuvo dedicado a las aplicaciones de las cuaciones en derivadas parciales a problemas de física. Acudimos de nuevo a los recuerdos de Max Born: ([BB], *"Recuerdos y reflexiones de un físico"*):

> "En Gotinga yo asistía principalmente a las clases de Hilbert y Minkowski. Eran amigos desde su época de colegiales en Königsberg, y ambos eran hombres extraordinarios".

Y a continuación añade

> "En aquella época, las Matemáticas abarcaban también la Física Matemática. Por ejemplo, Hilbert y Minkowski dirigían un seminario sobre la 'Electrodinámica de los cuerpos en movimiento', en el que se trataban problemas que hoy día se incluyen bajo el nombre de Relatividad. Esto ocurría en el año 1905, el mismo año en el que apareció el famoso trabajo de Einstein, pero entonces en Gotinga todavía no era conocido su nombre".

Conviene resaltar que estos cursos estaban organizados por las cátedras de matemática y eran independientes de las actividades que, de forma paralela, desarrollaban los Institutos de Física.

Desde el punto de vista de la investigación, Hilbert decidió sumergirse en una nueva temática. En 1900, Erik Fredholm, profesor de matemáticas en Estocolmo, escribió un trabajo sobre el problema de Dirichlet (teoría del potencial con condiciones de contorno) en el que, siguiendo una idea de Poincaré de transformar el problema de potencial en una ecuación integral y utilizando resultados previos de Volterra, estudiaba las ecuaciones integrales que hoy llevan su nombre. Este trabajo produjo un fuerte impacto en Gotinga y Hilbert decidió dejar a un lado sus aficiones geométricas y dedicarse al estudio de dichas ecuaciones. El resultado fue la aparición, entre 1906 y 1910, de una serie de seis trabajos bastante extensos sobre dicho tema (también de varias tesis doctorales) todos ellos con el título "Grundzüge eine allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen" (Fundamentos de una teoría general de ecuaciones integrales lineales) y numerados sucesivamente de I a VI; posteriormente los recogió en un libro que apareció tambien con el mismo nombre. Esta temática siguió siendo estudiada por varios de sus discipulos, fundamentalmente por Erhard Schmidt y Hermann Weyl (Hilbert consideraba una función f como representada por sus coeficientes de Fourier que debían satisfacer la condición de que la suma $\sum a_p^2$ fuera finita; Schmidt generalizó estas ideas introduciendo lo que hoy denominamos Espacios de Hilbert).

Por otra parte, en 1905 ocurrió algo que iba a tener gran influencia entre los matemáticos de Gotinga. Una de las grandes aportaciones científicas de la segunda mitad del siglo XIX fue, sin duda alguna, la teoría del campo electromagnético de Maxwell; pero pasados los primeros años de alegría surgió la crisis: esta nueva teoría no era compatible con la mecánica de Newton. Tanto Lorentz como Poincaré se dedicaron intensamente al estudio del comportamiento de las ecuaciones de Maxwell bajo las tansformaciones de Galileo, pero quien resolvió esta cuestión fue un casi desconocido Einstein que publicó en 1905 el que iba a ser uno de los trabajos más importantes del siglo que entonces empezaba, *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*[11]. Einstein propuso mantener la electrodinámica de Maxwell y modificar la mecánica de Newton creando de esta forma una nueva rama de la física que se llamaría 'mecánica relativista' o 'teoría de la Relatividad (restringida)'. El impacto de la nueva mecánica fue enorme en todas las universidades alemanas pero sobre todo en Gotinga donde, como ya hemos comentado, el seminario de Hilbert-Minkowski estaba estudiando esas mismas cuestiones (en Francia la situación fue muy distinta ya que Poincaré recibió con bastante frialdad las nuevas ideas de Einstein; de hecho la nueva 'mecánica relativista' permaneció bastante marginada en las universidades francesas hasta que Paul Langévin[12] la promocionó varios años después).

Minkowski, que había estado estudiando las teorías pre-relativistas de Lorentz y Poincaré, se sintió muy interesado por el nuevo enfoque relativista. Digamos antes que Einstein había estudiado en el E.T.H. de Zurich y había tenido a Hurwitz y a Minkowski como profesores, y que cuando Minkowski se encontró con que la nueva teoría provenía de aquel antiguo alumno de Zurich, expresó su sorpresa, ya que parece ser que tenía algunas dudas sobre el nivel de los conocimientos matemáticos de Einstein. En cualquier caso, a partir de 1905, Minkowski se concentró casi totalmente en el desarrollo de la electrodinámica incorporando las nuevas ideas de Einstein a la teoría previa de Maxwell-Lorentz.

