

---

---

## EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

**Javier Cilleruelo Mateo**

---

---

### Cartomagia matemática y cartoteoremas mágicos

por

**Venancio Álvarez, Pablo Fernández y M. Auxiliadora Márquez**

#### 1. INTRODUCCIÓN

Una reunión de amigos, un descanso entre charla y charla de un congreso de matemáticos, cualquier momento es bueno para que alguien saque una baraja y realice un par de trucos con las cartas que dejan asombrados al personal. La mayor parte de esos trucos están basados en algún principio de tipo combinatorio, probabilístico, aritmético, etc., aunque quien los realiza probablemente no acabe de entender del todo el porqué de su funcionamiento.

Pero, por supuesto, no todos los trucos con cartas son automáticos o se basan en cierta habilidad mental para memorizar las cartas, hacer cuentas, etc. Y basta ver la actuación de un mago profesional (donde las cartas aparecen y desaparecen, las barajas cambian de color, etc.) para convencernos de que sus trucos se basan en algo más que en meros cálculos.

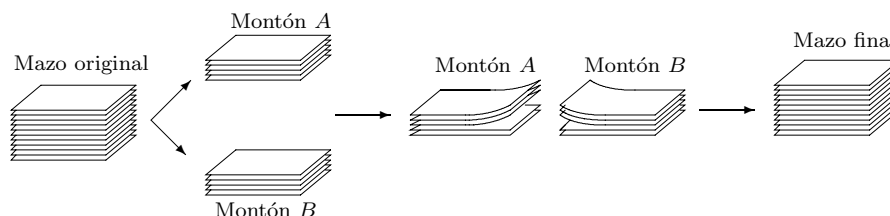
Decía Martin Gardner, cuyos libros de Matemática recreativa (ver [Ga1], [Ga2]) contienen multitud de juegos con cartas, que los trucos que podríamos llamar “matemáticos” son, ciertamente, más aburridos y menos espectaculares que los que realizan los magos profesionales en sus actuaciones (aunque éstos también los utilizan, convenientemente adornados con técnicas de habilidad manual, detalles de presentación y sutilezas psicológicas, que ocultan su verdadera razón de ser). Los que describiremos en la segunda sección de esta nota conjugan, a nuestro juicio, conceptos matemáticos diversos e interesantes con efectos mágicos sorprendentes y entretenidos.

Para la realización de todos los juegos que se describen en este artículo utilizaremos la llamada **baraja francesa** (aunque la mayor parte de ellos también se pueden hacer con una baraja española corriente de 40 cartas). Hay varias razones por las que preferimos una baraja de póker, además de por tener más tradición mágica. Por una parte, el hecho de que las cartas se dividan en

rojas y negras da lugar a combinaciones interesantes; y, por otra parte, a veces es conveniente que el número de cartas sea elevado.

Las 52 cartas de la baraja francesa se agrupan en cuatro palos: dos rojos, los corazones ( $\heartsuit$ ) y los diamantes ( $\diamondsuit$ ), y dos negros, picas ( $\spadesuit$ ) y tréboles ( $\clubsuit$ ). Cada palo está compuesto por 13 cartas. Diez de ellas tienen valores numéricos que van desde el 1, o As, hasta el 10. Las otras tres son las figuras: J (se corresponde con la sota de la baraja española, del inglés *Jack*), Q (la dama, del inglés *Queen*) y K (el rey, del inglés *King*). Estas figuras no tienen valores numéricos, pero si no se dice lo contrario, les asignaremos los valores  $J = 11$ ,  $Q = 12$  y  $K = 13$ .

En cualquier truco con cartas, para disipar dudas sobre la “honestidad” del mago, es necesario mezclar previamente las cartas. Hay varias técnicas para hacerlo, y aquí emplearemos la **mezcla por imbricación** (que cualquiera puede realizar, aunque quizás no con la elegancia y pericia de un *croupier* profesional). Primero cortamos el mazo, más o menos por la mitad, y luego mezclamos los dos montones resultantes, como en el dibujo:



Generalmente, no seremos capaces de cortar exactamente por la mitad, ni de mezclar perfectamente los dos mazos (de manera que las cartas de uno y otro vayan alternándose). Pero, sea cual sea nuestra habilidad para hacerlo, es obvio que una sola mezcla de éstas no deshace completamente la ordenación inicial de las cartas: por eso barajamos varias veces. En la tercera sección contestaremos a la pregunta: ¿cuántas mezclas son necesarias para estar razonablemente convencidos de que la baraja queda “suficientemente desordenada”?

Hay otra técnica para mezclar las cartas, que ya requiere una habilidad manual fuera del alcance del común de los mortales, y que describiremos en la sección final de este artículo. Su aplicación a la realización de trucos de magia está, como hemos comentado, reservada a los magos profesionales, pero tiene una riquísima estructura matemática, que confiamos interese al lector.

## 2. JUEGOS DE CARTAS

Una de las reglas básicas de los magos es la de no desvelar el secreto, y aquí vamos a incumplir repetidamente este precepto. Digamos en nuestro descargo que muchos de estos juegos son bien conocidos, y se pueden encontrar en libros de Matemática recreativa o en la red. Si añadimos a eso la irresistible tentación

de mostrar que juegos con resultados tan sorprendentes se basan en sencillos principios matemáticos, nos sentiremos suficientemente justificados.

