Educación

Sección a cargo de

María Luz Callejo

Matemáticas para no desafinar

por

Javier Peralta

En el presente artículo se van a poner de manifiesto determinadas conexiones de las matemáticas con la música; en concreto, con dos de los sistemas de afinación musical: el temperado y el pitagórico. Se indicarán, además, algunas ideas para la presentación de estas relaciones en la Educación Secundaria, entre las que destacan la utilización de una metodología esencialmente heurística –sustentada fundamentalmente en la experimentación– y del recurso didáctico que proporciona la historia de la matemática.

"Musica est sciencia quae de numeris loquitur".
(Casiodoro, c. 490–c. 565)

"Est musica exercitium arithmeticae se numerare nescientis animi".
(Leibniz, 1646–1716)

1. Introducción

Una de las causas de las dificultades existentes en el aprendizaje de la matemática, y más generalmente de la animadversión que algunos sienten hacia ella, es, sin lugar a dudas, la práctica de una enseñanza en que los conceptos se presentan en total desconexión con la realidad. Parece olvidarse de ese modo que las matemáticas surgieron, sin embargo, para resolver problemas concretos (baste con recordar los orígenes de la aritmética y de la geometría, sus dos ramas iniciales); como también, por ejemplo, las consabidas manifestaciones de Galileo, Klein o Kant relativas a la necesidad de contar con las matemáticas para encontrar una explicación científica de la naturaleza.

En particular, acaso no sean suficientemente conocidas las íntimas relaciones que existen entre la música y la matemática; vínculos que no obstante han sido admitidos ya desde la antigüedad (así, por ejemplo, Arquitas, discípulo de Pitágoras y amigo de Platón, afirmaba que las matemáticas y la música eran hermanas). Y es que desde Pitágoras (muy versado en el arte musical[1] y estudioso, quizá por vez primera, de las leyes cuantitativas de la acústica), pasando por el *quadrivium* medieval (que comprendía la aritmética –estudio de los "números en reposo" –, la geometría –las "magnitudes en reposo" – , la música –los "números en movimiento" – y la astronomía –las "magnitudes en movimiento" –), la escolástica europea mantuvo una estrecha correspondencia entre música y matemáticas. Es más, de Pitágoras a Kepler, los intervalos musicales han sido considerados como la fuente misma de nociones matemáticas y de importantes extrapolaciones científicas y cosmológicas [13]. Así, para los griegos, la teoría matemática de la armonía formaba parte de una teoría general de la Armonía del Cosmos [3]; León Battista Alberti expuso, mediante proporciones aritméticas, distintas relaciones entre música, arquitectura y anatomía [8]; Kepler intentó mostrar el secreto del universo en una síntesis general de la geometría, la música, la astrología, la astronomía y la epistemología [6]; etc.

También se han realizado numerosas manifestaciones en relación con lo anterior en tiempos más cercanos, como las de Whitehead (1861–1947): "se puede volar hacia el mundo de la poesía y de la música, y nos encontramos cara a cara con la cantidad y el número en sus ritmos y en sus octavas"; pues, en el pasado siglo, las conexiones a las que venimos refiriéndonos acaso hayan sido puestas de manifiesto aún con mayor fuerza. De tal forma, en las proporciones internas de la obra del compositor húngaro Béla Bartok (1881–1945), por ejemplo, se advierte una estrecha relación con la *razón áurea*[2]; la música estocástica del compositor, arquitecto y matemático griego Iannis Xenakis (1922–2001), una de las figuras más destacadas de la teoría de la matematización del espacio sonoro, tiene por fundamentos, entre otros, la teoría de conjuntos, la lógica simbólica y la teoría de probabilidades... Y abundando en este argumento, se han llegado a utilizar recientemente para el estudio de la música las congruencias, el triángulo de Pascal, los cuadrados mágicos, los números primos, las cadenas de Markov, etc. [10].

[1]Pitágoras conocía, por ejemplo, la acción benéfica de la música, y compuso melodías para el tratamiento de depresiones, arrebatos de cólera y todo tipo de alteraciones emocionales [4].

[2]De esa misma relación con la razón áurea también se han encontrado rasgos, por ejemplo, en las sonatas de Beethoven y en algunas sinfonías de Mozart [3].

A la vista de las anteriores reflexiones, hemos realizado este trabajo para hacer patente alguna de las conexiones existentes entre la música y la matemática, con el objeto de acercar esta última a un campo en apariencia tan alejado como el de la primera, y de ese modo facilitar su aprendizaje; se acompaña además de unas sugerencias sobre la metodología adecuada –a nuestro juicio– para su presentación en el aula. Ésa es, pues, su finalidad principal; aunque con carácter secundario hemos pretendido, de igual modo, ampliar en lo posible la "cultura matemática" de los alumnos mediante la introducción de determinadas cuestiones históricas.

Concretando un poco más, se tratará de buscar los modelos matemáticos que subyacen en dos de los sistemas de afinación musical: el temperado y, en especial, el pitagórico; ambos plenamente vigentes en la actualidad[3]. Téngase en cuenta a este respecto, que la actividad matemática se ocupa con frecuencia de procesos de modelización, mediante los cuales se consiguen, en muy diversos sistemas[4], esquemas estructurados dotados de una organización matemática. Pero no sólo es eso, sino que además, en el ámbito de la escuela, las actividades de modelización pueden constituir también un poderoso instrumento para el aprendizaje significativo [2] y, en general, para el estudio didáctico de la matemática [1].

Hay que decir, no obstante, que el tema que vamos a tratar no es nuevo en su totalidad, sino que, diferentes aspectos del mismo ya han sido estudiados en distintos trabajos por otros autores [5, 6, 7, 9]...; aunque algunas ideas –eso pensamos– sí son originales, como también su estructura y su metodología, que será esencialmente heurística, y estará sustentada fundamentalmente en dos pilares: la experimentación y el recurso didáctico de la historia de la matemática. A partir de estas premisas, los alumnos –de niveles de finales de la ESO o primer curso de Bachillerato– tendrán ocasión de utilizar diversas nociones matemáticas (potencias, raíces, medias, proporcionalidad, progresiones, funciones elementales, logaritmos...) para descubrir cuál es la estructura matemática latente en los sistemas de afinación anteriormente indicados.

Resulta obligado hacer dos últimas observaciones. La primera es que nos ha parecido que debían ser expuestos los contenidos elementales de música necesarios para la comprensión del trabajo, y así hemos procedido, incluyendo de manera sucinta estos aspectos, en muchas ocasiones mediante notas a pie de página. La segunda aclaración es que el artículo está concebido para su

---

[3]En efecto; en el primero de ellos se afinan los instrumentos de cuerda con trastes en el mástil –como la guitarra y el laúd–, los de tecla, el arpa y los instrumentos de viento en los que para producir las distintas notas se precisan llaves, pistones o un mecanismo de orificios (como los instrumentos de viento–madera). En el segundo lo suelen hacer los instrumentos de cuerda sin trastes en el mástil, como el violín, la viola, el violoncello y el contrabajo; aunque éstos también pueden ser afinados según los principios del sistema de Holder, que no será estudiado en el presente artículo.