Minkowski, aunque valoraba positivamente las ideas de Einstein, llegó a la conclusión de que el formalismo matemático utilizado no era el adecuado. Einstein afirmaba que las transformaciones de Galileo debían ser sustituidas por las transformaciones de Lorentz y que, como consecuencia de ello, el tiempo perdía su caracter absoluto para pasar a ser algo relativo. Para Minkowski estas nuevas ideas físicas (con importantes implicaciones filosóficas) debían ser desarrolladas utilizando nuevos planteamientos matemáticos. En su opinión, había que considerar el tiempo como una cuarta dimensión y desarrollar

[11] Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17**, 891–921 (1905). La versión española de este artículo puede encontrarse en [St].

[12] Paul Langévin era discípulo de Pierre Curie y trabajó fundamentalmente en magnetismo, física atómica y física molecular. Su primer contacto con Einstein se debió a su interés por el artículo sobre 'Movimiento Browniano' (1905), pero posteriormente quedó impresionado por la equivalencia relativista entre masa y energía. Gracias a su influencia, y a su entusiasmo relativista, los científicos franceses abandonaron su escepticismo inicial y aceptaron las ideas einstenianas.

geométricamente esta idea; de esta forma las ideas de Einstein fueron expresadas en un nuevo lenguaje geométrico en un espacio de cuatro dimensiones pero con una métrica pseudo-Euclídea. En geometría Euclídea, el cuadrado $r^2 = x^2+y^2+z^2$ de la longitud de un vector tridimensional (distancia Euclidea entre dos puntos) permanece invariante bajo las transformaciones ortogonales que, interpretadas físicamente, se corresponden con las transformaciones de Galileo. En geometría Minkowskiana, la expresión cuadrática

$$s^2 = g_{\mu\nu}\, x^\mu\, x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

permanece invariante bajo transformaciones de Lorentz. Los índices griegos μ, ν, van de 0 a 3, y el tensor métrico $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ en este nuevo espacio viene dado por $g_{\nu\mu} = 0$ si $\mu\neq\nu$, y $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = 1$. Por consiguiente, las transformaciones de Lorentz se deben interpretar geométricamente como las transformaciones ortogonales de un espacio con métrica de signatura $(3,1)$; la velocidad, aceleración y la fuerza deben ser sustituidas por sus versiones cuadri-dimensionales (cuadri-velocidad, cuadri-aceleración y cuadri-fuerza), los cuadri-vectores pueden tener longitud positiva, negativa, o nula; y lo que es incluso más importante, al introducir un cuadri-potencial electromagnético A^μ, $\mu = 0,1,2,3$, las ecuaciones de Maxwell adoptan una forma asombrosamente simple. En resumen, todo lo que en Einstein era complicado y confuso, adopta ahora con este formalismo geométrico, una forma elegante y sencilla. Para sorpresa de todos, las leyes de la física deben ser planteadas en un mundo pseudo-Euclideo con cuatro dimensiones.

Minkowski presentó el formalismo que hoy lleva su nombre en tres conferencias [Co1]. La primera de ellas impartida en Gotinga, dio lugar a un artículo que apareció publicado en 1908[13]; las otras dos fueron *Das Relativitätsprinzip* (El principio de relatividad), comunicación presentada en Gotinga en Noviembre de 1907 y, posteriormente, *Raum und Zeit*[14](Espacio y tiempo), presentada en Colonia en Septiembre de 1908, de donde procede el siguiente párrafo introductorio:

> "Los puntos de vista sobre el espacio y el tiempo que deseo presentar ante ustedes surgieron del seno de la física experimental, y de ahí proviene su solidez. Son puntos de vista radicales. De aquí en adelante, el espacio por si mismo y el tiempo por si mismo están condenados a desvanecerse, y sólo una especie de unión entre los dos soportará una realidad independiente".

Minkowski no llegó a vivir para ver impresas estas dos últimas comunicaciones, ya que murió en enero de 1909 como consecuencia de las complicaciones surgidas en una operación de apendicitis.

[13] Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körper, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 53–111 (1908).

[14] [LE] contiene la versión inglesa de este artículo con comentarios de Sommerfeld.

Acabaremos esta sección con dos observaciones. En primer lugar, está plenamente admitido que Poincaré fue el primero en introducir la idea de un espacio relativista de cuatro dimensiones; pero se limitó a indicar la posibilidad de interpretar el tiempo t como una cuarta coordenada y a comentar la conveniencia de introducir la unidad imaginaria para reescribir las expresiones cuadráticas relativístas como suma de cuadrados positivos

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (ict)^2 \,.$$

Por los motivos que sean, no fue capaz de desarrollar las consecuencias geométricas de esta idea; posiblemente la utilización de coeficientes complejos le privó de adivinar la existencia de geometrías no euclídeas.