Para realizar estos juegos no se necesita ninguna habilidad manual especial, tan sólo es conveniente tener cierta soltura mezclando la baraja. La mayoría de estos trucos son automáticos, pero algunos de ellos requieren un poco de esfuerzo mental y algo de entrenamiento previo.

No será necesario mencionar que este artículo ha de leerse acompañado de una baraja. Y podemos asegurar que el lector, una vez dominado cualquiera de los juegos, notará un irrefrenable deseo de mostrárselo al primero que pase cerca. Pero no ha de pensarse que, por ser fáciles de realizar, éstos son malos juegos. De hecho, nosotros sentimos mucho aprecio por estos trucos, y realizamos algunos de ellos habitualmente en nuestras actuaciones informales.

Es costumbre, en los libros de magia, exponer en primer lugar el *efecto*, o sea, lo que el espectador va a ver, y a continuación la *realización*, que es lo que el mago debe hacer para conseguir el efecto. Nosotros seguiremos este esquema, añadiendo breves comentarios sobre los principios matemáticos involucrados.

TRUCO 1: *La carta del día*

Este primer juego está basado, más que en un principio matemático, casi en una obviedad: si cuento  $M$  cartas y más tarde cuento  $N - M$ , al final habré contado  $N$  cartas en total. Por supuesto, esto se hace de una forma velada y con una presentación original, para que no resulte tan evidente.

**Efecto:** Cada día del año tiene asociada una carta particular; por ejemplo, la carta del 1 de enero es el 7 de picas, la del 3 de marzo es el 4 de trébol, etc. Un espectador mezcla la baraja y, siguiendo unas sencillas indicaciones, llegará hasta la carta del día de hoy que el mago habrá anunciado previamente.

**Realización:** Dale la baraja a un espectador y, mientras la mezcla a su gusto, explica al público que cada día del año tiene su carta especial ... aunque no te acuerdas muy bien de cuál es la carta de hoy. Después de la mezcla pide al espectador que haga sobre la mesa dos montones de 13 cartas cada uno. Coge las cartas que sobran y ponlas en un lugar aparte de la mesa. Mientras haces esta operación mira secretamente la segunda carta del mazo (contando por los dorsos) y recuérdala. Por ejemplo, puedes extender las cartas en las manos abiertamente durante una fracción de segundo mientras dices alguna frase. Ni que decir tiene que esta acción debe pasar inadvertida.

Haz que el espectador mezcle cada uno de los montones de 13 cartas que hay en la mesa, y mientras lo hace, di que la carta de hoy es ... (nombra la carta que has visto antes).

Pide al espectador que tome uno de los montones y vaya echando cartas sobre la mesa cara arriba a la vez que cuenta hacia atrás del 13 al 1; es decir, pone una carta en la mesa y dice "trece", pone otra encima y dice "doce", etc. Si el valor de alguna carta coincide con el número que se está cantando

(recordando que las figuras  $J$ ,  $Q$  y  $K$  valen 11, 12 y 13), es decir, si sale por ejemplo el 8 de tréboles mientras dice “ocho”, hazle parar en ese momento y retira las cartas que sobran (7 en este caso), colocándolas sobre el montón de descarte. Si no se produce ninguna coincidencia, haz mezclar otra vez el grupo de 13 cartas y repite el procedimiento. Estas operaciones se repiten con el segundo grupo de 13 cartas. Supongamos por ejemplo, que la carta que coincide con su número es ahora el 3 de corazones (se retirarían las 2 cartas restantes).

Hasta ahora tenemos en la mesa dos montoncitos de cartas cara arriba, uno con el 8 de tréboles en la parte superior y el otro con el 3 de corazones. También tenemos un montón de cartas cara abajo, donde hemos ido descartando las que sobran.

Pide al espectador que sume los valores de las dos cartas superiores, en nuestro ejemplo  $8 + 3 = 11$ , y que del montón grande cuente exactamente ese número de cartas. Antes de voltear la undécima carta, una pausa dramática, recuerda a la audiencia que, por ser hoy el día que es, tiene que ser la carta (nombra la carta vista) y no puede ser otra ... Ya solo queda dejar que el espectador muestre la carta y recoger la ovación de tu público.

**Explicación matemática:** Observemos que si nos hemos parado en las cartas  $n_1$  y  $n_2$ , nos sobran  $n_1 - 1$  y  $n_2 - 1$  cartas que hemos colocado en el montón de descarte. Recordemos que la carta que hemos visto estaba en la segunda posición. Por tanto ahora estará en la posición

$$2 + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2.$$

Las matemáticas que hay detrás de este truco son muy simples. Sin embargo, hay un detalle que puede resultar más interesante al lector. Se trata de calcular la probabilidad exacta de que, en el proceso de contar hacia atrás, al menos una carta coincida con su número.

Supongamos, para simplificar, que los valores numéricos de las 13 cartas son todos diferentes<sup>1</sup>. Estamos entonces ante un problema clásico, el “problema de los desbarajustes” (*derangements*, en inglés), que consiste en calcular la probabilidad de que, si tenemos  $n$  sobres y  $n$  cartas y metemos las cartas en los sobres al azar, no acertemos con ninguna de ellas (en términos más técnicos, la probabilidad de obtener una permutación de  $\{1, \dots, n\}$  que no fije elemento alguno). Es una de las aplicaciones clásicas del principio de inclusión/exclusión, y el resultado es que esa probabilidad viene dada por

$$\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

---

<sup>1</sup>¿Es éste el “peor” caso? Es decir, ¿cuándo será más probable que ocurran coincidencias, cuando todas las cartas son distintas o cuando hay cartas con valores numéricos repetidos? ¿Qué opina el lector?

