# De Hilbert a los Problemas del Milenio

por

**Manuel Castellet**

El 8 de agosto de 1900, David Hilbert pronunció una conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticos de París, en la que formulaba y razonaba 23 problemas matemáticos. Esta conferencia programática, que ha influido el desarrollo de las matemáticas durante todo un siglo, permanece famosa todavía hoy cien años después. Las matemáticas desempeñan en el mundo actual un triple papel: se basan en una lógica estricta y, por lo tanto, establecen el estándar de la verdad objetiva; son, como el arte, una creación de nuestro espíritu y, por lo tanto, una parte de nuestra tradición cultural; y, finalmente, se pueden utilizar en aplicaciones concretas.

Los profanos perciben sólo esta última función práctica; la investigación en matemática fundamental, que está en la base de todo acontecimiento científico, permanece, sin embargo, desconocida. Con la idea de cambiar un poco esta situación, el *Clay Mathematics Institut* (una fundación que tiene como objetivo la difusión del conocimiento matemático) ha instaurado recientemente siete premios de un millón de dólares cada uno para la resolución de los siete *Problemas del Milenio*. Estos problemas, seleccionados muy cuidadosamente por expertos indiscutidos, son cuestiones abiertas de las más difíciles de varios campos de las matemáticas. Algunos son problemas nuevos, otros hace más de cien años que esperan su resolución.

David Hilbert

## Sobre la conferencia de Hilbert

Los Problemas del Milenio fueron presentados públicamente el mes de mayo del año 2000 en París, como una especie de nueva versión de la famosa conferencia de Hilbert de ahora hace cien años en el segundo Congreso Internacional de Matemáticos, también celebrado en París, como he dicho. Hay, sin embargo, una gran diferencia: mientras que los problemas planteados ahora afectan sólo a aspectos parciales de las matemáticas actuales, Hilbert abarcaba la totalidad de las matemáticas de aquel entonces. También es cierto que en el año 1900 había un Hilbert y ahora, pese al avance increíble que han experimentado las matemáticas, no tenemos una figura capaz de entender la globalidad como él.

El programa de Hilbert ha influido el desarrollo de las matemáticas durante toda la primera mitad del siglo XX y buena parte de la segunda; por esta razón, el recuerdo de su famosa conferencia ha permanecido muy vivo.

En el año 1900, David Hilbert, de 38 años de edad, era profesor en la Universidad de Göttingen, entonces la fortaleza de las matemáticas. Entre sus colegas Hilbert era considerado como el matemático alemán más importante. A principios del año recibió la invitación para impartir la conferencia inaugural del congreso de París. Hermann Minkowski, profesor en la *Eidgenössische Technische Hochschule* de Zürich (ETH) y amigo íntimo de Hilbert desde los años de estudiantes en Königsberg, le pedía "dar una ojeada al futuro de las matemáticas y a sus problemas"; sobre un tema como éste, según Minkowski, se seguiría hablando durante décadas.

La carta de Minkowski no recibió nunca respuesta. Hilbert acabó el texto de su conferencia en el último minuto, como si fuera más latino que germánico, y la mandó a Minkowski y a Adolf Hurwitz, antiguo maestro de Hilbert y también profesor en la ETH. Pero fue demasiado tarde; la conferencia de Hilbert no fue la conferencia inaugural del congreso y se incluyó en el tercer día de sesiones. Para colmo de desgracias, Hilbert calculó mal la duración de su intervención y se tuvo que contentar con presentar 10 de los 23 problemas que había preparado.

Dos aspectos conviene destacar de la presentación general y de cada uno de los problemas: la relación entre problemas particulares y teorías generales, así como la necesidad de demostraciones rigurosas (*strenge Beweise*). La resolución de un problema particular y la construcción de una teoría general deben ir, según Hilbert, de la mano. Todavía más, apuntaba Hilbert, los esfuerzos por resolver un problema difícil son necesarios para el avance de las matemáticas, aunque estos esfuerzos no lleven a la resolución del problema. Y mencionaba dos ejemplos paradigmáticos: la hipótesis de Fermat y el problema de los tres cuerpos de la mecánica.