En segundo lugar, resaltemos que Minkowski introduce un grupo de transformaciones del espacio-tiempo G_c que depende de c como parámetro, analiza las propiedades y los invariantes de G_c, demuestra que el grupo límite G_∞ caracteríza la mecánica Newtoniana, pero resalta que G_c es matemáticamente más inteligible que G_∞. Está claro que esta aproximación grupo-teórica a un problema geométrico puede considerarse como surgida dentro del espíritu del Programa de Erlangen. Es cierto que, en sentido estricto, Erlangen está relacionado con el análisis comparativo de varias geometrías, pero la aproximación minkowskiana utilizando el grupo G_c cae claramente dentro de este espíritu. En años posteriores surgieron otras posibles geometrías relativistas, espacios de De-Sitter y anti De-Sitter, y se pudo extender la aproximación minkowskiana a estas nuevas geometrías.

Las conferencias Wolkskehl

En 1906 Paul Wolkskehl, un rico industrial alemán que había estudiado matemáticas y que, aunque se había dedicado a las finanzas, habia seguido manteniendo un cierto contacto con el mundo académico, decidió establecer un premio destinado al primer científico que fuera capaz de demostrar el famoso último teorema de Fermat. En efecto, a su muerte en 1908 su testamento establecía un fondo de 100.000 marcos para tal efecto y depositaba su confianza en la Universidad de Gotinga[15] para que se encargara de la organización y concesión de dicho premio[16].

Asimismo, y hasta que surgiera el matemático que probara dicho teorema, las rentas del fondo estarían a disposición de los matemáticos de Gotinga para que las emplearan, de la forma que consideraran más adecuada, en el progreso de las matemáticas.

La comisión Wolkskehl, formada inicialmente por Ehlers, Hilbert, Klein, Minkowski y Runge, decidió destinar la renta anual que producía el fondo para

[15] Realmente la entidad encargada no era propiamente la Universidad sino la Academia de Ciencias de Gotinga (*Königliche Gesellschaft der Wissenschaften*) asociada a la Universidad.

[16] Una versión traducida de esta convocatoria puede encontrarse en el capítulo X de [Si].

organizar ciclos de conferencias y estancias científicas en Gotinga de profesores de otras universidades.

El primer invitado fue Henri Poincaré, que impartió un ciclo de seis conferencias en Abril de 1909. Las tres primeras estuvieron dedicadas a las ecuaciones integrales de Fredholm (en la primera estudió propiedades fundamentales y en las otras dos aplicaciones de estas ecuaciones a la mecánica y a las ondas electromagnéticas). La cuarta y la quinta trataron sobre integrales Abelianas y números transfinitos; finalmente la última se denominaba *"La mecanique nouvelle"*. Parece ser que a algunos profesores de Gotinga les pareció una desconsideración [Re], por parte de Poincaré, el que se atreviera a dictar conferencias sobre ecuaciones integrales allí en Gotinga, donde estaban los máximos especialistas. Sin embargo, desde una perspectiva actual, llama más la atención el hecho de que la última conferencia estuviera dedicada a la mecánica relativista y, al parecer, Poincaré no citara a Einstein[17].

El segundo invitado fue Hendrik A. Lorentz que impartió un ciclo de seis conferencias en Octubre de 1910 titulado "Viejos y nuevos problemas en Física". Estos problemas resultaron ser los siguientes: las Ecuaciones de Maxwell (en esta primera charla utilizaba fundamentalmente la teoría del Eter), la Teoría de la relatividad (formalismo de Einstein), las anomalias en el movimiento de Mercurio y necesidad de una posible modificación de la gravitación Newtoniana, la Propagación del calor, y finalmente en las dos últimas presentó sus ideas sobre la Teoría cuántica de Planck (antigua Física cuántica).

El tercer conferenciante invitado fue Arnold Sommerfeld que en Mayo de 1912 impartió un curso con título "Recientes avances en Física". Sommerfeld, que era profesor de Física Teórica en la Universidad de Munich, había estudiado matemáticas en Königsberg, donde había conocido personalmente a Hilbert, y luego se había trasladado a Gotinga, donde había sido incluso ayudante de Klein; posteriormente decidió dedicarse a la física, distinguiéndose como uno de los creadores de la Física Cuántica. Sus conferencias se centraron en el estudio de las propiedades de los rayos X, informando sobre los reciente experimentos de von Laue[18].

[17]Sobre las contribuciones de Poincaré a la mecánica relativista véase [SR1] y el prólogo en [Po]; los aspectos dinámicos son estudiados en [Gr].