[4]Así sucede, por ejemplo, en el análisis de los sistemas dinámicos, cuyo modelo es muchas veces una ecuación diferencial, o con los modelos probabilísticos [12].

enseñanza a alumnos de Educación Secundaria, motivo por el que nos hemos permitido sugerir unas ideas sobre su posible implantación en el aula; sin embargo, como es obvio, serán los profesores correspondientes quienes habrán de decidir sobre su posible pertinencia y, en cualquier caso, acerca de cuál podría ser su presentación más adecuada.

2. Generalidades sobre la música y la afinación musical

Podría decirse que la música es el arte de combinar los sonidos en el tiempo, y, el sonido, una percepción que experimenta el oído a causa de una vibración de un cuerpo elástico en el aire.

Guido d'Arezzo, en el siglo XI, dio nombres, que persisten en la actualidad, a ciertos sonidos: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, y que se llaman *notas*[5]. A partir de ellas se forman las escalas; siendo la escala diatónica mayor de Do la siguiente: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do.

Son conocidos, por otra parte, el carácter vibratorio del sonido, como también que la altura del sonido producido por una cuerda vibrante está en razón inversa a su longitud (así como a su tensión y a su calibre). Por tanto, al reducir la longitud de la cuerda, ésta vibrará con mayor número de oscilaciones, por lo que el sonido resultante será más agudo; y al contrario, cuanto más larga sea, el sonido será más grave. Todo ello sucede análogamente también con los instrumentos basados en un tubo sonoro: a igual diámetro y presión de la columna de aire, la frecuencia vibratoria es inversamente proporcional a la longitud del tubo. En particular, si se reduce a la mitad la longitud de una cuerda o de un tubo, el sonido producido es de características muy similares al anterior, debido a las coincidencias de las ondas vibratorias: se dice entonces que es el mismo sonido, pero en una octava superior.

Por otro lado, la distancia mínima de entonación que se considera en el sistema occidental tradicional es la de un semitono (o medio tono), que en la escala diatónica mayor de Do se establace entre las notas Mi–Fa y Si–Do; siendo la distancia entre dos notas consecutivas cualesquiera de las restantes de un tono. En una octava hay por tanto, en cinco ocasiones, la distancia de un tono y, en dos, la de un semitono.

Los intervalos o distancias entre dos notas se denominan contando el número de las que median entre sus extremos, incluyendo a ambos; así, el intervalo acústico entre dos notas consecutivas es una segunda (segunda mayor si es un tono y segunda menor si es un semitono); una quinta es el intervalo acústico entre cinco notas (consecutivas); etc. Dado que un tono consta de dos

[5]Anteriormente se habían designado las notas por letras, sistema aún vigente en los países de habla inglesa: A (La), B (Si), C (Do), D (Re), E (Mi), F (Fa), G (Sol); y, con pequeñas modificaciones, en Alemania. Hay que hacer constar, sin embargo, que también se han empleado otras denominaciones para ello [14].

semitonos, una octava constará de doce semitonos como máximo; lo que en cambio no ha sucedido siempre en la cultura oriental[6].

En la música occidental, en cada intervalo de un tono entre dos notas inmediatas hay una entonación intermedia que divide al tono en dos semitonos, lo que da lugar a las llamadas alteraciones, que son: *sostenido* (#) y *bemol* (b)[7]. Así, cuando en el pentagrama una nota lleva delante un sostenido, significa que corresponde a un semitono más alto que la misma, y cuando lleva un bemol que es un semitono más bajo; por ejemplo, entre Sol y La están Sol # y La b[8]. Las notas correspondientes a la posición natural de los siete grados de una tonalidad se llaman *diatónicas*, y *cromáticas* las que corresponden a las posibles posiciones alteradas de las mismas.

Si una cierta nota musical tiene una frecuencia f, la misma nota en la octava superior tendrá frecuencia $2f$; por tanto, la determinación de una octava musical vendrá dada por una partición del intervalo cerrado $[f, 2f]$. Por duplicaciones o divisiones sucesivas entre 2 se obtendrán las demás octavaciones de la escala. Así, la razón por la que una octava simultánea suena tan consonante y simple es porque el sonido más agudo se obtiene mediante el doble de vibraciones que las que corresponden al más grave; de este modo, el sonido de la octava más alta tiene la extraña característica de ser de la misma calidad que el tono fundamental, hasta el punto de que parece fundirse con él, aunque sea de un registro más agudo.

Para tratar de afinar de igual manera los instrumentos, es necesario fijar una determinada frecuencia a cada nota. Para ello se utiliza como frecuencia de referencia el *diapasón*, instrumento construido con una varilla metálica en forma de U, fija en su punto medio, que al vibrar produce una frecuencia concreta equivalente al La de la tercera octava[9].

En siglos pasados han existido notables diferencias en los criterios de afinación[10]. Por una iniciativa francesa para crear una afinación internacional, en 1859 se construyó un diapasón mediante el cual a La (de la tercera octava) le correspondía una frecuencia de 435 vibraciones por segundo (*hercios*), aunque desde entonces, y en pos de una mayor brillantez, ha existido una tendencia a elevarse. Así, Estados Unidos propuso la afinación de La a 440 hercios (Hz) lo

[6]Por ejemplo, en la música hindú, en vez de estar dividida la octava en doce semitonos, se divide en veinte pequeños intervalos llamados *sruti*, que corresponden aproximadamente a nuestros cuartos de tono [14].

[7]Hay otra alteración llamada *becuadro*, a la que no se alude en este artículo. En la música oriental también es normal que aparezcan más alteraciones de una misma nota.

[8]Sol # y La b coinciden en el sistema temperado (se verá próximamente), pero no en otros.

[9]A veces se designa por La_3.

[10]Por ejemplo, en el siglo XVII, a la nota La_3 se le asignaba una frecuencia de 403 vibraciones por segundo (hercios) en música de cámara y 374 en iglesias, el órgano de la catedral de Estrasburgo se afina adjudicando a La_3 393 *hercios*, etc.

que fue aceptado internacionalmente y es la más extendida en la actualidad[11]. En este trabajo adoptaremos ese criterio; de esta forma, la frecuencia de La de la octava anterior será de 220 Hz, la frecuencia de La de la octava siguiente, 880 Hz, etc.