Una probabilidad que, en cuanto  $n$  es grande, es prácticamente  $e^{-1}$ , lo que no deja de ser sorprendente<sup>2</sup>. En nuestro caso, buscamos la probabilidad de que no tengamos un desbarajuste, así que la probabilidad de que haya alguna coincidencia es muy cercana a  $1 - 1/e \approx 0.6321$ . No es un mal ejemplo para mostrar al alumno la “naturalidad” del número  $e$ .

♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣♥♠♦♣

TRUCO 2: <i>Vuelvo dos y corto</i>
------------------------------------

El siguiente juego es uno de los muchos que aprovechan la clasificación de las cartas en dos colores. Hay un momento en el que se requiere una cierta habilidad manual, pero el efecto es sorprendente.

**Efecto:** El mago toma un paquetito de cartas y explica que hay dos tipos de movimientos que se van a hacer en este juego:

1. Cortar y completar el corte.
2. Dar la vuelta a las dos cartas superiores y dejarlas encima del paquete.

Después de hacer estas operaciones unas cuantas veces, a modo de ejemplo, el mago le entrega el paquetito de cartas a un espectador, se gira de espaldas y le pide que continúe él mismo haciendo estos dos movimientos, tantas veces como quiera y en el orden que quiera, hasta que nadie pueda saber cuántas cartas están cara arriba y cuántas están cara abajo.

Cuando el espectador termina, el mago se pone de nuevo de cara al público, recoge el paquete de cartas sin mirarlo, y lo lleva debajo de la mesa o detrás de su espalda. A continuación anuncia que empleando el tacto va a ser capaz de averiguar cuántas cartas hay cara arriba.

En efecto, el mago dice un número, saca las cartas a la vista y cuenta las que están cara arriba, comprobándose que tenía razón. Pero es más, el mago hace notar que el espectador separó, sin saberlo, cara arriba las cartas de un color y cara abajo las del otro.

**Realización:** Antes de empezar el juego, toma un pequeño paquete de cartas en el que haya el mismo número de cartas rojas que de negras (por ejemplo 8 rojas y 8 negras), y colócalas de forma que los colores estén alternados (roja, negra, roja, negra, etc.). Toma el paquete de cartas cara abajo y comienza a hacer el juego como se explica en el efecto. Ten en cuenta que al hacer el movimiento de dar la vuelta a las dos cartas superiores, las dos han de volverse a la vez, como si fuesen una sola. De este modo se invierte el orden que tenían originalmente.

---

<sup>2</sup>Sobre todo, el hecho de que, a efectos prácticos, es una probabilidad independiente de  $n$ , algo que va en contra de la intuición, pues uno diría que cuanto mayor sea el número de sobres y cartas, más fácil será acertar alguno (¿o no?; sin haber hecho el cálculo, ¿qué habría dicho usted?).

Cuando tengas las cartas fuera de la vista, separa las cartas que se encuentran en los lugares impares de las que se encuentran en los lugares pares, haciendo dos paquetes; éste es el único paso que requiere cierta habilidad manual<sup>3</sup>. Después, dale la vuelta a uno de ellos y junta los dos. Di el número de cartas que hay cara arriba (8 en nuestro ejemplo), y termina mostrando las cartas como se describe en el efecto.

**Explicación matemática:** Este juego se basa en que los dos movimientos descritos, si bien cambian el orden original de las cartas, no alteran cierta estructura que describiremos a continuación.

Recordemos que al principio del juego las cartas están alternadas por colores. Es irrelevante si la primera es roja o negra, lo importante es que estén alternadas. Obsérvese que el hecho de cortar conserva esta estructura. De hecho, para comprender el funcionamiento del juego, podemos pensar que las cartas están dispuestas en círculo, de manera que la primera y la última son consecutivas. Además, las cartas pueden encontrarse en dos estados, cara arriba o cara abajo. Naturalmente, al principio están todas cara abajo.

Desde este punto de vista, el segundo movimiento consiste en intercambiar dos cartas consecutivas y al mismo tiempo cambiar su estado. De esta manera, cuando una carta pasa de posición par a impar (o viceversa) también tiene que cambiar de estado. Por esta razón, según sea par o impar la posición que ocupen, las cartas estarán clasificadas en dos grupos:

1. Rojas que están cara abajo y negras que están cara arriba.
2. Negras que están cara abajo y rojas que están cara arriba.

A lo largo de todo el proceso se mantiene esta clasificación de las cartas en dos grupos según su paridad. Cuando el mago, después de separar las cartas en dos montones, voltea uno de ellos, lo que hace es cambiar de estado todas las cartas de un grupo. Así, todas las cartas de un color estarán cara arriba y las del otro cara abajo.



TRUCO 3: *La mansión embrujada*

El siguiente truco lo ha realizado en televisión el conocido ilusionista David Copperfield. El famoso mago invitaba a los telespectadores a participar desde sus casas. Comprobaremos aquí que para realizarlo no se necesita ningún tipo de poder extrasensorial, sino que sólo se trata de la aplicación de un principio matemático.