[18]En 1895 W. Roentgen obtuvo experimentalmente, al hacer incidir electrones rápidos sobre materia, una radiación altamente penetrante y de naturaleza desconocida. No mucho después de su descubrimiento tanto Roentgen como otros científicos empezaron a sospechar que los rayos X eran ondas electromagnéticas; sin embargo su naturaleza ondulatoria resultó muy dificil de probar. En 1912 Max von Laue advirtió que la longitud de onda supuesta para los rayos X parecía ser del mismo orden que la distancia entre los átomos de las estructuras cristalinas y propuso la utilización de cristales para obtener la difracción de rayos X. Estos experimentos (realizados en colaboración con W. Friedrich y P. Knipping) sirvieron para probar la naturaleza ondulatoria de los rayos X y le valieron a von Laue el premio Nobel de Física de 1914.

El 1913 D. Hilbert decidió organizar un pequeño congreso sobre teoría cinética de gases y teoría de la radiación (*Kinetische Gas-Kongress*). Se trató de una reunión en la que participaron, entre otros, Peter Debye, Walther Nernst, Max Planck, Arnold Sommerfeld y Hendrick Lorentz.

Posiblemente la visita más famosa, por las consecuencias que tuvo en la linea científica de Hilbert, fue la de Albert Einstein en el verano de 1915, que comentaremos en la próxima sección. En los tres años siguientes fueron invitados M. von Smoluchowski (1916, Teoría cinética de gases), Gustav Mie (1917, Relatividad y teoría del campo electromagnético), y Max Planck (1918, Física cuántica). Con el final de la guerra hubo una enorme crisis económica que afectó a todas las instituciones alemanas, incluidas las conferencias Wolkskehl; a pesar de todo, se siguieron celebrando. En 1922 tuvieron lugar las conferencias de Niels Bohr sobre física cuántica, conocidas coloquialmente como festival Bohr [MR], [SR2], que tuvieron una enorme importancia en el nacimiento de la mecánica cuántica.

La enumeración de los nombres de los conferenciantes y de las temáticas estudiadas, muestran claramente el interés de Hilbert y de la mayoría de los matemáticos de Gotinga por los temas de física. Conviene resaltar que esta situación era una de las características del mundo académico de Gotinga; en otras Universidades las cosas no eran así y física y matemática mantenían posiciones más distantes. Incluso en la propia Gotinga, Landau, que había ocupado la cátedra de Minkowski, se mantuvo al margen de la línea físico-matemática. Por supuesto, continuaron interesandose también por la matemática abstracta y así, por ejemplo, la comisión Wolkskehl decidió conceder en 1911 un premio a Ernst Zermelo por sus importantes contribuciones a la teoría axiomática de conjuntos. Sin embargo durante el período 1908-1918, que va desde los trabajos de Minkowski hasta el final de la guerra, Hilbert estuvo básicamente centrado en la física matemática.

Hilbert, Einstein y la Gravitación

Posiblemente la geometría de Minkowski sea el primer ejemplo de una teoría matemática abstracta, de una 'invención del hombre' ajena a la geometría de Euclides, que resulta apropiada para describir fenómenos físicos basados en hechos experimentales. El formalismo de Minkowski tuvo, visto desde una perspectiva actual, un impacto enorme; pero le ocurrió lo que le suele ocurrir a casi todas las teorías revolucionarias: que necesitan un cierto tiempo para poder ser asimiladas. Para empezar, a principios de siglo la casi totalidad de los físicos, e incluso muchos de los matemáticos, desconocían totalmente lo que era una geometría pseudo-Euclídea. Resultaba desconcertante que, para comprender fenómenos tales como la propagación de las ondas electromagnéticas, fuera necesario estudiar una extraña geometría en la que los vectores podían incluso tener longitud negativa. Incluso al principio, el propio Einstein no se sintió demasiado interesado por el formalismo geométrico

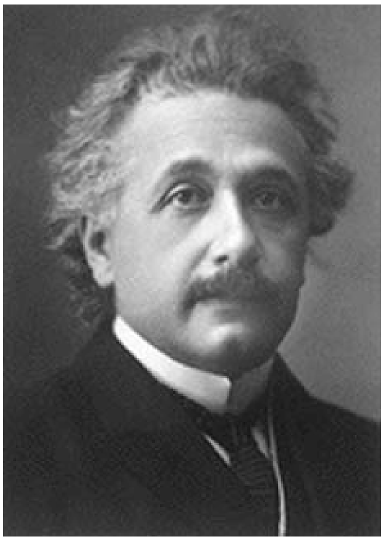


Figura 4. Albert Einstein

de Minkowski, y parece ser que en cierta ocasión lo calificó de *“überflüssige Gelehrsamkeit”* (erudición superflua) [Pa]. Esta actitud einsteniana debió ser conocida en Gotinga ya que, parece ser que Hilbert comentó a su vez: “Cualquier muchacho en las calles de Gotinga comprende mejor que Einstein la geometría cuadri-dimensional” [Re].