En otro orden de ideas, lo que aprecia el oído humano al escuchar dos sonidos a la vez no es la diferencia de sus frecuencias, sino factores de proporcionalidad entre las mismas. La división de la escala en notas musicales no es por tanto aritmética, sino proporcional; lo que en cierto modo ya fue advertido por Aristóteles: "la música es la ciencia de toda proporción y toda relación como tal". La comprensión de ese proceder del oído humano es esencial para entender los distintos sistemas de afinación, dos de los cuales estudiaremos a continuación.

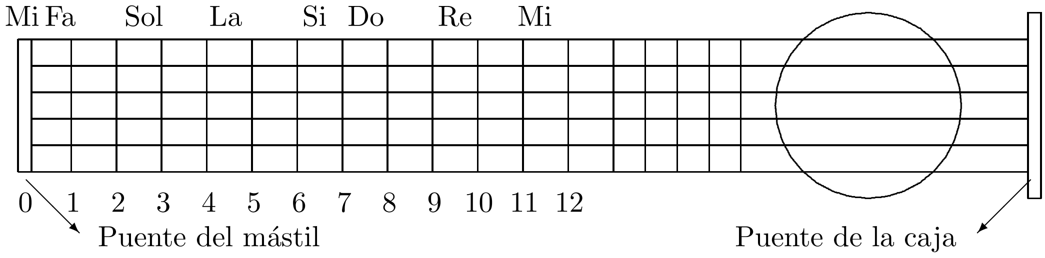
3. La guitarra y el sistema temperado

Comencemos con un experimento que consideramos próximo a los alumnos. Se trata de trabajar con una guitarra, probablemente el instrumento musical que les es más familiar, y sobre el que es posible que tengan algunas nociones elementales (de no ser así, habría que exponerlas brevemente).

Las notas de las cuerdas al aire (esto es, sin pulsar en ningún traste) de una guitarra bien afinada son, empezando por la sexta y siguiendo ordenadamente hasta la primera: Mi, La, Re, Sol, Si, Mi. Y si llevamos una guitarra a clase, los alumnos podrán percibir que, si bien las notas Mi de la sexta y de la primera cuerdas están obviamente en diferentes octavas, sus sonidos son de la misma calidad, aunque el de la primera sea más agudo que el de la sexta.

Estudiemos la primera cuerda. Una vez tenida en cuenta la anterior apreciación, probablemente no ofrezca dificultad –en especial a los estudiantes que posean una conveniente educación musical– comprobar que al pisar su traste número 12 se obtiene la misma nota (Mi) que si se pulsa la cuerda al aire, aunque lógicamente esté en una octava diferente; entre el sonido de la primera cuerda al aire y el que resulta de pisar el traste número 12 se recorre exactamente una escala completa, lo que significa que la frecuencia de este último sonido es justamente el doble de la frecuencia del primero. Como sin duda conocen los aficionados a este instrumento, al ir pisando los trastes de la primera cuerda se van obteniendo las notas que se indican en la figura y en la Tabla I (al avanzar un traste, se aumenta un semitono):

[11] Este acuerdo creemos que no es respetado sin embargo en todos los países. Por ejemplo, en Alemania se fija en 444 Hz la afinación de La, en Inglaterra se emplea a veces $438,9$ Hz, etc. Ante la disparidad de criterios, el Consejo de Europa y la UNESCO han tratado de unificarlos y, aunque se ha recomendado la mencionada frecuencia de 440 Hz para la afinación de La, pensamos que siguen existiendo aún algunas diferencias sobre ello.



Traste	0	1	2	3	4	5
Nota	Mi	Fa	Fa#=Sol b	Sol	Sol#=La b	La

6	7	8	9	10	11	12
La#=Si b	Si	Do	Do#=Re b	Re	Re#=Mi b	Mi

TABLA I

En este momento, podemos plantear las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es la longitud de la primera cuerda que vibra al ser pulsada al aire? Evidentemente será igual a la distancia del puente del mástil al puente de la caja, que en nuestro caso es de $65,8$ cm.

- ¿Hay alguna relación entre esa distancia y la longitud de la cuerda que vibra al pisar en el traste número 12 (cuando se obtiene la misma nota Mi)? Midiendo la distancia del traste 12 al puente de la caja, se comprueba que esa longitud es de $32,9$ cm; o sea, la mitad de la anterior.

Con este sencillo experimento los alumnos advertirán lo que ya habíamos dicho en otro momento: que al reducir a la mitad la longitud de la cuerda, la frecuencia se duplica. ¿Cómo son entonces entre sí estas dos magnitudes?

No ofrecerá dificultad concluir que las frecuencias de las notas son inversamente proporcionales a las longitudes de las cuerdas. Así pues, si f y f' son las frecuencias de las cuerdas de longitudes, respectivamente, l y l', se tiene: $f/f' = l'/l$. Determinemos entonces las frecuencias de las notas de la escala musical que estamos estudiando, que serán puntos de un cierto intervalo $[f, 2f]$, aunque para más comodidad, podríamos considerar el intervalo $[1, 2]$. Con ese objetivo, midamos las distancias de cada uno de los trastes (hasta el 12) al puente de la caja, así como los cocientes de las anteriores distancias obtenidas entre dos trastes consecutivos. En la guitarra con la que estamos trabajando se han conseguido los siguientes valores (Tabla II):

Trastes	Distancias (cm)	Cocientes (semitono)
0	65,8	
		1,061290323
1	62,0	
		1,059829060
2	58,5	
		1,057866184
3	55,3	
		1,059386973
4	52,2	
		1,058823529
5	49,3	
		1,057939914
6	46,6	
		1,061503417
7	43,9	
		1,057831325
8	41,5	
		1,061381074
9	39,1	
		1,059620596
10	36,9	
		1,060344828
11	34,8	
		1,057750760
12	32,9	

TABLA II

Observamos en ella que los cocientes c_i son números casi coincidentes, que, a la vista de la poca precisión de nuestras medidas (han sido realizadas con una cinta métrica, aproximando sólo hasta los milímetros), podríamos considerar que son iguales, y que, por tanto, la octava está dividida en doce semitonos idénticos. Parece entonces razonable tomar como valor común de todos los c_i a su media aritmética: $c = 1,059463999$.

Así pues, los cocientes entre las distancias de dos trastes consecutivos al puente de la caja pueden ser tenidos como constantes. ¿Qué tipo de sucesión forman en tal caso esas distancias; esto es, las longitudes de las cuerdas vibrantes? ¿Qué significado tiene ese extraño número c que hemos obtenido?

