

El primer problema dual en optimización¹

por

Valentín Jornet

1. INTRODUCCIÓN

A principios del siglo XVII propuso Fermat (véase [3]) el siguiente problema: “Dados tres puntos del plano, P_1 , P_2 y P_3 , hallar un cuarto punto, P , que minimice la suma de distancias $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3}$ ”. Dos siglos más tarde, el famoso profesor de Geometría de la Universidad de Berlin, Jacob Steiner (véase [1]) estudió este problema desde un punto de vista práctico, tratando de hallar un sistema de carreteras que unieran tres aldeas, A , B y C y que tuviera una longitud total mínima.

Aunque el problema de Fermat está resuelto desde hace siglos, todavía hoy siguen estudiándose extensiones del mismo, algunas de considerable dificultad. En efecto, pueden considerarse $p > 3$ puntos (con lo que se obtiene el problema del p -centro en el plano); también puede considerarse el problema en \mathbb{R}^n , con $n > 2$ (y se tiene el problema del p -centro en \mathbb{R}^n); pueden, asimismo, asignarse pesos diferentes a los p puntos, tomarse distancias no euclídeas, etc. (véanse [5], [6] y [7]).

Una generalización del problema de Steiner tan sólo supone aumentar el número de puntos, pero una solución interesante del problema pasa por abandonar la idea de encontrar un punto único P y, en su lugar, hallar la “red de carreteras” de longitud total mínima.

En 1755, más de un siglo después de haber sido resuelto el problema de Fermat, propuso Moss (véase [3]), en la revista femenina *The Ladies Diary or Woman's Almanack*, un caso particular de otro problema geométrico aparentemente no relacionado con el anterior y que ha resultado ser el primer caso de problema dual en optimización: “Dado un triángulo de vértices P_1 , P_2 y P_3 , hallar el triángulo equilátero circunscrito (es decir, con cada uno de sus lados conteniendo uno de los vértices del dado) de mayor área”. La solución con regla y compás del problema de Moss fue encontrada por Vecten (1810), y redescubierta por Fasbender (1846), a quien le fue atribuida erróneamente hasta 1991.

El concepto de dualidad en optimización, tal como ahora lo entendemos, aparece por primera vez en un trabajo publicado en 1963 y debido a John

¹Este trabajo ha sido financiado por MCYT de España y FEDER de la UE, Beca BMF2002-C02-01

von Neumann (véase [4]) y aplicado a un programa lineal. A continuación introduciremos el concepto de par dual en optimización.

Supongamos que

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{Min } f(x) \\ \text{s.a. } x \in F \end{array} \quad \text{y} \quad (D) \quad \begin{array}{l} \text{Max } g(y) \\ \text{s.a. } y \in G \end{array}$$

son un par de problemas de optimización y denotemos por $v(P)$ y $v(D)$ sus respectivos valores óptimos.

Diremos que ambos problemas forman un **par dual** cuando se cumple el teorema de dualidad débil, $v(D) \leq v(P)$, es decir, $g(y) \leq f(x)$ para todo $x \in F$ y para todo $y \in G$. El par dual $(P) - (D)$ satisface el teorema de dualidad fuerte cuando $v(D) = v(P)$ y ambos problemas son resolubles.

Hemos convenido en llamar problema **primal**, (P) , al consistente en minimizar y **dual**, (D) , al que maximiza. Esta distinción es un convenio, porque basta cambiar los signos de las funciones objetivo para que se intercambien los roles.

Actualmente, a cualquier familia de problemas de optimización se le buscan problemas duales (que pueden ser o no de la misma clase) con vistas al desarrollo de métodos numéricos o para facilitar el análisis de sensibilidad. La correspondiente teoría de la dualidad se centra en el teorema de dualidad fuerte, que puede ser válido para cualquier elemento de la familia o para una cierta clase de problemas (aquellos que satisfacen las hipótesis –cuanto más débiles, mejor– del teorema de dualidad fuerte).