Pese a que la hipótesis de Fermat no fue demostrada hasta los años 1993 y 1995 por Andrew Wiles, se habían hecho ya intentos interesantes para su resolución a partir del siglo XVIII. Unos intentos que no daban los frutos deseados, pero que, por ejemplo, llevaron a la teoría algebraica de números, una nueva teoría con una multitud de conceptos que más tarde se fueron desarrollando independientemente. Los métodos utilizados por Wiles fueron, sin embargo, de tipo totalmente diferente; su demostración está basada en consideraciones sobre la geometría de las curvas.

Algo parecido pasó con el problema de los tres cuerpos de la mecánica, que hoy todavía plantea preguntas abiertas. El problema inspiró al parisino Henri Poincaré nuevos métodos de la mecánica celeste, que se han convertido actualmente en herramientas importantes para la navegación de satélites.

Hilbert y Poincaré se conocían y se admiraban, pero su concepción de las matemáticas era muy distinta. Para Poincaré jugaban un papel esencial la intuición y las analogías físicas; para Hilbert, era esencial el marco de la lógica más estricta. Por este motivo destacó Hilbert en su conferencia en el congreso de París la necesidad de que toda afirmación, toda resolución de un problema, debía ser demostrada. Y si un problema no tiene solución, como la cuadratura del círculo, entonces hay que poder demostrar precisamente eso, que no tiene solución. Pero, pese a que él afirmaba que cualquier posible resultado era o no era, no tenía una demostración de que las cosas fueran así.

Una demostración era para Hilbert una sucesión finita de razonamientos lógicos. Ciertamente hay otros aspectos de la matematización, como consideraciones de plausibilidad, analogías, experiencias físicas e intuición; pero nada de eso puede sustituir la demostración. Hilbert pedía la demostración rigurosa no sólo para la aritmética y la geometría clásica, sino también para todas las otras ramas de las matemáticas, incluida la matemática aplicada. En aquella época, esto no era un posicionamiento tan claro como ahora. La demanda de demostraciones rigurosas tiene sólo pleno sentido en el marco de la construcción axiomática de las matemáticas. Esta pretensión de Hilbert ponía de manifiesto la cuestión de si es posible o no construir las matemáticas sobre una base que no admita contradicción.

A los no iniciados les podría sorprender que precisamente alguien pueda poner en entredicho los fundamentos del edificio matemático, su consistencia. Aquí es necesario puntualizar que ninguno de los conceptos matemáticos que utilizamos continuamente en nuestro entorno, aparece en nuestro mundo real. No hay ni puntos ideales ni líneas rectas infinitas; son creaciones de nuestro espíritu como el espacio de la geometría elemental, los espacios de dimensiones superiores o la serie infinita de los números enteros. Los objetos matemáticos son simplemente un conjunto de elementos y entre ellos se definen relaciones, como la suma, la multiplicación o la proximidad. Estas relaciones deben satisfacer determinados axiomas, que, naturalmente, se toman de la observación; no son necesariamente hechos evidentes sino reglas de juego de la teoría; estas reglas y las consecuencias que de ellas se derivan son lo único que uno puede utilizar para las demostraciones. Esto era lo que Hilbert entendía por una construcción axiomática de las matemáticas. Estas ideas de Hilbert fueron tomando cuerpo, especialmente bajo la influencia del grupo Bourbaki, y han sido decisivas para el progreso de las matemáticas.

Cuando Hilbert hubo desarrollado una fundamentación axiomática de la aritmética y de la geometría clásica, se planteó inmediatamente la cuestión de la consistencia del sistema de axiomas, es decir, de la no contradicción. No tenía ninguna duda, pero la intuición no le era suficiente. Por esa razón, proponía en el segundo de sus 23 problemas una demostración de que no es posible en el sistema axiomático de la aritmética, mediante razonamientos lógicos, demostrar una afirmación y, al mismo tiempo, su contraria.

Esta demostración que él pedía no llegó nunca. Al contrario, 30 años después de la conferencia de Hilbert, cuando él estaba matemáticamente aún activo, el lógico austriaco Kurt Gödel demostró que no se puede encontrar una demostración matemática del principio de no contradicción para la aritmética.