Seguramente varios alumnos sabrán contestar correctamente a la primera pregunta: forman una progresión geométrica. Para responder a la segunda, se les invitará entonces a que revisen las propiedades de esas progresiones y, a su vez, expresen algebraicamente el resultado anterior. Debemos tener en cuenta, sin embargo, que en los procesos de modelización, suele ofrecer dificultades la introducción de una notación adecuada para instaurar una organización matemática; por lo que probablemente fuera necesario que el profesor hiciera alguna sugerencia con esa intención.

Se llegará finalmente a que si $l_0, l_1, ..., l_{12}$ son las distancias de los trastes $0, 1, ..., 12$ al puente de la caja, entonces $l_{n-1}/l_n = c$, o sea, $l_n = l_{n-1} \times 1/c$; por lo que la razón de la progresión (l_n) es $1/c$. También, en virtud de que las frecuencias son inversamente proporcionales a dichas longitudes, los términos de la sucesión (f_n) de las frecuencias estarán asimismo en progresión geométrica, pero de razón c.

Por otro lado, como en la progresión (l_n) debe ser $l_{12} = l_0 \times 1/c_{12}$, y se ha comprobado que $l_{12} = l_0/2$, resulta que $c_{12} = 2$; o sea, $c = 2^{1/12} = 1,059463094$, lo que contesta a la segunda pregunta formulada anteriormente (el error que hemos cometido: $\epsilon = 9,05 \times 10^{-7}$ es, pues, prácticamente inapreciable). El valor del semitono, o distancia musical entre dos notas vecinas es, por tanto –siempre que asignemos a Do el valor 1–, $s = 2^{1/12}$, y el de La, $(2^{1/12})^9 = 2^{3/4}$. En vista de ello, tomando para esta nota la frecuencia de 440 Hz, la frecuencia de cualquier otra se hallará multiplicando el valor correspondiente a la misma por un número k tal que $440 = 2^{3/4} \times k$; esto es, $k = 261,6255653$. Los valores asignados a cada nota y sus frecuencias correspondientes son, en consecuencia, las siguientes (Tabla III):

Nota	Valor en [1,2]	Frecuencia (Hz)
Do	1	261,63
Do#=Reb	$2^{1/12}$ = 1,059463094	277,18
Re	$2^{1/6}$ = 1,122462048	292,54
Re#=Mib	$2^{1/4}$ = 1,189207115	311,13
Mi	$2^{1/3}$ = 1,259921050	329,63
Fa	$2^{5/12}$ = 1,334839854	349,23
Fa#=Solb	$2^{1/2}$ = 1,414213562	369,99
Sol	$2^{7/12}$ = 1,498307077	392,00
Sol#=Lab	$2^{2/3}$ = 1,587401100	415,30
La	$2^{3/4}$ = 1,681792830	440,00
La#=Sib	$2^{5/6}$ = 1,781797436	466,16
Si	$2^{11/12}$ = 1,887748625	493,88

TABLA III

Trabajando en el modelo matemático construído, podemos llamar t_n al valor de cada nota en el intervalo $[1, 2]$, que, según lo anterior, será:

$$t_n = 2^{n/12}, 0 \leq n \leq 11. \tag{1}$$

Este sistema de afinación se llama *temperado*[12], y su escala, de 12 semitonos iguales, se denomina *escala cromática*. Dicho sistema surgió ante las dificultades existentes para llevar a la práctica los sistemas de afinación precedentes[13] en los instrumentos de sonidos fijos y su innegable ventaja es que cuenta con intervalos iguales –doce de los cuales constituyen la octava, como hemos visto–, a pesar de lo cual se obtienen con él sonidos prácticamente idénticos a los de los anteriores sistemas.

4. El sistema pitagórico

Como es sabido, los pitagóricos tenían al número como principio de todas las cosas, y todas las cosas estaban asociadas a los números. De este modo viene recogido este hecho en la *Metafísica* de Aristóteles: "Los pitagóricos, al ver que muchas propiedades de los números se daban en los cuerpos sensibles, los consideraron como la esencia de las cosas, no separados de ellas, sino de tal modo que las cosas procedieran de los números, ya que las propiedades de éstos se hallan en la armonía, en el cielo y en muchas cosas" [5]. Y esa "aritmetización" tan radical se extendió también a la música, cuya esencia definían los números.

Pitágoras llegó a descubrir las normas por las que se rigen las vibraciones sonoras de las cuerdas mediante un aparato acústico llamado *monocordio* o *sonómetro*, sobre el que decía a sus discípulos: "Trabajad con el monocordio, ya que se llega mejor al conocimiento musical por la razón, mediante los números, que por el oído, a través de los sentidos", como escribe Quintiliano (ss. I-II) en su trabajo *Sobre la música*. En dicho aparato realizó un experimento que es considerado el punto de partida de la teoría musical, y que podría repetirse como se indica a continuación.

Se coge una cuerda musical que se mantiene tensa por los dos extremos; al pulsarla se obtiene una nota que tomaremos como fundamental: el tono. Si se divide su longitud en 12 partes iguales, se marcan los puntos de división y se coloca sobre la cuerda un puente móvil, puede observarse que al reducir la longitud de la cuerda a la mitad (esto es, al situar el puente en el punto 6 de división) y pulsar en una cualquiera de las dos mitades en que ha quedado reducida, se logra un sonido de las mismas características del primero, aunque en un registro más agudo; es por tanto la misma nota pero en una octava más

[12]Es debido al español Bartolomé Ramos de Pareja, nacido en 1448 y catedrático de Música de las universidades de Salamanca y Bolonia. Si bien, la última reforma musical para hacer todos los semitonos iguales fue dirigida por el organista alemán Andreas Werckmeister, a fines del siglo XVII, y su espaldarazo definitivo fue dado por Bach.

[13]Los sistemas precedentes son el pitagórico, el de Zarlino (o de Aristógenes-Zarlino) y el de Holder. Con el fin de no alargarnos, no nos ocuparemos de los dos últimos (para conocer algo sobre ellos, puede consultarse por ejemplo [15]).

Figura 1

alta[14]. Colocando el puente en el punto 9 y pulsando en el trozo mayor de la cuerda, se comprueba que el sonido producido tiene una cierta armonía con el tono fundamental; de igual modo, con el puente en el punto 8, al pulsar el trozo mayor de la cuerda el sonido obtenido también es armónico con el primero. Sin embargo, al situar el puente en un lugar distinto a los tres anteriores y pulsar posteriormente no se producen sonidos tan acordes con el tono fundamental[15].

Se puede realizar asimismo el experimento con vasos iguales con volúmenes de agua proporcionales a $0, 1, 2, ..., 12$, a los que se golpea suavemente con una cucharilla; o incluso con otras variantes del mismo también debidas a Pitágoras[16].