El problema dual, tal como lo hemos formulado, tiene como objetivo fundamental proporcionar cotas inferiores de la función objetivo del problema primal, pero si el par dual no verifica el teorema de dualidad fuerte, este conjunto de cotas no dan información alguna respecto del valor del problema primal, dado que $v(P) \neq v(D)$ y la existencia de salto de dualidad ($\delta(P, D) := v(P) - v(D)$) impide que los valores de la función objetivo del dual se aproximen al valor del primal.

En Programación Lineal, si ambos problemas son consistentes y uno de ellos es resoluble, no existe salto de dualidad (véase [8]), pero esto no siempre es así.

El problema general de Programación Semi-Infinita Lineal (LSIP, para abreviar) se formula como (véase [9]):

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{Min } c'x \\ \text{s.a. : } a_t'x \geq b_t, \quad t \in T, \end{array}$$

donde T es un conjunto, posiblemente infinito, $c \in \mathbb{R}^n$, $a_t \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $b_t \in \mathbb{R}$. Además, se denota por A' la traspuesta de una matriz A .

Su dual viene dado por

$$(D) \quad \text{Sup} \quad \sum_{t \in T} \lambda_t b_t$$

$$s.a : \quad \sum_{t \in T} \lambda_t a_t = c,$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$$

En LSIP es frecuente encontrar pares duales que no verifican el teorema de dualidad fuerte. Los dos ejemplos que damos a continuación reflejan esta situación.

EJEMPLO 1. *Sea*

$$(P_1) \quad \text{Min} \quad x_2$$

$$s.a : \quad -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq -1,$$

$$-r^{-1}x_1 + x_2 \geq 0, \quad r = 3, 4, \dots$$

y su dual

$$(D_1) \quad \text{Sup} \quad -\lambda_2$$

$$s.a : \quad -\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{r=3}^{\infty} \lambda_r \begin{pmatrix} -1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_+^{(N)}$$

Se puede comprobar que $v(P_1) = 0 \neq v(D_1) = -1$.

La situación puede empeorar si uno de los dos problemas es inconsistente, en cuyo caso el salto de dualidad es $+\infty$, como ocurre con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.

$$(P_2) \quad \text{Inf} \quad x$$

$$s.a : \quad tx + (1-t)y \geq t - t^2, \quad t \in]0, 1[$$

con dual

$$(D_2) \quad \text{Sup} \quad \sum_{t \in]0, 1[} \lambda_t (t - t^2)$$

$$s.a : \quad \sum_{t \in]0, 1[} \lambda_t \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damos ahora otras tres razones por las cuales conviene que un par dual satisfaga el teorema de dualidad fuerte:

1. Regla de parada aproximada en algoritmos primal-duales.

Supongamos que disponemos de un algoritmo capaz de generar sucesiones $\{x^k\} \subset F$ e $\{y^k\} \subset G$ tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(y^k) = v(D) = v(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k)$$

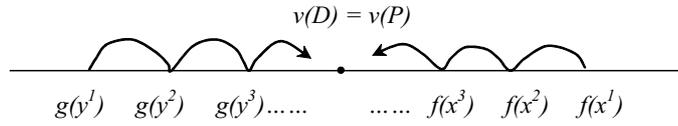


Figura 1.1

(como las que aparecen en la Figura 1.1).

Si $f(x^k) - g(y^k) < \varepsilon$, entonces $|v(P) - f(x^k)| < \varepsilon$ y $|v(D) - g(y^k)| < \varepsilon$. Se dice entonces que x^k e y^k son soluciones ε -**óptimas** de (P) y (D) , respectivamente.

2. Regla de parada exacta en algoritmos primales.

Si se dispone de un algoritmo que genera una sucesión $\{x^k\} \subset F$, el punto actual x^k es solución óptima de (P) si, y sólo si, existe un $y^k \in G$ tal que $g(y^k) = f(x^k)$.

3. Reducción de problemas de optimización a la resolución de sistemas.

Resolviendo el **sistema primal-dual**,

$$\{g(y) = f(x), y \in G, x \in F\},$$

se resuelven simultáneamente (P) y (D) . De hecho, este sistema suele ser fácil de resolver cuando se conoce una solución óptima de uno de los dos problemas.