No sólo el segundo, sino también el primero de los problemas propuestos por Hilbert obtuvo una respuesta distinta de la que él pensaba. Un subconjunto no numerable de un continuo (es decir, de los puntos de una recta real), ¿se comporta como todo un continuo? Es la hipótesis del continuo. Hilbert sugería que todo subconjunto de un continuo era o bien numerable o bien un continuo, pero en el año 1963 el matemático Paul Cohen demostró algo sorprendente: tanto la afirmación como su contrario son compatibles con los axiomas. Uno puede tomar como nuevo axioma una afirmación o bien la otra.

Tampoco es cierto, tal y como pensaba Hilbert, que cualquier problema o bien se puede resolver o bien puede demostrarse su irresolubilidad. Durante todo el siglo, los lógicos han trabajado esta cuestión con métodos muy sutiles.

Para un juicio histórico de la conferencia de Hilbert del año 1900 es irrelevante que las respuestas a sus preguntas fundamentales no se correspondan a como él las había imaginado. Lo realmente decisivo fue que él había formulado las preguntas de un modo tan claro y preciso que, después, los investigadores pudieron trabajar. Lo realmente importante es, por ejemplo, el hecho de que se acepta que en el sistema axiomático no hay contradicción, aunque no lo podamos demostrar de un modo definitivo. Las aportaciones inestimables que han generado las matemáticas desde hace centenares de años, han creado una atmósfera de credibilidad.

Estas cuestiones fundamentales y algunas otras que no cito constituían sólo una pequeña parte del programa de Hilbert. Paralelamente, formuló una larga serie de problemas específicos. El espectro es muy amplio y comprende todas las partes del pensamiento matemático. Al cabo de cien años se han resuelto todos los problemas específicos a excepción de tres. Uno de ellos es la hipótesis de Riemann que, actualmente, está considerado como el más importante y más difícil de los problemas no resueltos y figura, por lo tanto, entre los *Problemas del Milenio*. La hipótesis de Riemann trata de los ceros de una función relacionada con los números primos y está conectada con casi todas las disciplinas de las matemáticas. Pese a que enormes cálculos con ordenador la corroboran, aún no ha podido ser demostrada.

Podríamos continuar con una muestra de los problemas específicos que Hilbert planteó, que van desde las ecuaciones diofánticas hasta los fundamentos axiomáticos de la física, pero lo que ahora quiero destacar es que el programa de Hilbert iba desde teoremas de existencia fundamentales, pasando por cuestiones abstractas y por concretas, hasta las aplicaciones. Por esta amplitud, su conferencia sigue siendo considerada como un acontecimiento histórico.

## La nueva situación

Pero, al cabo de cien años, la situación ha cambiado. No sólo no tenemos un Hilbert ahora, capaz de entender la globalidad, que no lo tenemos, sino que el mundo de las matemáticas cuenta actualmente con unos cincuenta mil investigadores que, merced a los medios de comunicación y de información, constituyen un organismo, en el cual cada parte reacciona rápidamente a los estímulos de las otras. Por eso ahora no es posible un programa como el de Hilbert.

Aun así, el *Clay Mathematics Institute* de Cambridge, Massachusetts, con un comité científico formado por Alain Connes, Arthur Jaffe, Andrew Wiles y Edward Witten, encargó a siete de los más destacados matemáticos del momento el planteamiento de siete grandes problemas abiertos. No es un programa como el de Hilbert, que abarcaba el conjunto de todas las matemáticas, no es un planteamiento como el de Hilbert, con mentalidad europea, que combinaba aspectos fundamentales con resultados muy específicos. Es para mí una muestra de la realidad matemática actual y del dominio que ejerce la concepción científica liberal norteamericana. El *Clay Mathematics Institute* ha dotado los siete premios con un millón de dólares cada uno para aquellos que resuelvan cada uno de los problemas planteados. Resulta mediáticamente muy bien, pero no creo que haga avanzar la investigación como lo hizo el programa de Hilbert.

Los mismos promotores de los premios declaran que los *Problemas del Milenio* no pretenden marcar la dirección de las matemáticas durante este siglo XXI; sólo quieren centrar la atención en un pequeño conjunto de cuestiones matemáticas pendientes desde hace tiempo, cada una de ellas central, que se están resistiendo a ser resueltas, como por ejemplo la hipótesis de Riemann, que ya he mencionado.