Sin embargo las cosas iban a cambiar rápidamente. Hacia el año 1910, Einstein empezó a plantearse la necesidad de ampliar la ‘mecánica relativista’ dando lugar a una nueva teoría relativista que fuera apropiada para el estudio de los fenómenos gravitatorios (relatividad generalizada). Inmediatamente comprendió que la nueva gravitación relativista tenía que ser formulada utilizando un formalismo geométrico en el espacio-tiempo con cuatro dimensiones.

Einstein inició su teoría gravitatoria partiendo de un principio físico, el Principio de Equivalencia, pero para desarrollarla matemáticamente no sólo utilizó el formalismo de Minkowski, sino que incluso se vió obligado a ir más allá. En efecto, la búsqueda de una formulación matemática para la gravitación sugería la conveniencia de trabajar en un espacio-tiempo con curvatura. Ante las dificultades geométricas, Einstein se puso en contacto con un antiguo compañero de estudios, Marcel Grossmann, que había estudiado matemáticas, se había especializado en geometría y era entonces profesor del E.T.H. de Zurich donde acababa de alcanzar el puesto de decano de la sección matemático-física [Pa]; los dos juntos empezaron a desarrollar, a partir de 1912, la teoría geométrica de la gravitación. Consideraron como punto de partida la expresión Riemanniana

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

y supusieron que el tensor métrico $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x)$, que determina las propiedades geométricas, caracterizaba también el campo gravitatorio; esto es, las componentes $g_{\alpha\beta}$ del tensor métrico g sustituyen, en este formalismo, al potencial escalar Φ de la gravitación newtoniana. De esta forma las ecuaciones del campo gravitatorio deben ser ecuaciones en derivadas parciales para las componentes $g_{\alpha\beta}$ de g. Los trabajos de Einstein y Grossmann aparecieron en 1913 y 1914.

Born, que había regresado a Gotinga a finales de 1908 para trabajar con Minkowski, se había dedicado a desarrollar, utilizando el formalismo geométrico de Minkowski, la teoría electromagnética de Mie [Co4]. Al mismo tiempo, tanto Hilbert, como Klein, Born, Debye y otros, mantenían un seguimiento bastante detallado de los trabajos de Einstein. Por otra parte, Hilbert tenía una gran ventaja sobre Einstein, y es que no tenía que estudiar los fundamentos de la geometría Riemanniana; los conocía desde hace tiempo. Así estaban las cosas cuando Einstein acudió a Gotinga para dictar las conferencias Wolkskehl. Debido a la guerra el número de asistentes fue algo más reducido de lo normal (por ejemplo, Born había sido movilizado y estaba en Berlín), pero, al parecer, fue todo un éxito, y Hilbert, que demostró conocer muy bien los trabajos de Einstein y Grossmann, discutió con apasionamiento los últimos avances en la temática. Indudablemente las dudas que en su momento pudo tener sobre el nivel matemático de Einstein quedaron totalmente olvidadas, ya que mostró públicamente su entusiasmo. El resultado es que ambos, Einstein y Hilbert, se dedicaron durante los meses siguientes a trabajar, de forma independiente, en lo mismo: obtener las ecuaciones para el campo gravitatorio.

Las investigaciones paralelas desarrolladas por Einstein y Hilbert durante los años 1915-1916 es un tema apasionante que está siendo bastante estudiado por los historiadores de la ciencia moderna [Co2, Co3, Co4, Me, Sa]. Nos limitaremos a presentar el punto de vista de Hilbert que es el tema que estamos analizando en este artículo.

Hilbert dió un seminario el 20 de Noviembre de 1915 que daría lugar a un primer artículo titulado Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung)[19], y a una segunda parte publicada poco después Die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilung)[20].

Indudablemente el objetivo era la obtención de las ecuaciones del campo gravitatorio, pero el título que eligió para exponer sus resultados, "Los fundamentos de la física, I y II" muestran claramente que su objetivo era más ambicioso. En el fondo, Hilbert quiso hacer con la gravitación y el electromagnetismo lo que había hecho con la geometría: establecer con claridad los fundamentos, y deducir resultados a partir de un conjunto reducido de puntos fundamentales claramente establecidos. De hecho, Hilbert basa toda su teoría

[19] *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 395–407, (1915).
[20] *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* 53–76, (1917).