El resto del trabajo está dedicado a resolver los problemas de Fermat y Moss, probando que forman un par dual que satisface el teorema de dualidad fuerte. El objetivo es, fundamentalmente, didáctico y al mismo tiempo reivindicativo de la utilidad de las pruebas geométricas de carácter sintético, incluso para problemas de carácter tan analítico como los de optimización.

2. EL PROBLEMA PRIMAL

En el problema de Fermat, si P_1, P_2 y P_3 están alineados, la solución es, trivialmente, aquel de los tres puntos que pertenece al segmento abierto determinado por los otros dos. En realidad, la solución también es trivial cuando uno de los ángulos del triángulo $[P_1, P_2, P_3]$ es superior (o igual) a 120° , siendo la solución buscada el vértice correspondiente. En efecto, supongamos que el ángulo en P_2, \widehat{P}_2 , es mayor o igual a 120° y denotemos por $f(P) = \overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3}$ la suma de las distancias desde un punto $P \neq P_2$ a los vértices. Aplicando a los puntos P_1 y P un giro de centro P_2 y de ángulo

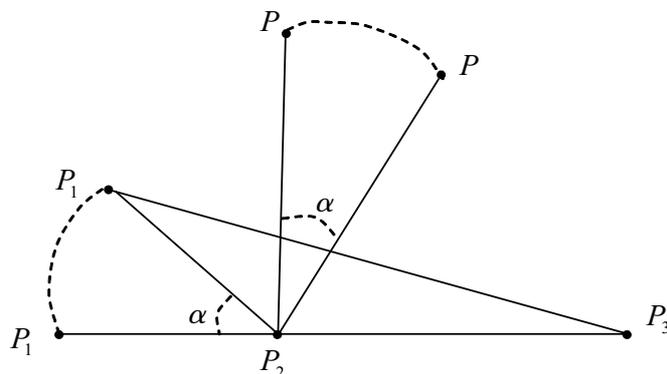


Figura 2.1

$\alpha = 180^\circ - \widehat{P}_2$ se obtienen P'_1 y P' (véase la Figura 2.1), de manera que los puntos P'_1, P_2 y P_3 están alineados. Teniendo en cuenta que la rotación mantiene las distancias entre puntos y que, en un triángulo isósceles cuyo ángulo desigual mide $0 < \alpha \leq 60^\circ$, la longitud del lado opuesto es menor o igual que la de los lados iguales, se tiene

$$\begin{aligned} f(P_2) &= \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} = \overline{P'_1P_3} \leq \overline{P'_1P'} + \overline{P'P_3} \\ &\leq \overline{P_1P} + \overline{P'P} + \overline{PP_3} \leq \overline{P_1P} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3} = f(P). \end{aligned}$$

Dado que el problema de Moss es el dual del enunciado por Fermat, en su versión no trivial, supondremos en lo que sigue que todos los ángulos del triángulo formado por los puntos P_1, P_2 y P_3 son inferiores a 120° . Cavalieri (1647) y Steiner (1842) supieron resolver con regla y compás (los instrumentos “divinos” de los griegos) el **problema de Fermat** que, como probaremos de inmediato, es el punto \overline{P} del interior del triángulo desde el cual se ven sus tres lados bajo un ángulo de 120° (véase la Figura 2.2).

El concepto de arco capaz proporciona una forma de construir, con regla y compás, el punto \overline{P} , a la vez que probar su existencia y unicidad.

LEMA 1 *La única solución óptima del problema de Fermat es el punto \overline{P} de $[P_1, P_2, P_3]$ desde el cual se contemplan los tres lados bajo un ángulo de 120° . Demostración:* En todo triángulo hay al menos un ángulo mayor o igual a 60° . Supongamos que $\widehat{P}_2 \geq 60^\circ$, y sea P un punto cualquiera del plano distinto de \overline{P} . Efectuemos un giro de 60° con centro en P_2 y denotemos las imágenes correspondientes a los puntos P_1, P_3, P y \overline{P} por P'_1, P'_3, P' y \overline{P}' , respectivamente (véase la Figura 2.3).