Pero en las relaciones $6/12 = 1/2$, $8/12 = 2/3$ y $9/12 = 3/4$, se reflejan la octava, la quinta y la cuarta (llamadas por los pitagóricos, respectivamente, *diapason*, *diapente* y *diatesseron*). Por tanto, los números $1, 2, 3$ y 4 (la *Te-*

[14]Este experimento ya ha sido realizado anteriormente con la guitarra, pulsando en el punto medio de una cuerda.

[15]Todas estas apreciaciones son, por supuesto, subjetivas, y no suelen ser advertidas si no se tiene una conveniente educación musical.

[16]En la siguiente ilustración se reproduce un grabado de *Theorica Musical*, de F. Gaffurio (1492), en el que se observa cómo Pitágoras experimenta con campanas, vasos de agua y cuerdas tensadas con diferentes pesos. Asimismo, junto a su discípulo Filolao realiza pruebas con flautas, mientras que el sabio hebreo Jubal, padre de la música bíblica, ensaya con martillos sobre el yunque de los herreros.

traktys), que dispuestos en forma de pila configuran el triángulo equilátero y cuya suma es el número 10, místico para los pitagóricos, definían igualmente con sus propiedades relativas los sonidos más armónicos: todo ello establecía una evidente conexión entre números, figuras y sonidos [5].

5. La escala diatónica en el sistema pitagórico

Por otro lado, la *teoría de las medias*, de origen igualmente pitagórico, establecía, como señala Arquitas, que "en música hay tres medias: la media aritmética, la media geométrica y la subcontraria, llamada también armónica". Y precisamente los números $12, 9, 8$ y 6 de los que se derivan las proporciones musicales, verifican que el segundo y el tercero son, respectivamente, la media aritmética y la media armónica de los dos extremos, y las medias geométricas de estos y de los números intermedios son coincidentes $[9 = (12+6)/2, 1/8 = (1/12 + 1/6)/2, (12 \times 6)^{1/2} = (9 \times 8)^{1/2}]$.

Para seguir deduciendo el modelo de afinación pitagórico debemos, como anteriormente, realizar una partición del intervalo cerrado $[1, 2]$ en siete trozos, es decir, intercalar seis puntos entre 1 y 2. Los dos primeros serán, de acuerdo con lo ya visto, sus medias armónica y aritmética: $2 \times 1 \times 2/(1+2) = 4/3$ y $(1+2)/2 = 3/2$, por lo que se tiene de momento: $1, 4/3, 3/2, 2$. Por otra parte, como $4/3$ refleja la cuarta y $3/2$ la quinta, habrá que añadir dos nuevos puntos entre 1 y $4/3$, y otros dos entre $3/2$ y 2. Si atribuimos a Do el valor 1 y tenemos en cuenta que su quinta es Sol, a esta última nota le corresponderá $3/2$, y en consecuencia y por análogas razones, Fa tendrá el valor $4/3$ y 2 la nota de Do de la octava superior (Do').

Al ser $(3/2)/(4/3) = 9/8$ la relación entre las notas consecutivas Fa y Sol, se intentará que los nuevos términos a determinar también lo verifiquen. Entre 1 y $4/3$ se intercalarán por tanto dos términos a y b tales que $a/1 = b/a = 9/8$, lo que conduce a que: $a = 9/8, b = 81/64$. De este modo, en la cuaterna $1, 9/8, 81/64, 4/3$, se ha conseguido lo que se buscaba (el cociente entre cada término y el precedente es $9/8$), pero con una excepción: entre el cuarto y el tercer término la relación es $\lambda = 256/243 = 2^8/3^5$, razón a la que Platón llamó *leimma* o *remanente*.

De forma análoga se añadirán dos términos c y d entre $3/2$ y $2 : c/(3/2) = d/c = 9/8$, que se deduce deben ser: $c = 27/16$, $d = 243/128$; y se puede comprobar igualmente que en la sucesión $3/2, 27/16, 243/128, 2$, la razón entre cada término y el anterior es $9/8$, salvo entre los dos últimos que es λ. Resumiendo, los valores atribuidos a cada nota de la escala diatónica son:

$$\text{Do} : 1,\ \text{Re} : 9/8,\ \text{Mi} : 81/64,\ \text{Fa} : 4/3,$$
$$\text{Sol} : 3/2,\ \text{La} : 27/16,\ \text{Si} : 243/128,\ \text{Do'} : 2.$$

El cociente entre los valores asignados a una nota y su precedente es $9/8$, salvo en los casos Mi–Fa y Si–Do' que es l; los primeros corresponden al tono y los segundos al semitono diatónico.

Por supuesto que no es necesario deducir los valores concernientes a cada nota mediante un enfoque tan matemático, sino que es posible hacerlo de manera más sencilla teniendo en cuenta simplemente que la gama pitagórica está basada en el encadenamiento de quintas [15]. En efecto: si comenzamos atribuyendo a Do el valor 1, a su quinta que es Sol le corresponderá $3/2$; la quinta de Sol es Re' (Re de la siguiente octava), que tendrá asignado el valor $(3/2)^2 = 9/4$; la quinta de Re' es La', de valor $(3/2)^3 = 27/8$; la quinta de La' es Mi" (Mi de la octava siguiente a la anterior), que le corresponderá $(3/2)^4 = 81/16$; y la quinta de Mi" es Si", de valor $(3/2)^5 = 243/32$. Se tienen, pues, Do : 1, Sol : $3/2$, Re : $(9/4)/2 = 9/8$, La : $(27/8)/2 = 27/16$, Mi : $(81/16)/4 = 81/64$, Si : $(243/32)/4 = 243/128$. Falta únicamente Fa, que puede obtenerse de la octava anterior a la de partida razonando así: como la quinta de Fa de la octava anterior es Do, tendrá asignado el valor $2/3$, y Fa de nuestra octava será $4/3$. Los resultados coinciden, pues, con los que se obtuvieron de la forma precedente.

Intervalos y semitonos en el sistema pitagórico

Así como a cada nota se le ha asignado una fracción, cada intervalo puede también ser expresado por otra fracción: el cociente entre los valores correspondientes a su extremo (nota más aguda) y su origen (nota más grave). La fracción –siempre mayor que la unidad– que representa un intervalo establece, en consecuencia, la razón de vibraciones existente entre ambas notas.

Los intervalos correspondientes a la escala diatónica en el sistema pitagórico tienen, por tanto, asignados los siguientes valores:

$$\begin{gathered}\text{Do–Re} : 9/8,\ \text{Re–Mi} : (81/64) : (9/8) = 9/8,\\ \text{Mi–Fa} : (4/3) : (81/64) = 256/243 = \lambda,\ \text{Fa–Sol} : (3/2) : (4/3) = 9/8,\\ \text{Sol–La} : (27/16) : (3/2) = 9/8,\ \text{La–Si} : (243/128) : (27/16) = 9/8,\\ \text{Si–Do'} : 2 : (243/128) = 256/243 = \lambda.\end{gathered}$$

Por otro lado, cuando un intervalo es unión (o suma) de dos, su fracción asignada será el producto de las fracciones correspondientes, y análogamente a la diferencia (en el sentido conjuntista) de dos intervalos le corresponderá su cociente.