en sólo dos axiomas. El primer axioma introduce una integral de acción

$$\int H \sqrt{g}\, d^4x \quad (d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3)$$

donde g es el determinante de la métrica y H es una función[21] que depende de las componentes $g_{\alpha\beta}$ de la métrica y de sus derivadas primeras y segundas, asi como del (cuadri) potencial electromagnético A_μ y sus primeras derivadas. El axioma establece que las leyes de la física están determinadas por la condición de que se anulen las variaciones de la integral de acción (esto conduce a 14 ecuaciones). El segundo axioma postula que la función H se mantiene invariante bajo transformaciones arbitrarias de coordenadas. Posteriormente el artículo se vuelve más técnico, analiza la forma de H, y discute las propiedades de las ecuaciones[22]; pero lo que realmente caracteriza esta aproximación es que toda la teoría se apoya en tres puntos esenciales: estructura axiomática, método deductivo y origen Lagrangiano de las ecuaciones. Técnicamente los resultados finales son muy similares a los de Einstein, pero la filosofía de su aproximación es claramente distinta.

Conviene recordar que, aunque hoy en día el nombre de Einstein es fundamentalmente asociado al de un físico teórico preocupado por cuestiones muy abstractas, sus primeros intereses científicos fueron la termodinámica clásica, la física estadística y la física molecular; de hecho su tesis doctoral trató de los radios moleculares y el número de Avogadro [St] y sus primeros trabajos estuvieron relacionados con la explicación teórica de ciertos fenómenos experimentales como el movimiento Browniano, el efecto fotoeléctrico, o los calores específicos (a partir de los años veinte empezaría a desarrollar unos comportamientos científicos muy personales y a distanciarse de la mayoría de sus compañeros). Aunque la gravitación relativista era una cuestión bastante distinta a las anteriores, más matemática y más abstracta, Einstein enfocó su teoría utilizando técnicas de geometría diferencial pero manteniendo siempre un fuerte contacto con la realidad física.

En 1905 Einstein inició la Relatividad Restringida de una forma bastante original; en lugar de analizar los resultados previos de Lorentz y Poincaré, decidió considerar como punto de partida el análisis del concepto de 'simultaneidad' (si la velocidad de la luz es finita la simultaneidad debe tener caracter relativo) para deducir luego las transformaciones de Lorentz, analizar las ecuaciones de Maxwell y corregir la mecánica Newtoniana. Unos años después decide considerar como punto de partida para su nueva teoría el análisis del Principio de Equivalencia (equivalencia entre las masas inercial y gravitatoria y su relación con los sistemas no inerciales). Posteriormente analiza

[21]Hilbert utiliza la notación H inicial de Hamiltoniano, pero esta teoría es una teoría Lagrangiana.

[22]Conviene resaltar que el análisis estas ecuaciones Lagrangianas es el origen del famoso trabajo de Noether de 1918.

cuestiones de naturaleza aparentemente diversa como el principio de Mach, la curvatura de la luz o ciertos experimentos imaginarios (*Gedankenexperiment*); discute también el caracter local de las leyes de la física, y presenta sus resultados de una forma escalonada, incorporando algunas correcciones, hasta llegar finalmente a lo que hoy día conocemos como ecuaciones de Einstein. Es frecuente resaltar las diferencias entre las aproximaciones einsteniana y hilbertiana, diciendo que Einstein obtiene los resultados utilizando razonamientos fundamentalmente inductivos y Hilbert haciendo uso riguroso del método deductivo.

Gotinga, Hilbert y el nacimiento de la Mecánica Cuántica

La idea de presentar las teorías físicas desde una perspectiva axiomática se ha generalizado bastante e incluso se ha creado toda una corriente de partidarios de esta aproximación [Bu]. Uno de los pioneros fue Carathéodory, que se había doctorado en Gotinga con Minkowski, y que publicó en 1909 una axiomatización de la Termodinámica. Sin embargo, probablemente se pueda considerar a la Mecánica Cuántica como la rama de la física que más habitualmente es presentada como una disciplina construida sobre un número reducido de principios básicos.

Como es sabido, la Mecánica Cuántica surgió de la unión de dos teorías aparentamente distintas, la 'Mecánica de las Matrices' de Heisenberg (1925) y la 'Mecánica Ondulatoria' de Schrödinger (1926), y alcanzó, en muy pocos años, un estatus bastante coherente y riguroso. La primera de las dos Mecánicas Cuánticas, se originó precisamente en Gotinga donde Heisenberg, que era discípulo de Sommerfeld, había acudido a trabajar con Born. El trabajo inicial de Heisenberg, revolucionario desde el punto de vista físico, exigía un replanteamiento matemático. El nuevo formalismo fue desarrollado por el grupo de Gotinga (Born, Heisenberg y Jordan)[23] utilizando álgebra matricial para reescribir, de forma adecuada, ciertas propiedades no conmutativas introducidas por Heisenberg; posteriormente ellos mismos, conjuntamente con Dirac que estaba en Cambridge, lo perfeccionaron mediante la utilización de la teoría de operadores lineales en espacios de Hilbert.