## Los Problemas del Milenio

### 1. La Hipótesis de Riemann (formulada por Bernhard Riemann en el año 1859)

*Los ceros de la función zeta de Riemann tienen parte real igual a un medio.*

Es posiblemente el más famoso de los resultados pendientes desde hace tiempo (y se ha comprobado que es cierto para los "primeros" mil quinientos millones de ceros).

La demostración de la hipótesis de Riemann daría información definitiva a varias cuestiones sobre la frecuencia de los números primos.

Preparado por Enrico Bombieri.

### 2. P Versus NP (formulado por Stephen Cook en el año 1971)

*¿Es cierto que P es igual a NP?*

La pregunta equivale a determinar si todo lenguaje aceptado por un algoritmo no determinístico en un tiempo polinomial es también aceptado por algún algoritmo determinístico en tiempo polinomial (el recíproco es siempre cierto).

Una respuesta afirmativa permitiría disponer de algoritmos útiles para muchos problemas computacionales prácticos, pero al mismo tiempo destruiría la seguridad de transacciones financieras hechas a través de internet. Afecta, pues, esencialmente, a la criptografía.

Preparado por Stephen Cook.

3. LA CONJETURA DE HODGE (formulada por William Hodge en el año 1950)

*En una variedad algebraica proyectiva no singular sobre los complejos, toda clase de Hodge es una combinación lineal racional de clases de ciclos algebraicos.*

Se sabe que un ciclo algebraico es lo mismo que un subespacio analítico cerrado.

Si la conjetura es cierta, los ciclos de Hodge admitirán una interpretación geométrica y esto permitiría conocer cómo son las piezas que se adjuntan a determinados espacios para construir unos nuevos, técnica que se ha mostrado muy potente durante todo el siglo pasado.

Preparado por Pierre Deligne.

4. LA CONJETURA DE POINCARÉ (formulada por Henri Poincaré en el año 1904)

*Toda* $3$*–variedad cerrada simplemente conexa es homeomorfa a la* $3$*–esfera.*

La conjetura inicialmente planteada por Poincaré exigía solamente que la variedad inicial tuviera la misma homología que la esfera, pero él mismo demostró que era falsa al construir la llamada esfera de Poincaré.

La versión $n$–dimensional de la conjetura, exigiendo que la variedad inicial tenga los mismos grupos de homotopía que la esfera, es cierta para $n = 2$, para $n \geq 5$ (S. Smale 1960) y para $n = 4$ (M. Freedman 1980).

Preparado por John Milnor.

5. LA TEORÍA DE YANG–MILLS

*Demostrar que para todo grupo gauge simple compacto, la teoría cuántica de Yang–Mills en el espacio de dimensión* $4$ *existe y tiene defecto de masa positivo.*

La demostración de este resultado permitiría un mejor conocimiento matemático de las teorías cuánticas de campos 4-dimensionales, de gran importancia en la física. Permitiría, por ejemplo, dar una justificación matemáticamente satisfactoria de la invisibilidad de los *quarks*.

Preparado por Arthur Jaffe y Edward Witten.

6. LAS ECUACIONES DE NAVIER–STOKES

*¿Existen soluciones diferenciables, físicamente razonables para las ecuaciones de Navier–Stokes en tres dimensiones?*

El resultado es conocido en dos dimensiones, incluso para las ecuaciones de Euler y varios cálculos computacionales numéricos avalan una respuesta afirmativa.

La importancia de las ecuaciones de Euler y de Navier–Stokes radica en que describen el movimiento de un fluido en el espacio.

Preparado por Charles Fefferman

## 7. La Conjetura de Birch y Swinnerton–Dyer

La conjetura es técnicamente muy difícil de formular, pero dice más o menos que las soluciones racionales de determinadas ecuaciones algebraicas están íntimamente relacionadas con una cierta función zeta como la de Riemann, de forma que si la función se anula en el punto 1, entonces hay una infinidad de puntos racionales y si no se anula, sólo hay un número finito.

Constituye, en cierto modo, un refinamiento del décimo problema de Hilbert, que en el año 1970 Yu. V. Matiyasevich demostró que era irresoluble.

Preparado por Andrew Wiles.