Volviendo a lo anterior, se observa que en el sistema pitagórico hay solamente dos intervalos diferentes: el tono ($9/8 = 3^2/2^3$) y el *semitono diatónico*, correspondiente a la leimma ($256/243 = 2^8/3^5$). Aunque es posible considerar asimismo otro semitono: el *semitono cromático*[17], obtenido como diferencia entre el tono y el semitono diatónico; que tendrá asignado por tanto la fracción: $(9/8) : (256/243) = 2187/2048 = 3^7/2^{11}$ (nótese que al semitono diatónico le corresponde un número menor que al semitono cromático).

Es posible enconces hallar el valor de las notas cromáticas:

[17]Al semitono cromático los pitagóricos lo denominaban *apoteme*.

- Si N es una nota distinta de Mi o Si, el intervalo $N - N\#$ es cromático, luego a $N\#$ le corresponde el valor de N multiplicado por 2187/2048.
- Si N es una nota distinta de Fa o Do, el intervalo $Nb - N$ es cromático, luego a Nb le corresponde el valor de N dividido por 2187/2048.

Se tienen, en consecuencia:

Do : 1, Re b : $256/243 = 28/35$, Do # : $2187/2048 = 37/211$,
Re : $9/8 = 32/23$, Mi b : $32/27 = 25/33$, Re # : $19683/16384 = 39/214$,
Mi : $81/64 = 34/26$, Fa : $4/3 = 22/3$, Sol b : $1024/729 = 210/36$,
Fa # : $729/512 = 36/29$, Sol : $3/2$, La b : $128/81 = 27/34$,
Sol # : $6561/4096 = 38/212$, La : $27/16 = 33/24$, Si b : $16/9 = 24/32$,
La # : $59049/32768 = 310/215$, Si : $243/128 = 35/27$.

(Nótese que *Reb* es más grave que *Do#*, Mib es más grave que *Re#*...).

Como La, representada en el intervalo $[1, 2]$ por el punto $27/16 = 1,6875$ tiene de frecuencia 440 Hz, para hallar la frecuencia de cualquier otra nota habrá que multiplicar su valor asignado por una constante k tal que $440 = 27k/16$; esto es, $k = 7040/27 = 260,74$. Las notas y sus frecuencias en el sistema pitagórico tienen, pues, los siguientes valores (Tabla IV):

Nota	Valor en [1, 2]	Frecuencia (Hz)
Do	1	260,74
Re b	$2^8/3^5 = 1,053497942$	274,69
Do #	$3^7/2^4 = 1,067871094$	278,44
Re	$3^2/2^3 = 1,125$	293,33
Mi b	$2^5/3^3 = 1,185185185$	309,03
Re #	$3^9/2^{14} = 1,20135498$	313,24
Mi	$3^4/2^6 = 1,265625$	330,00
Fa	$2^2/3 = 1,3$	349,65
Sol b	$2^{10}/3^6 = 1,404663923$	366,25
Fa #	$3^6/2^9 = 1,423828125$	371,25
Sol	3/2=1,5	391,11
La b	$2^7/3^4 = 1,580246914$	412,03
Sol #	$3^8/2^{12} = 1,601806641$	417,03
La	$3^3/2^4$=1,6875	440,00
Si b	$2^4/3^2$=1,7	463,54
La #	$3^{10}/2^{15}$=1,802032471	469,86
Si	$3^5/2^7 = 1,8984375$	495,00

TABLA IV

Comparando los sistemas temperado (Tabla III) y pitagórico (Tabla IV), observamos que:

1. En el sistema temperado coincide el sostenido de una nota con el bemol de la nota siguiente, lo que no sucede en cambio en el sistema pitagórico, en donde el valor del primero es mayor que el del segundo. Con todo, los valores y las frecuencias correspondientes a las notas en la escala diatónica en ambos sistemas son muy parecidos, y lo mismo ocurre con sus alteraciones (si M es la nota siguiente a N, siendo N distinta de Fa o Do, el valor de $N\# = Mb$ en el sistema temperado está comprendido entre los valores de Mb y $N\#$ en el pitagórico, y es muy próximo a ellos).

2. Los números de la partición del intervalo $[1, 2]$ en el sistema temperado son irracionales, mientras que en el sistema pitagórico son racionales. Nótese que en este último los valores de todas las notas son productos de múltiplos enteros de 2 y de 3; sus frecuencias, por tanto, pueden ser multiplicadas o divididas por 2 y 3, en teoría un número cualquiera de veces, lo que significa que la longitud de las cuerdas puede ser multiplicada o dividida por 2 y 3 todas las veces que se desee (ello supondría ir subiendo o bajando octavas, respectivamente). La utilización de los números irracionales de la forma $2^{n/12}$ que aparecen en la gama pitagórica hubieran desesperado a Pitágoras, y para su uso fue fundamental la invención de los logaritmos a principios del siglo XVII.

En busca de una expresión general

Como se ha visto, la organización matemática establecida en el sistema pitagórico, ha permitido asignar a las notas musicales determinados números, que son productos de múltiplos enteros de 2 y de 3. Tratemos ahora de hallar una expresión general que englobe a los 17 valores de las notas; es decir, busquemos una modelización algebraica de la situación.

Evidentemente, los 17 valores son de la forma $3^x \times 2^y$, $x, y \in \mathbb{Z}$. También es fácil observar que $-6 \leq x \leq 10$; el problema, está claro que radica en la expresión del exponente y.

A la vista de que, a diferencia de x, los valores de y no son enteros consecutivos ni guardan una aparente relación con sus correspondientes valores de x, seguramente los alumnos no puedan continuar por sí solos sin la ayuda del profesor. Para desbloquear la situación, pueden hacerse entonces preguntas del siguiente tipo:

- ¿Resolveríamos el problema si se supiera expresar y en función de x?

- ¿Qué puede ser conveniente para hallar la expresión algebraica de una función?