<sup>3</sup>No tanta, en realidad: ten el mazo en la mano izquierda y pasa la primera carta a la mano derecha, entre el pulgar y el índice; la segunda, entre el índice y el dedo medio, la tercera, de nuevo entre el pulgar y el índice, etc.

**Efecto:** Un grupo de incautos espectadores se pierde en el bosque y se refugia en una mansión embrujada, donde las habitaciones aparecen y desaparecen. Después de una larga persecución, el mago, con sus malas artes, será capaz de atrapar a todos los espectadores en la misma habitación.

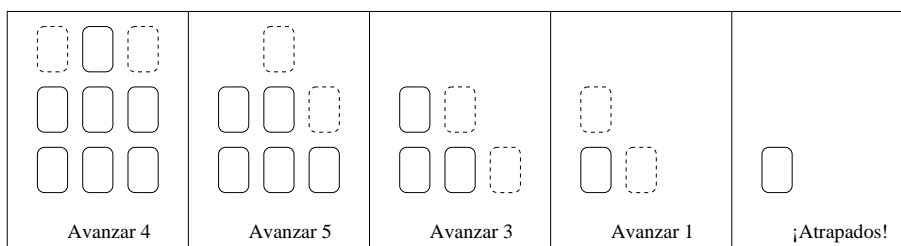
**Realización:** Coloca sobre la mesa nueve cartas cara abajo formando un cuadrado de  $3 \times 3$ . Explica que éstas son las habitaciones de la mansión, y que se puede pasar de una a otra a través de las puertas que hay en cada lado, es decir, se puede ir hacia arriba, abajo, derecha o izquierda, pero no en diagonal. A modo de ejemplo coloca una moneda u otro pequeño objeto sobre una de las cartas y muévelo siguiendo la regla. Di por ejemplo “avanzo tres lugares”, y mueve la moneda pasando de una carta a otra en horizontal o vertical tres veces (puedes hacer el recorrido que quieras, incluso retroceder sobre tus pasos, siempre que no avances en diagonal).

Una vez que el público ha comprendido el mecanismo, retira las cartas que ocupan las esquinas y la del centro, y pide a los espectadores que cada uno se sitúe mentalmente en una de las cuatro cartas que quedan. Explica que aquella noche aparecieron nuevas habitaciones y vuelve a colocar las cinco cartas que habías quitado.

Realiza la siguiente secuencia de acciones (véase la figura):

- Pide a los espectadores que se muevan 4 lugares, y retira las dos cartas de las esquinas superiores.
- Pide a los espectadores que se muevan 5 lugares, y retira la carta que queda en la primera fila y la tercera carta de la segunda fila.
- Pide a los espectadores que se muevan 3 lugares, y retira la segunda carta de la segunda fila y la tercera de la tercera fila.
- Pide a los espectadores que se muevan 1 lugar, y retira la primera carta de la segunda fila y la segunda de la tercera fila.

Si los espectadores no se han equivocado al moverse, habrás conseguido atraparlos a todos en la misma habitación.



**Explicación matemática:** Como el lector ya habrá imaginado, este truco se basa en la paridad. El hecho de que se utilice un cuadrado de tamaño  $3 \times 3$

es irrelevante. Se podría emplear también un rectángulo de cualquier tamaño. En general, se puede disponer un conjunto de cartas sobre la mesa como si cada una de ellas estuviera sobre una casilla de un tablero de ajedrez. La única condición es que el conjunto de cartas sea “conexo”, esto es, debe cumplirse que, partiendo de cualquier carta, y haciendo movimientos en horizontal y vertical, sea posible llegar a cualquier otra carta. De este modo, las posiciones de las cartas se dividen en dos tipos, según la casilla correspondiente sea blanca o negra.

Para realizar el juego, tenemos que hacer que todos los espectadores estén al principio en posiciones de un mismo tipo. Por esta razón, se quitan 5 cartas (en general, todas las cartas del tipo contrario) antes de que los espectadores se sitúen mentalmente en las habitaciones. De este modo, a lo largo de la persecución, va a ser posible saber en qué tipo de posiciones (casillas blancas o negras) se encuentran todos los espectadores.

En efecto, la clave está en que, si el número de movimientos es par, estarán en posiciones del mismo tipo que antes, mientras que si el número de movimientos es impar, cambian de tipo de casilla. De esta forma, podemos retirar cartas de posiciones del tipo contrario a donde se encuentran los espectadores. Por ejemplo, si están en casillas blancas y les pedimos que se muevan 5 lugares, ahora ocuparán casillas negras, y podremos quitar cartas de casillas blancas.

Evidentemente, la secuencia de movimientos descrita en la realización es solamente una de tantas posibles. Lo único que hay que tener en cuenta es que cada vez que quitemos habitaciones, el conjunto de cartas que queda debe seguir siendo “conexo”, pues si en algún momento hubiera dos espectadores en “componentes” distintas, no sería posible atraparlos al final en la misma habitación.

**Variaciones:** En cada paso, no sólo podemos quitar habitaciones, sino que también podemos añadir alguna en cualquier posición. Otra cosa que podemos hacer es mover cartas, teniendo en cuenta que, si movemos una carta de la paridad contraria a donde está el espectador, se puede llevar a cualquier posición, pero si movemos una carta en la que es posible que se encuentre el espectador, tendremos que llevarla a una posición de la misma paridad.

Estos movimientos, además de dar variedad al juego, también pueden servir para evitar que el conjunto de habitaciones deje de ser “conexo”. Así, si “desconectamos” la mansión por error, añadimos cartas para que vuelva a ser “conexa”.