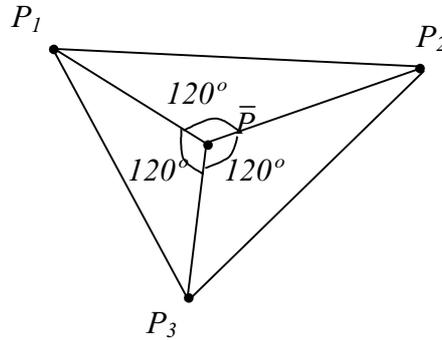


Figura 2.2

Teniendo en cuenta que el triángulo formado por cada uno de esos puntos con su imagen y con P_2 es equilátero, se tiene

$$f(\bar{P}) = \overline{P_3\bar{P}} + \overline{P_2\bar{P}} + \overline{P_1\bar{P}} = \overline{P_3\bar{P}} + \overline{\bar{P}P'} + \overline{P'\bar{P}_1},$$

así como

$$f(P) = \overline{P_3P} + \overline{P_2P} + \overline{P_1P} = \overline{P_3P} + \overline{PP'} + \overline{P'P'_1},$$

por lo que debemos comparar las longitudes de dos poligonales que unen P_3 con P'_1 . Probando que los puntos P_3 , \bar{P} , \bar{P}' y P'_1 están alineados, llegaremos a la deseada conclusión: $f(\bar{P}) < f(P)$. En efecto, como los ángulos en \bar{P} de $[P_2, \bar{P}, P_3]$ y de $[P_2, \bar{P}, \bar{P}']$ miden 120° y 60° , respectivamente, P_3 , \bar{P} y \bar{P}' están alineados. Un argumento similar demuestra que \bar{P} , \bar{P}' y P'_1 también están alineados, de donde se sigue que lo están los cuatro puntos. Obsérvese que la demostración anterior de la desigualdad $f(\bar{P}) < f(P)$, es válida cualquiera que sea la posición de P (véase la Figura 2.4). De hecho, puede probarse analíticamente que ningún punto exterior al triángulo $[P_1, P_2, P_3]$ puede ser solución óptima. \square

EL PROBLEMA DUAL

Formalicemos el problema antes de resolverlo. Sea \mathfrak{S} la clase de todos los triángulos equiláteros del plano circunscritos a $[P_1, P_2, P_3]$, y sea $h(T)$ la altura de $T \in \mathfrak{S}$. Teniendo en cuenta que el área de T es directamente proporcional a $h(T)^2$, el problema de Moss se reformula así:

$$(D) \text{ Max } h(T) \text{ s.a } T \in \mathfrak{S}.$$

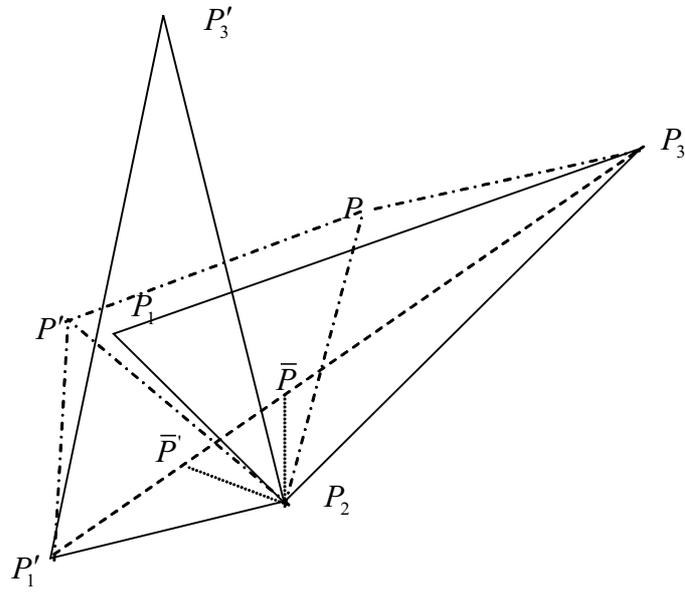


Figura 2.3

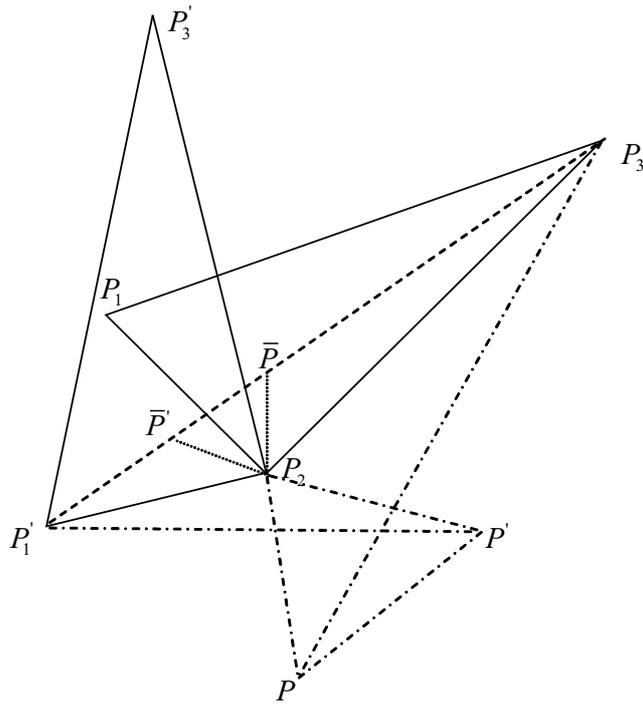


Figura 2.4

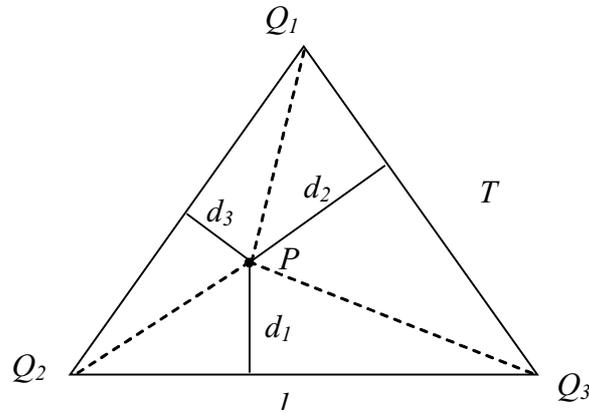


Figura 3.1

LEMA 2 *La suma de las distancias desde un punto del plano a las rectas determinadas por los vértices de un triángulo equilátero dado es mayor (si el punto es exterior) o igual (si no lo es) a su altura.*

Demostración: Sea $T = [Q_1, Q_2, Q_3]$ un triángulo equilátero de lado l y de altura $h(T)$. Discutiremos las posiciones relativas del punto dado, P , respecto del mismo. Denotaremos por d_k la distancia desde P hasta la recta que pasa por Q_i y Q_j , con $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Caso 1: P es interior en T (Figura 3.1).

Como el área de T es la suma de las áreas de $[P, Q_i, Q_j]$, $i \neq j$, se tiene $\frac{1}{2}lh(T) = \frac{1}{2}l(d_1 + d_2 + d_3)$, de donde

$$h(T) = d_1 + d_2 + d_3.$$

Caso 2: P está sobre un lado de T . El razonamiento es semejante y la conclusión la misma.

Caso 3: P es exterior a T (Figura 3.2).

Ahora el área de T es menor que la suma de las áreas de $[P, Q_i, Q_j]$, $i \neq j$, y, por lo tanto,

$$h(T) < d_1 + d_2 + d_3. \quad \square$$

LEMA 3 *Si \bar{P} es la solución del problema de Fermat, entonces el triángulo, \bar{T} , determinado por las rectas ortogonales a $[\bar{P}, P_i]$ en P_i , $i = 1, 2, 3$, es equilátero, y satisface $h(\bar{T}) = f(\bar{P})$.*

Demostración: El triángulo \bar{T} es equilátero. En efecto, en el cuadrilátero $[\bar{P}, P_1, Q_2, P_3]$ (véase la Figura 3.2) son rectos los ángulos en P_1 y P_3 , y mide 120° el de \bar{P} , según el Lema 1. Así pues, el ángulo correspondiente a Q_2 mide