Por las mismas fechas, llegó a Gotinga von Neumann, que había estudiado en Berlín con Erhard Schmidt que, como ya hemos comentado, era discípulo de Hilbert. Von Neumann se incorporó rápidamente al grupo de constructores del nuevo formalismo matemático publicando varios trabajos sobre el tema (desarrollo riguroso del formalismo matemático introducido por Born, Jordan, Heisenberg, Pauli y Dirac) durante los años 1927-1932 [La]. Lo interesante es

[23] M. Born, P. Jordan, Zur Quantenmechanik, *Zeit. f. Phys.* **34**, 858–888 (1925). M. Born, P. Jordan, W. Heisenberg, Zur Quantenmechanik II, *Zeit. f. Phys.* **35**, 557–615 (1926). P. Jordan, Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik, *Zeit. f. Phys.* **40**, 809–838 (1926).

que Hilbert, que no participaba en la elaboración de este nuevo formalismo, se mantenía informado gracias al propio von Neumann y al que entonces era su ayudante, Nordheim. De hecho llegaron incluso a escribir los tres juntos un artículo en 1928 cuyo título, *Sobre los fundamentos de la mecánica cuántica*[24], refleja claramente la influencia de la filosofía hilbertiana[25].

Es indudable que Hilbert, que se había alejado de la investigación en temas de física, continuaba estando interesado en su programa de axiomatización y, gracias al contacto con von Neumann, encontró una oportunidad para intentar aplicarlo a la recientemente creada Mecánica cuántica.

Hilbert no volvió a trabajar en este tema; por el contrario von Neumann publicó una serie de trabajos que constituyeron el origen de su conocido libro *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica) publicado en 1932 [vN]. Este libro utiliza, de forma sistemática, la teoría abstracta de espacios de Hilbert y suele ser el punto de partida para la mayoría de las aproximaciones axiomáticas a la mecánica cuántica. En resumen, Hilbert fue testigo de cómo sus investigaciones en la teoría de ecuaciones integrales servían para construir un nuevo formalismo matemático para una nueva teoría física, y también, de cómo esa nueva teoría se intentaba construir sobre un número reducido de principios básicos.

COMENTARIO FINAL

Hermann Weyl calificó a Hilbert como "el campeón de la axiomática" [We]. Consideraba la aproximación axiomática como algo de una gran amplitud que debía servir, no sólo para las matemáticas, sino también para la física. Actualmente, bastantes científicos, aún reconociendo los muchos valores positivos del programa de Hilbert, opinan que su filosofía axiomática daba lugar a planteamientos excesivamente idelizados que, si bien pueden ser adecuados para el estudio de ciertas ramas de las matemáticas, resultan dificilmente aplicables a la mayoría de los problemas físicos. Los defensores de la axiomática suelen alegar que la axiomatización de la física está todavía en su infancia [Bu], y que debe ser considerada como una aproximación con un gran futuro por delante. En cualquier caso, Hilbert fue consecuente con estas ideas y siempre que se enfrentaba a un problema, matemático o físico, intentaba analizarlo al modo axiomático.

Desde una perspectiva actual, las tres grandes aportaciones de Hilbert al formalismo matemático de la física probablemente han sido: su postura en-

[24] D. HILBERT, L. NORDHEIM, J. VON NEUMANN, Ueber die Grundlagen der Quantenmechanik, *Math. Ann.* **98**, 1–30 (1928).

[25] Lacki [La] resalta que los autores utilizan fundamentalmente ideas introducidas por Jordan en 1926; esto puede considerarse natural ya que Jordan era el más matemático del grupo de Born.

tusiasta en apoyo de la geometría de Minkowski, la construcción de lo que hoy día denominamos 'teoría espectral de operadores lineales en espacios de Hilbert' y su defensa de los métodos variacionales en mecánica y, en particular, de la aproximación Lagrangiana a la gravitación. Sin embargo, conviene resaltar que gran parte de la investigación en Física Matemática a lo largo del siglo XX se ha centrado en la búsqueda de una aproximación rigurosa al estudio de los fundamentos de la Física; particularmente, de los fundamentos de la gravitación relativista, de la mecánica cuántica y de la teoría de sistemas Hamiltonianos (mecánica simpléctica). Estos estudios también se pueden considerar, en cierto sentido, herederos del espíritu de Hilbert.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a J. Abad, M. Asorey y M. Santander por sus comentarios durante la redacción del artículo, a Rosa Pérez por una lectura crítica del manuscrito y al editor por algunas sugerencias.