Un punto débil de este juego es que el espectador puede darse cuenta de que al principio se le obliga a situarse en cartas de un determinado tipo (blancas o negras). Una forma de ocultar esto es empezar con las cartas colocadas en una posición más compacta (en nuestro ejemplo, un cuadrado de tamaño  $2 \times 2$ ) y una vez situados los espectadores, mover estas cartas de manera que todas estén en posiciones de la misma paridad, a la vez que se añaden nuevas habitaciones.





TRUCO 4: *El principio de Kruskal*

La primera vez que oímos hablar de este juego fue en Finlandia, durante un curso de verano de matemáticas. En uno de los descansos estuvimos haciendo trucos de magia (de los que no son automáticos, sino que requieren cierta habilidad manual). Uno de los chicos que estaba allí quiso participar y realizó entonces el juego del que vamos a hablar en esta sección. Al terminar, Steffen Rohde, que era uno de los matemáticos presentes, exclamó:

“¡Esto no es magia, es un lema!”

Por esta razón, durante mucho tiempo estuvimos refiriéndonos a este juego entre nosotros como “el lema”. Al documentarnos para escribir este artículo, descubrimos que este truco es bien conocido entre los magos y se basa en el llamado *principio de Kruskal*<sup>4</sup>.

**Efecto:** Cada espectador elige un número al azar entre el 1 y el 10. Partiendo de este número y con ayuda de una baraja recién mezclada, se realizan unas sencillas operaciones. Al final, independientemente del número elegido, todos los espectadores llegarán al mismo resultado.

**Realización:** Explica a tus espectadores que vas a realizar un experimento con la baraja y que ellos tienen que repetirlo después. En primer lugar, eliges un número al azar, por ejemplo el tres. A continuación vas echando cartas sobre la mesa cara arriba a la vez que cuentas: “uno, dos, tres”. Al colocar la tercera carta sobre la mesa te fijas en su valor; digamos que es un cinco. Sigues echando cartas sobre la mesa contando: “uno, dos, tres, cuatro, cinco”. Te fijas en el valor de la quinta carta y comienzas otra vez a contar mientras pones cartas sobre la mesa. Procede de este modo, echando cartas y contando, hasta agotar la baraja. Haz notar a los espectadores el número que le ha correspondido a la última carta de la baraja, y explica que si hubieras empezado con otro número, a la última carta le habría correspondido otro número distinto (cosa que es falsa, como luego se verá).

Una vez que ha quedado claro el procedimiento, da a mezclar libremente la baraja y pide a tus espectadores que cada uno de ellos piense en un número entre el 1 y el 10. Comienza a echar cartas sobre la mesa una a una mientras los espectadores van haciendo mentalmente la misma operación que tú hiciste antes, partiendo del número que haya elegido cada uno. Al terminar, todos los espectadores (o al menos la mayoría) habrán llegado al mismo resultado.

**Explicación matemática:** Si el lector intenta explicar por sí mismo por qué funciona este juego, posiblemente llegue a la conclusión de que, en realidad, este juego no funciona siempre, ¡y tiene razón! Se basa en un principio probabilístico.

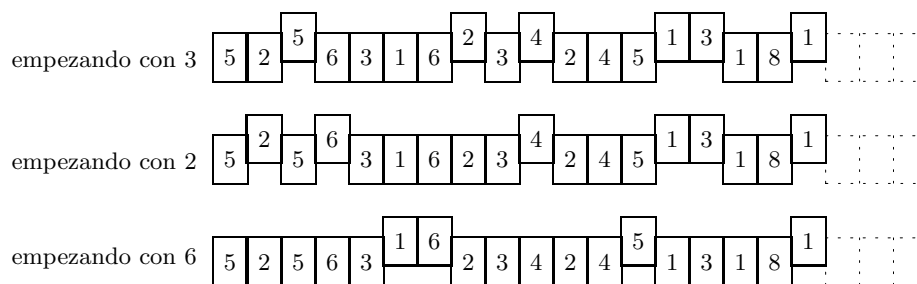
---

<sup>4</sup>En honor del matemático Martin D. Kruskal.

A modo de ejemplo, supongamos que la sucesión de cartas es

5	2	5	6	3	1	6	2	3	4	2	4	5	1	3	1	8	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

La siguiente figura recoge el resultado del proceso, para esta ordenación de la baraja, cuando elegimos para comenzar los números 3, 2 y 6 (destacamos las cartas que inician cada nuevo recuento):



En los tres casos, unas veces antes que otras, la serie de cartas destacadas acaba coincidiendo. Esta es, por supuesto, la clave: si en algún momento dos series de éstas coinciden, entonces todas las cartas posteriores también coinciden. Se podría decir que cada carta de la serie depende de la carta anterior, pero no de su historia. Calcular la probabilidad exacta de que siempre se llegue al mismo resultado sería excesivo para estas páginas<sup>5</sup>. Pero es fácil convencerse de que la probabilidad debe ser cercana a 1 si hay un número suficientemente grande de cartas, ya que basta una sola coincidencia entre las dos series.

Para que el juego funcione mejor, conviene asignar a las figuras, en lugar de su valor habitual,  $J = 11$ ,  $Q = 12$ ,  $K = 13$ , un valor bajo; por ejemplo, 1. De esta forma, el número de cartas que componen la serie es mucho mayor y por tanto, la probabilidad de que alguna carta coincida (y en consecuencia todas las demás) es mucho más alta<sup>6</sup>.