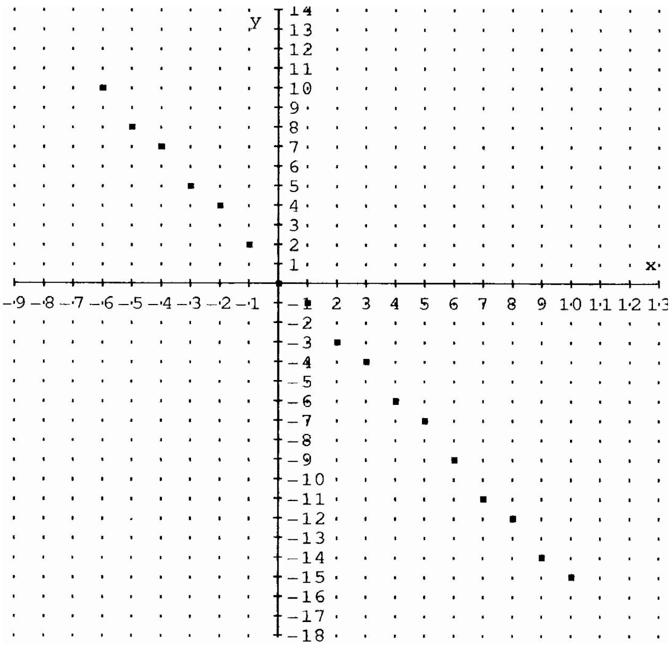


Figura 2

En fin, para no alargarnos, digamos que es posible que estas reflexiones les lleven a organizar geométricamente los objetos matemáticos de los que se dispone. Para ello, se construirá previamente una tabla de valores (Tabla V) y después se representarán los puntos (x, y) en unos ejes:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	10	8	7	5	4	2	0	-1	-3	-4	-6	-7	-9	-11	-12	-14	-15

TABLA V

¿Y cuál es la expresión de la función que pasa por esos puntos?

Observamos que la función se aproxima a una recta, aunque no coincida exactamente con ella. Convendría entonces reflexionar conjuntamente con los alumnos sobre el hecho de que, en no pocas ocasiones, en el concepto de modelo están implícitas nociones de aproximación; ya que, en efecto, la modelización consiste en la construcción de un cuadro teórico de referencia capaz de organizar matemáticamente situaciones concretas, con el fin de comprender mejor y tratar de dominar diferentes fenómenos. Sin embargo, el modelo abstracto creado no es sino una descripción ideal de la realidad y, por tanto, solamente aproximada. Así, en general, y por diversas razones –imprecisiones en la medida, desprecio de algunos factores (como, por ejemplo, la resistencia del aire en determinados fenómenos físicos), estudio de sucesos estocásticos...–

no suele ser posible una absoluta coincidencia de la realidad con el modelo, que será tan solo una aproximación –todo lo precisa que se quiera– de aquélla.

Volviendo de nuevo al asunto en el que nos encontrábamos, hay que tener en cuenta que con las herramientas elementales[18] que se sospecha tienen los alumnos, prácticamente solo cabría aproximar la función por la recta que pasara por los puntos extremos $(-6, 10)$ y $(10, -15)$. En cambio, esta recta no sería incidente con el origen, lo que se supone es una condición importante [el punto $(0, 0)$ correspondiente al valor $3^0 \times 2^0 = 1$, es el asignado a Do, origen del intervalo en el que se encuentran todas las notas]; además, siempre sería más fácil manejar una recta sin término independiente.

Para evitar este problema, podría insinuarse a los alumnos que acaso fuera mejor considerar dos semirrectas que pasaran por el origen y luego buscar otra que se aproximara a ambas. Seguramente llegarían entonces a la conclusión de que se podría partir de las dos semirrectas: $y = -5x/3$, $(x \leq 0)$ e $y = -3x/2$, $(x \geq 0)$, que pasan por el origen y por cada uno de los puntos extremos, y cuyas pendientes no son muy diferentes; como también que la solución final podría venir dada por otra recta $y = mx$, cuya pendiente fuera la media aritmética de las correspondientes a las dos semirrectas anteriores: $-5/3$ y $-3/2$, esto es, $m = -1,58\hat{3}$. Dado que nuestro nivel de aproximación no es muy grande, tomemos $m = -1,583$; o sea, la recta $y = -1,583x$, y representémosla.

Una vez dibujada observamos que, efectivamente, pasa muy cerca de los 17 puntos de partida.

Por otro lado, hay que recordar que y sólo puede tomar valores enteros, luego debería ser[19]: $y = -[1,583x]$. Además, $-6 \leq x \leq 10$, aunque sería mejor que los valores de x fueran de 1 a 17 (o de 17 a 1); por lo que tomamos como nueva variable a $11 - x$, y entonces: $y = -[1.583(11 - x)]$, $1 \leq x \leq 17$.

Por último, para hacer patente que $x \in \mathbb{N}$, podemos finalmente expresar el término general de los valores de las notas en el sistema pitagórico, de este modo:

$$p_n = 3^{11-n}2^{-[1,583(11-n)]},\ n = 1, 2, ..., 17 \tag{2}$$

Comprobamos entonces que, efectivamente, los valores de las 17 notas se obtienen mediante este término general[20]:

La # : p_1, Re # : p_2, Sol # : p_3, Do # : p_4, Fa # : p_5, Si : p_6,
Mi : p_7, La : p_8, Re : p_9, Sol : p_{10}, Do : p_{11}, Fa : p_{12}, Si b : p_{13},
Mi b : p_{14}, La b : p_{15}, Re b : p_{16}, Sol b : p_{17}.

Se observan por tanto las siguientes propiedades:

---

[18]Se supone que los alumnos no saben hallar rectas de regresión ni conocen los métodos de interpolación.

[19]$[x]$ significa parte entera de x.

[20]$p_1 = 3^{10}2^{-[1,583\times10]} = 3^{10}2^{-15}$, $p_2 = 3^9 2^{-[1,583\times9]} = 3^9 2^{-14}, ..., p_{17} = 3^{-6}2^{-[1,583\times(-6)]} = 3^{-6}2^{10}$.

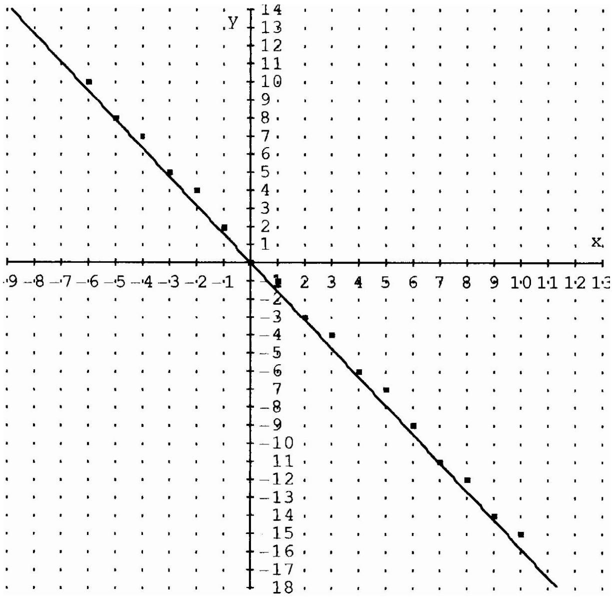


Figura 3

a) Si $1 \leq n \leq 5$, se obtienen los sostenidos; si $6 \leq n \leq 12$, las notas diatónicas y si $13 \leq n \leq 17$, los bemoles.

b) Si a la nota N en la escala diatónica le corresponde p_i $(6 \leq i \leq 12)$, entonces a $N\#$ le corresponde el valor p_{i-7} $(8 \leq i \leq 12)$ y a Nb, el valor p_{i+7} $(6 \leq i \leq 10)$.