Referencias

[As] F.G. Ashurst, *"Fundadores de las matemáticas modernas"*, Alianza Ed. (1985).

[BB] M. Born y H. Born, *"Ciencia y concencia en la era atómica"*, Alianza Ed. (1971).

[Bu] M. Bunge, "Physical Axiomatics", *Rev. of Modern Phys.* **39**, no. 2, 463–474 (1967).

[Co1] L. Corry, "Hermann Minkowski and the postulate of relativity", *Arch. Hist. Exact Sci.* **51**, no. 4, 273–314 (1997).

[Co2] L. Corry, "Einstein, Hilbert y la teoría general de la relatividad", *Invest. y Ciencia* **266**, 28–34 (Noviembre 1998).

[Co3] L. Corry, "David Hilbert between mechanical and electromagnetic reductionism (1910–1915)", *Arch. Hist. Exact Sci.* **53**, no. 6, 489–527 (1999).

[Co4] L. Corry, "From Mie's electromagnetic theory of matter to Hilbert's unified foundations of physics", *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **30**, no. 2, 159–183 (1999).

[Gr] G. Granek, "Poincaré's contributions to relativistic dynamics", *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **31**, no. 1, 15–48 (2000).

[GG] I. Grattan-Guinness, "A sideways look at Hilbert's twenty-three problems of 1900", *Notices Amer. Math. Soc.* **47**, no. 7, 752–757 (2000).

[Hi1] D. Hilbert, *"Fundamentos de la geometría"*, CSIC, Madrid (col. Textos universitarios) (1991).

[Hi2] D. Hilbert, "Mathematische Probleme", *Göttinger Nachrichten*, 253–297 (1900); *Archiv der Mathematik und Physik*, **1**, no. 3, 44–63, 213–237 (1901). *"Sur les problèmes futurs des mathématiques"*, Compte Rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens, 58-114 Gauthier-Villars (1902). "Mathematical Problems", *Bull. Amer. Math. Soc.* **8**, 437–479 (1902).

[La] J. Lacki, "The early axiomatizations of quantum mechanics: Jordan, von Neumann and the continuation of Hilbert's program", *Arch. Hist. Exact Sci.* **54**, no. 4, 279–318 (2000).

[LE] H.A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski y H. Weyl, *"The principle of relativity"*, Dover (1952).

[Me] H.A. Medicus, "A comment on the relations between Einstein and Hilbert", *Amer. J. Phys.* **52**, no. 3, 206–208 (1984).

[MR] J. Mehra y H. Rechenberg, *"The historical development of quantum theory"*, Vol. 1: *"The quantum theory of Planck, Einstein, Bohr and Sommerfeld: its foundation and the rise of its difficulties, 1900–1925"*, Springer-Verlag, New York, 1982 (2^a ed. 2001).

[vN] J. von Neumann, *"Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica"*, Ed. C.S.I.C., col. Monografías de Matemática, vol 1, (1949).

[Pa] A. Pais, *"'El Señor es sutil': La ciencia y la vida de Albert Einstein"*, Ariel (1984).

[Pe] R. Penrose, *"La nueva mente del emperador"*, Mondadori (1991).

[Pl] M. Planck, *"Autobiografía científica y últimos escritos"*, Ed. Nivola (col. Epistéme) (2000).

[Po] H. Poincaré, *"Ciencia e Hipótesis"*, Ed. Espasa-Calpe (col. Austral) (2002).

[Re] C. Reid, *"Hilbert"*, Springer-Verlag 1970 (2^a ed. 1972).

[SR1] J.M. Sánchez Ron, *"El origen y desarrollo de la relatividad"*, Alianza Ed. (col. Alianza Universidad) (1983).

[SR2] J.M. Sánchez Ron, *"Historia de la física cuántica"*, Ed. Crítica (col. Drakontos) (2001).

[Sa] T. Sauer, "The relativity of discovery: Hilbert's first note on the foundations of physics", *Arch. Hist. Exact Sci.* **53**, no. 6, 529–575 (1999).

[Si] S. Singh, *"El enigma de Fermat"*, Planeta (1998).

[St] J. Stachel, *"Einstein 1905: un año milagroso"*, Ed. Crítica (col. Drakontos) (2001).

[We] H. Weyl, "David Hilbert and his mathematical world", *Bull. Amer. Math. Soc.* **50**, 612–654 (1944). Reproducido en un apéndice del libro de Reid.

Manuel F. Rañada
Departamento de Física Teórica,
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
50009 Zaragoza
Correo electrónico: `mfran@posta.unizar.es`