De cualquier manera, es posible que exista algún número inicial para el que la serie correspondiente sea completamente disjunta con las demás. Por tanto, se corre el riesgo de que alguien elija este número y falle. Sin embargo, de existir

<sup>5</sup>Un modelo probabilístico, basado en cadenas de Markov, se puede encontrar en [LRV].

<sup>6</sup>En el artículo citado anteriormente, [LRV], se realiza un estudio numérico, mediante simulación Montecarlo, de la influencia que sobre el éxito del juego tienen dos factores: por un lado, la asignación de valor a las figuras y, por otro, el número con el que empieza el mago. El primer factor es, con mucho, el más importante. Aunque en el artículo sólo se consideran los casos de asignar, o bien valores 11, 12 y 13 a las figuras, o bien 10 para todas, o bien 5, una extrapolación de esos resultados a la asignación que nosotros sugerimos, 1 para todas las figuras, nos permite hacernos una idea de la altísima probabilidad de éxito que tiene el juego. El otro factor, el número con el que empieza la cuenta el mago, es mucho menos relevante, aunque los cálculos sugieren que elegir 1 como primer salto es lo más apropiado.

algún número “malo”, lo más probable es que sea elegido por relativamente pocos espectadores y que todos los demás coincidan al final.



TRUCO 5: *La quinta carta*

Desde el punto de vista pedagógico, el siguiente juego<sup>7</sup> es una pequeña joya, porque ilustra una buena cantidad de conceptos matemáticos: teoría de la información, permutaciones, principio del palomar, aritmética modular, etc. Requiere un poco de entrenamiento, tanto del mago como del ayudante, para su realización.

**Efecto:** El mago se presenta con un ayudante. Un espectador elige cinco cartas sin que las vea el mago. El ayudante le entrega cuatro de las cinco cartas al ilusionista, quien, tras unos instantes de concentración, adivina la carta que falta.

**Explicación:** Como el lector habrá sospechado, el truco consiste en que, con las cuatro cartas, el ayudante codifica la información necesaria para adivinar la quinta carta. Teniendo en cuenta el orden de las cuatro cartas, se pueden codificar  $4! = 24$  mensajes. Y, sin embargo, el número de cartas posibles es  $52 - 4 = 48$ ; parece que es imprescindible enviar un *bit* de información adicional. Lo sorprendente de este juego es que el orden en que se entregan las cuatro cartas es suficiente. Para que no se sospeche que el ayudante le hace alguna señal al mago, se puede realizar de manera que lo único que hace el ayudante es señalar al espectador qué cartas debe ir entregándole al mago. Invitamos al lector a que, antes de seguir leyendo, intente encontrar por sí mismo un método para codificar la quinta carta.

En este juego, la responsabilidad del ayudante no es sólo ordenar las cartas que el mago va a ver, sino también elegir cuál es la carta que hay que adivinar. Aquí radica la información que faltaba en nuestro análisis anterior. Para empezar, notemos que si de una baraja tomamos cinco cartas, al menos dos tienen que coincidir en palo, por el principio del palomar; la carta que adivinaremos será una de estas dos. Como en cada palo hay 13 cartas, la distancia entre ellas será siempre un número  $m$  menor o igual que 6. Aquí estamos utilizando un “orden” circular (después del 13 va el 1); por ejemplo, la distancia entre el 10 y el 2 es  $m = 5$ .

Utilizando las permutaciones posibles de las tres cartas que quedan ( $3! = 6$ ), vamos a codificar el número  $m$ , que está entre 1 y 6. La cuarta carta será la “menor” de las dos del mismo palo, de forma que si le sumamos  $m$ , obtenemos la carta que hay que adivinar.

Vamos a explicar una forma de codificar un número entre 1 y 6 con tres cartas. En primer lugar hay que establecer un orden para la baraja. Lo natural

<sup>7</sup>Que se debe a William Fitch Cheney Jr. (ver [Kl]).

es emplear el valor numérico de cada carta. En caso de que dos cartas tengan el mismo número, establecemos un orden arbitrario para los palos. Aquí emplearemos el orden picas—corazones—tréboles—diamantes (para recordarlo, un truco mnemotécnico: Pi-Co-Tu-Da). Este procedimiento establece un orden para nuestras tres cartas. A continuación asignamos un número a cada permutación posible de estas tres cartas, de acuerdo con la siguiente tabla:

permutación	$m$
1 2 3	<b>1</b>
1 3 2	<b>2</b>
2 1 3	<b>3</b>
2 3 1	<b>4</b>
3 1 2	<b>5</b>
3 2 1	<b>6</b>

**Ejemplo 1:** El espectador elige las cartas:  $4\heartsuit$ ,  $J\diamondsuit$ ,  $K\heartsuit$ ,  $6\heartsuit$  y  $7\spadesuit$ . Como hay tres cartas del mismo palo, tenemos libertad para elegir las dos que hagan los cálculos más sencillos. En este caso, el ayudante elige el  $4\heartsuit$  y el  $6\heartsuit$ ; esta última carta es la que, finalmente, el mago adivinará. Así que le pasaremos, como cuarta carta, el  $4\heartsuit$ . Si a esas alturas hemos conseguido informar al mago de la distancia  $m = 2$ , podrá terminar el juego.