## Pero..., y en "casa", ¿qué?

La expresión "casa" puede tener, y de hecho tiene, diversas interpretaciones, según el entorno geográfico y cultural en el que nos situemos. En la conferencia impartida en la *Universitat Jaume I*, de Castellón de la Plana, el 7 de noviembre del año 2000, al hablar de "casa" (*casa nostra*, en catalán) me refería a los departamentos de Matemáticas (con los nombres que tengan) de las universidades del conjunto de tierras de lengua y cultura catalanas, agrupadas en la red universitaria *Institut Joan Lluís Vives*. En la conferencia impartida en la Universidad de Zaragoza el 19 de abril de 2002, el término "casa" abarcaba un espacio más amplio: el de los departamentos de Matemáticas de las universidades españolas.

Las reflexiones que siguen son válidas para los dos conceptos de "casa" expresados, aunque algunas consideraciones, debidas a un mayor grado de conocimiento por mi parte, se refieren o aplican solamente al primero.

En "casa" –seamos realistas– no nos podemos fijar como objetivo para los próximos años demostrar ninguno de los 7 problemas que acabo de plantear –ojalá me equivoque–, como no se podían plantear nuestros predecesores resolver ninguno de los 23 problemas de Hilbert. Pero, aunque me reafirmo en lo que acabo de decir, es necesario aclarar que la situación ahora, en casa, refiriéndonos al contexto internacional, es muy distinta de la de hace 100 años; incluso es muy distinta de la de hace 30 años. A inicios de los años setenta, la probabilidad de encontrar en el *Mathematical Reviews* o en la *Zentralblatt für Mathematik* un artículo firmado por un matemático español era casi 0. Actualmente, sin embargo, en todas las áreas abundan los trabajos de investigación de matemáticos de nuestras universidades publicados en revistas de prestigio, y en todas las áreas tenemos matemáticos científicamente destacados.

Esto que acabo de afirmar es una realidad constatable, por ejemplo, referido sólo a las universidades de Cataluña, en el reciente informe sobre la investigación matemática, elaborado por el *Institut d'Estudis Catalans*: la relación entre el número total de artículos publicados en Cataluña y el número de habitantes por el producto interior bruto del país es similar al de Noruega, Gran Bretaña o Alemania, y el $8,2\%$ de todos los artículos de matemáticas son publicados en revistas consideradas de excelencia, datos que sitúan a Cataluña, con respecto a la investigación matemática y a estos parámetros, en los primeros lugares de los países científicamente más significativos. Y en otras regiones de España la situación debe ser parecida.

Por lo tanto, el enorme esfuerzo realizado por los matemáticos de las últimas generaciones no ha sido en vano. Y de eso debemos congratularnos, pero al mismo tiempo nos tiene que servir de estímulo para seguir en esa línea iniciada ahora hace casi 30 años. No resolveremos, probablemente, ninguno de los 7 *Problemas del Milenio*, no ganaremos, probablemente, ninguna Medalla Fields, pero, por el momento, estamos teniendo una presencia importante en la bibliografía matemática y una consideración más que notable en el contexto internacional. La organización en el verano del 2000, a cargo de la *Societat Catalana de Matemàtiques*, del Tercer Congreso Europeo de Matemáticas constituye un buen ejemplo.

No me toca a mí entrar ahora aquí en hacer una reflexión sobre lo que conviene investigar en las diversas áreas ni sobre la deseable articulación de los grupos concretos de investigación. Quiero limitarme a hacer unas reflexiones sobre la consideración de nuestras "casas" como comunidades científicamente consideradas internacionalmente. Es cierto que contamos con investigadores conocidos internacionalmente; también es cierto que nuestros grupos de investigación empiezan a ser visibles bibliográficamente. Pero una cosa es que individualmente seamos ya conocidos y reconocidos y otra bien distinta es que lo seamos como comunidad. Sin la primera no podríamos aspirar a la segunda, pero ese debería ser un objetivo irrenunciable. Deberíamos querer conseguir que esta comunidad que he denominado "casa" no sea conocida internacionalmente sólo por el Gaudí barcelonés, por las playas isleñas, por la cerámica castellonense, por las naranjas valencianas o por el Peñón de Ifach, sino conocida, también, como una comunidad científica, como una comunidad matemática.