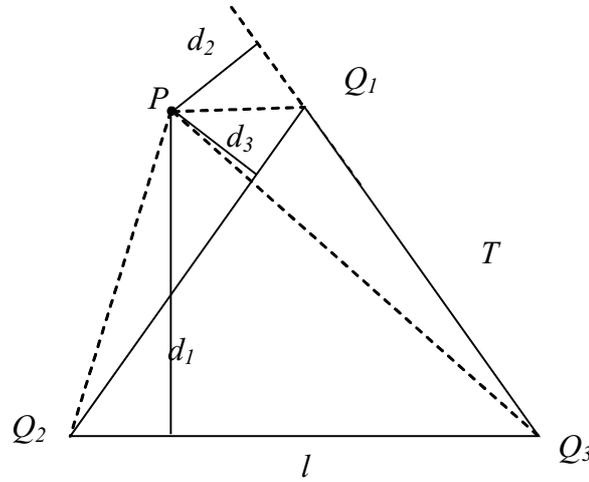


Figura 3.2

60°. El mismo razonamiento se aplica a los ángulos en \$Q_1\$ y \$Q_3\$, que también miden 60°. Por lo tanto, \$T \in \mathfrak{S}\$.

Para ver que \$h(\bar{T}) = f(\bar{P})\$, basta aplicar el Lema 2 al triángulo \$\bar{T}\$ y al punto interior \$\bar{P}\$, ya que

$$h(\bar{T}) = \overline{\bar{P}P_1} + \overline{\bar{P}P_2} + \overline{\bar{P}P_3} = f(\bar{P}). \quad \square$$

Sea

$$(P) \quad \text{Min } f(P) \quad \text{s.a } P \in \mathbb{R}^2$$

la expresión formal del problema de Fermat. Estamos en condiciones de relacionar ambos problemas.

TEOREMA 1 \$v(D) \le v(P)\$.

Demostración: Basta probar que, si \$T \in \mathfrak{S}\$ y \$P \in \mathbb{R}^2\$, se cumple \$h(T) \le f(P)\$. Sea \$T = [Q_1, Q_2, Q_3]\$, nombrando los vértices de manera que \$P_k \in [Q_i, Q_j]\$, \$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}\$. Denotamos por \$d_k\$ la distancia desde \$P\$ hasta la recta determinada por \$Q_i\$ y \$Q_j\$ (como en las Figuras 3.1 y 3.2). Como \$P_k\$ pertenece a dicha recta, se tiene \$d_k \le \overline{PP_k}\$, \$k = 1, 2, 3\$ (por el Teorema de Pitágoras). Aplicando el Lema 2 concluimos que

$$h(T) \le d_1 + d_2 + d_3 \le \overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3} = f(P). \quad \square$$

TEOREMA 2 \$v(D) = v(P)\$ y ambos problemas son resolubles.

- [5] H. MARTINI, K.J. SWANEPOEL, G. WEIS, The Fermat-Torricelly Problem in Normed Planes and Spaces, *JOTA*, Vol. 115, No. 2, pp 283-314, November 2002.
- [6] F. ERIKSSON, The Fermat-Torricelly problem once more, *Math. Gaz.* 81, No 490, pp. 37-44, 1997.
- [7] D. CIESLIK, The Fermat-Steiner-Weber-problem in Minkowski spaces, *Optimization* 19, No. 4, pp. 485-489, 1988.
- [8] D. GALE, H. KUHN Y A. TUCKER, *Linear Programming and the theory of games*, en T.C. KOOPMANS (ED.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, Inc., New York y Chapman & Hall, Ltd., London, pp. 317-329, 1951
- [9] M.A. GOBERNA Y M.A. LÓPEZ, *Linear Semi-Infinite Optimization*, John Wiley & Sons, 1988

Valentín Jornet Pla
Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias de la Universidad de Alicante
Campus de Sant Vicent del Raspeig
Ap. 99. E-03080 Alacant
Correo-electrónico: vjornet@ua.es