Para codificar  $m = 2$  tenemos que construir la permutación (1, 3, 2). Así que, de las otras tres cartas, pasamos primero la menor, el  $7\spadesuit$ , luego la mayor,  $K\heartsuit$ , y finalmente la intermedia,  $J\diamondsuit$ .

**Ejemplo 2:** Un poco más complicado<sup>8</sup>: el espectador elige las cartas  $5\heartsuit$ ,  $5\diamondsuit$ ,  $2\clubsuit$ ,  $J\clubsuit$  y  $J\spadesuit$ . De las dos cartas del mismo palo, la “primera” es la  $J\clubsuit$  (la que pasaremos en cuarto lugar) y la “segunda” es el  $2\clubsuit$  (la que adivinará el mago). De esta forma la distancia entre ellas es  $m = 4$ . El orden “natural” de las otras tres cartas es  $5\heartsuit$ ,  $5\diamondsuit$ ,  $J\spadesuit$  (recuérdese que corazones va antes que diamantes). Para describir la permutación correspondiente a  $m = 4$ , (2, 3, 1), entregamos, sucesivamente,  $5\diamondsuit$ ,  $J\spadesuit$  y  $5\heartsuit$ .

$\heartsuit\spadesuit\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit\diamondsuit$

TRUCO 6: <i>El principio de Gilbreath</i>
---

Éste es un principio matemático que tiene muchas aplicaciones<sup>9</sup>. Sus efectos sorprenden aunque, como veremos, su explicación es muy sencilla. Empecemos con un juego muy simple.

---

<sup>8</sup>Por supuesto, en este juego la ley de Murphy también es aplicable: cuando se realiza este truco, siempre salen combinaciones tan difíciles como ésta.

<sup>9</sup>Los ilusionistas lo conocen con este nombre en recuerdo de Norman Gilbreath, matemático y mago aficionado, quien lo descubrió en 1958.

**Efecto:** Un espectador forma dos montones de cartas y seguidamente los mezcla. El mago coge la baraja mezclada y se la lleva detrás de la espalda. Utilizando tan sólo su tacto, es capaz de encontrar dos cartas de diferente color, tantas veces como se le pida.

**Realización:** Este juego se puede hacer con una baraja completa o con un pequeño paquete que tenga el mismo número de cartas rojas que de negras. Antes de comenzar, y en secreto, ordena las cartas de la baraja para que queden los colores alternados (roja, negra, roja, negra, etc.). Entrega la baraja a un espectador y pídele que vaya echando cartas cara abajo, una a una, sobre la mesa, y que se pare cuando lo desee, procurando que los dos montones que se obtienen sean aproximadamente iguales.

Mezcla los dos paquetes por imbricación, o mejor aún, pide que los mezcle el mismo espectador si sabe hacerlo. Lleva la baraja detrás de la espalda o debajo de la mesa, de modo que ni tú ni los espectadores podáis verla. Explica que con el tacto eres capaz de distinguir los colores y que, para demostrarlo, vas a sacar cada vez una carta roja y otra negra. Simulando un gran esfuerzo de concentración, ve sacando parejas de cartas de la parte superior de la baraja.

Se puede presentar el juego de otra manera: se explica al principio que las cartas negras son policías y las rojas son asesinos (el rojo, claro, representa la sangre). Se procede como en la explicación anterior, y después de la mezcla, se deja la baraja sobre la mesa y se van volteando las cartas de dos en dos, observando que cada policía atrapó a un asesino.

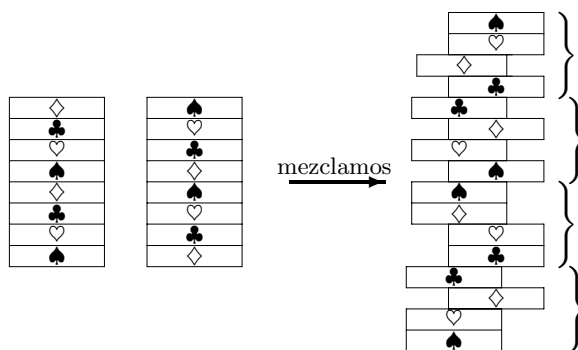
**Explicación:** Cuando el espectador forma los dos mazos, las últimas cartas de cada mazo son de diferente color; lo mismo ocurre con las penúltimas, las antepenúltimas ... los dos mazos tienen la secuencia de rojas y negras invertidas. Fijémonos en la carta que primero cae sobre la mesa al mezclar: digamos que es roja y del primer montón (el mismo argumento sirve para las otras posibilidades). La siguiente carta en caer, o bien es la negra penúltima del primer montón, o bien la negra última del segundo montón. Así que con seguridad tendremos un par roja-negra. ¿Y luego? Si, por ejemplo, ha caído la negra del segundo montón, las cartas que ahora ocupan el fondo de los montones son, de nuevo, de distinto color. Lo mismo ocurre si ha caído la negra del primer montón. Estamos en la situación inicial, y podemos repetir el razonamiento.