Y tenemos herramientas para hacerlo y podemos, si queremos, crear nuevas herramientas para darnos más fuerza y más presencia. Me limitaré a mencionar las que conozco, en el primero de los conceptos de "casa" que he mencionado, por el conocimiento que de él tengo, pero, sin duda, existen otras iniciadas o ensayadas aquí o allá, que deberíamos intentar compartir todos.

Herramienta 1. La red de universidades del *Institut Joan Lluís Vives*. ¡Explotemos sus potencialidades! ¿Cuántos de nosotros nos hemos acogido a las posibilidades –débiles, ciertamente– que ofrece su programa de movilidad?

Podríamos, por ejemplo, proponer un programa estable de intercambio de estudiantes de doctorado o un pequeño paquete de becas postdoctorales. Seguro que un reducido grupo de trabajo dedicado a explorar estas posibilidades podría acabar planteando propuestas serias con éxito.

Herramienta 2. La *Societat Catalana de Matemàtiques*. Aquí, el adjetivo no se refiere a catalana de Cataluña, sino a catalana del conjunto de territorios donde se extiende esta lengua. Es cierto que la *Societat* cuenta con socios en todo el territorio y que intenta, también, organizar actividades en todas las áreas geográficas; por ejemplo, las *Pruebas Canguro* en las Islas Baleares o en Castellón, el Tercer Encuentro Matemático en Valencia. Pero creo que, entre todos, deberíamos exigirnos una más equitativa distribución de las actividades y una mayor presencia de y en todos los territorios. Por ejemplo, estableciendo becas para estudiantes o para doctorandos ofrecidas a todo el ámbito lingüístico, es decir, a todo el ámbito de actuación de la *Societat*, que coincide con el del *Institut Joan Lluís Vives*.

Observación: el nuevo empuje de la Real Sociedad Matemática Española en los últimos cuatro años, permite ser optimistas en el ámbito del Estado español.

Herramienta 3. Una comunidad se puede dar a conocer como tal por medio de una revista científica que consiga un buen nivel. Y no la tenemos. Disponemos de algunas revistas, una con más antigüedad que las otras, que nos permiten un cierto intercambio editorial, pero que son escasamente conocidas internacionalmente. Propuesta que lanzo ahora: creación de una revista nueva, con visión de futuro tanto desde el punto de vista editorial como de prestigio científico, publicada por la nueva empresa editorial de la Sociedad Europea de Matemáticas, que se presentara como la continuidad de todas las revistas que ahora publicamos. Esta revista debería ser liderada y editada por la *Societat Catalana de Matemàtiques* con la colaboración del *Institut Joan Lluís Vives*. Sólo renunciando a protagonismos estériles podremos progresar; de lo contrario, nos estancaremos en cada uno de nuestros pequeños reinos de taifas.

Pregunta: ¿es igualmente aplicable esta idea al resto de España?

Herramienta 4. El *Centre de Recerca Matemática* (CRM), creado por el *Institut d'Estudis Catalans* como una infraestructura para estimular el incremento de la investigación matemática en Cataluña, tanto cuantitativamente como cualitativamente. El CRM invita a destacados investigadores a realizar estancias de larga duración para trabajar con los matemáticos catalanes de todas las universidades, ofrece y gestiona becas postdoctorales (actualmente cinco becarios Marie Curie), organiza seminarios, congresos, cursos avanzados, etc. (en los últimos tres años, 14 eventos patrocinados por la Comunidad Europea en el marco del subprograma *Conferencias Científicas de Alto Nivel*). El CRM difunde los resultados de investigación mediante sus series de publicaciones propias o a través de la serie *Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona*, editada por *Birkhäuser–Verlag*. Desde el año 2002 se ha reestructurado como un consorcio entre la *Generalitat de Catalunya* y el *Institut* *d'Estudis Catalans*, con personalidad jurídica propia, y ofrece a la comunidad matemática local programas anuales de investigación.

Propuesta: la experiencia y los resultados positivos del CRM podrían servir de base para la organización y coordinación de una infraestructura análoga con una implantación en todo el ámbito geográfico de España.

Manuel Castellet
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Autònoma de Barcelona
Centre de Recerca Matemática
Correo-electrónico: crm@crm.es

Adaptación de la conferencia impartida en catalán, el 7 de noviembre de 2000, en la *Universitat Jaume I* y en castellano, el 19 de abril de 2002, en la Universidad de Zaragoza.