Una vez visto que la cosa funciona, podemos tratar de profundizar un poco más. ¿Tiene algún sentido el enigmático número $1,583$ que, no olvidemos, hemos obtenido además aproximadamente y de un modo no muy ortodoxo? ¿No habrá algún concepto matemático "oculto" en este número?

Sería conveniente recordar entonces a los alumnos que no deben olvidar que aparecen las potencias de 2 y de 3 y, a lo mejor, también podrían estar presentes otros números íntimamente relacionados con las potencias. ¿Cuáles?...: los logaritmos. Pero, ¿cómo seguir esta pista?

Parece, en cualquier caso que habrán de calcularse $log2 = 0,301029995...$ y $log3 = 0,477121254...$ Tras una invitación a manipular con estos valores, no cuesta mucho darse cuenta de que:

$$log3/log2 = 1,584962502...,$$

que es aproximadamente el valor $1,583$ que se había obtenido.

Ahora bien, como

$$log3/log2 = log_2 3,$$

podemos expresar 2 de la siguiente manera, en la que se hace patente la presencia de los logaritmos[21]:

$$p_n = 3^{11-n}2^{-[(11-n)log_2 3]}, n = 1, 2, ..., 17 \tag{3}$$

Consideraciones finales

Las expresiones (1) y (3) por las que se obtienen en términos de potencias los valores de las notas, t_n y p_n , en los sistemas temperado y pitagórico, respectivamente, ponen de manifiesto lo ya dicho con anterioridad sobre la naturaleza de tipo proporcional de la división de la escala en notas musicales. Recordemos que en la primera de tales expresiones los exponentes son números racionales y en la segunda son enteros, lo que supone que únicamente se encuentren números irracionales entre los valores de t_n, correspondientes a las notas del sistema temperado (sería impensable la intervención de esa clase de números en el sistema de Pitágoras, a la vista de la sensación de rechazo que mostraron los miembros de su escuela ante el descubrimiento de los irracionales, hasta el punto de provocar la que es considerada primera crisis de los fundamentos de la matemática).

El carácter exponencial de los valores de las notas en una y otra gama hace entrever asimismo, de algún modo, la traza de los logaritmos, presencia que se hace explícita en la expresión (3). Eso mismo sucede en otros elementos de la acústica musical, como las *comas* (intervalos más pequeños que pueden percibirse en la práctica musical), los *savarts* (unidad de medida utilizada para expresar las diversas comas y semitonos en los diferentes sistemas de afinación), la Ley de Weber-Fechner...; pero de esos temas no vamos a hablar en esta ocasión.

Para finalizar, resulta obligado decir que para recrearse en la música no es necesario en modo alguno haber advertido sus conexiones con las matemáticas, como no lo es tampoco, por ejemplo, tener conocimientos físicos sobre la naturaleza del sonido. De la misma manera, el afinador de un instrumento suele proceder de acuerdo con los cánones establecidos en alguno de los sistemas de afinación, aunque en numerosas ocasiones afina “de oído”, ya que, afortunadamente, el oído humano no es una calculadora ni un cuentavibraciones.

El lenguaje en que está escrita la naturaleza, como afirmaba Galileo, es el de la matemática, de la que asimismo se percibe su presencia en las más variadas manifestaciones artísticas [11]; sin embargo, felizmente, la estructura subyacente en tales casos no mediatiza la creación artística ni pone trabas a su disfrute...

[21]Por mero cálculo se comprueba fácilmente que, en efecto, al cambiar $1,583$ por $1,584962502$ no se alteran los valores de p_n.

REFERENCIAS

[1] A. BOUVIER ET AL., *Didactique des Mathématiques.* Cedic/Nathan. Paris, 1986.

[2] E. CASTRO Y E. CASTRO, *"Representaciones y Modelización"*, en Rico (coord.), La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. ICE/Horsori. Barcelona, 1997, pp. 95-124.

[3] M. C. GHYKA, *El número de oro*, Vol. I. Poseidon. Barcelona, 1992.

[4] P. M. GONZÁLEZ, *Pitágoras. El filósofo del número.* Nivola. Madrid, 2001.

[5] M. DE GUZMÁN, *"Los pitagóricos"*, en Historia de la Matemática hasta el siglo XVII. Real Academia de Ciencias. Madrid, 1986, pp. 11-35.

[6] SIR J. JEANS, *"Matemáticas de la música"*, en Sigma. El mundo de las Matemáticas, Vol. 6, Newman, J. R. Grijalbo. Barcelona, 1980 (8ª ed.), pp. 214–243.

[7] V. LIERN, "La música y sus materiales: una ayuda para las clases de matemáticas". *Suma*, 14/15, 1994, pp. 60–64.

[8] D. LORRAIN, *"Quelques petits êtres .."*, en Musique et Mathématique. Aleas. Lyon, 1997, pp. 111–122.

[9] H. MARTIN, *"Las matemáticas y la música"*, en F. Le Lionnais y colaboradores, Las grandes corrientes del pensamiento matemático. EUDEBA. Buenos Aires, 1976 (3ª ed.), pp. 523–530.

[10] R. PASCAL, *"Le nombre dans la composition musicale au XXe siècle"*, en Musique et Mathématique. Aleas. Lyon, 1997, pp. 51–62.

[11] J. PERALTA, "'Las matemáticas en el arte, la música y la literatura". *Tendencias Pedagógicas*, 3 (Vol. 2), 1998, pp. 235–244.

[12] S. RÍOS, *Modelización.* Alianza Universidad. Madrid, 1995.

[13] L. ROBIN, *La pensée grecque et les origines de l'esprit scientifique.* Albin Michel. Paris, 1973.

[14] L. STOKOWSKI, *Música para todos nosotros.* Espasa Calpe (Colección Austral). Buenos Aires, 1946.

[15] J. ZAMACOIS, *Teoría de la Música, Libros I y II.* Labor. Barcelona, 1975.

Javier Peralta
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid
Cantoblanco, 28049 Madrid
Correo electrónico: `javier.peralta@uam.es`