En realidad, el argumento es más general, y no sólo funciona con la secuencia roja-negra. Clasifiquemos las cartas en  $n$  tipos (por ejemplo,  $n = 2$  para rojas y negras,  $n = 4$  para palos, etc.). Denotemos por  $C_i$  a cualquier carta de tipo  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Tomamos un paquete en el que haya el mismo número de cartas de cada tipo y las disponemos en dos montones: en uno de ellos colocamos las cartas en secuencias ordenadas  $C_1, C_2, \dots, C_n, C_1, C_2, \dots$ , y en el otro hacemos lo mismo pero en orden inverso:  $C_n, C_{n-1}, \dots, C_1, C_n, C_{n-1}, \dots$ . A continuación hacemos una mezcla por imbricación de ambos paquetes. Esta mezcla no necesita ser perfecta. Si ahora dividimos la baraja en grupitos de  $n$

cartas consecutivas, cada uno de estos pequeños paquetes estará formado por una carta de cada tipo (no necesariamente ordenadas).

En el proceso de imbricación, se van mezclando cartas de cada uno de los dos paquetes. Fijémonos en las  $n$  primeras cartas que quedan imbricadas. Habrá un número  $m$  de cartas que provienen del primer montón. Estas cartas serán de los tipos  $C_1, C_2, \dots, C_m$ . El resto, que serán  $n - m$ , proviene del segundo montón, y dado que el orden de los dos paquetes era inverso el uno respecto del otro, estas cartas serán de los tipos  $C_n, C_{n-1}, \dots, C_{n-(n-m-1)}$ . Vemos así que en estas primeras  $n$  cartas hay una de cada tipo. Si eliminamos estas primeras  $n$  cartas, podemos hacer un análisis similar con las  $n$  cartas siguientes. Debemos tener en cuenta, no obstante, que ahora las secuencias no tendrán el orden natural  $C_1, \dots, C_n$ , sino  $C_{m+1}, \dots, C_n, C_1, \dots, C_m$  y su correspondiente inverso.

La siguiente figura describe una posible mezcla para  $n = 4$  (clasificación por palos). No hacemos explícito el valor de cada carta, sólo el palo al que pertenece:



El siguiente juego es una aplicación directa de la versión general del principio de Gilbreath. Obsérvese cómo, si bien para nosotros es un juego similar al de los policías y los asesinos, a los ojos del espectador parece completamente distinto.

**Efecto:** El mago escribe una predicción en un trozo de papel y se lo entrega a un espectador para que lo guarde. Se toman dos barajas y se mezclan entre sí por imbricación. El mago forma cuatro montoncitos con las cartas que han quedado arriba. Los espectadores eligen uno de ellos y suman los valores de las cartas. Cuando se desvela la predicción del mago se comprueba que es un número que coincide con la suma.

**Realización:** Antes de empezar, elige una secuencia de, digamos, cinco números entre el 1 y el 13. Por ejemplo, 2, 4, 5, 7 y 10. La suma de estos números será la predicción, en nuestro caso,  $2 + 4 + 5 + 7 + 10 = 28$ . Toma una de las barajas y saca de ella todas las cartas cuyos valores correspondan con los números elegidos. Forma con ellas cuatro secuencias en orden ascendente y colócalas sobre el resto de las cartas. Haz lo mismo con la otra baraja, pero esta vez ordena las cartas en orden descendente, (10, 7, 5, 4, 2).

Procede como en el efecto, y una vez mezclada la baraja, haz cuatro montoncitos de cinco cartas cada uno. No importa qué montoncito elija el espectador, porque la suma de los valores de las cartas de cada uno de ellos será siempre el mismo (en nuestro caso, 28).

Observa que si la mezcla ha sido muy regular, puedes formar más de cuatro montoncitos, pero nunca más de ocho. El hacer sólo cuatro es para garantizar que, por muy irregular que sea la mezcla, el juego funcione.

Con las modificaciones evidentes, también se puede hacer este juego con una única baraja. En este caso sólo se colocan dos secuencias sobre cada mitad de la baraja, y después de la mezcla sólo se hacen dos montoncitos.

### 3. CON SIETE BASTA

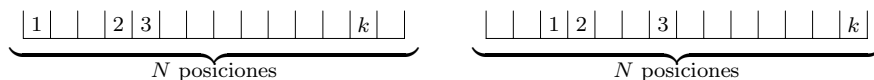
El título de esta sección no alude a ninguna (ya añeja) serie televisiva, sino a un hecho que todo mago conoce bien: a saber, que para desordenar una baraja, siete mezclas consecutivas son suficientes.

Vamos a construir un modelo probabilístico que se ajuste al proceso que seguimos en una mezcla por imbricación (veáse la ilustración al principio del artículo; en la terminología inglesa, un *riffle-shuffle*). Este proceso consta de un corte previo, y luego una mezcla de los dos montones resultantes. Primero contaremos cuántas reordenaciones de la baraja se consiguen con este procedimiento, y luego asignaremos probabilidades.

Numeramos las posiciones de las  $N$  cartas en el mazo original con  $1, \dots, N$ . Primero cortamos el mazo a una cierta altura, digamos  $k$ . Obtenemos así dos montones: el primero, con las cartas de las posiciones 1 a  $k$ , y el segundo, que incluye las cartas de  $k + 1$  a  $N$ . Vamos a permitir que  $k$  pueda tomar cualquier valor entre 0 y  $N$  (los extremos supondrán que no se hace corte alguno); en total, hay  $N + 1$  cortes posibles.

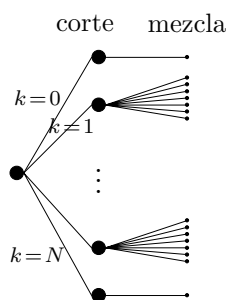
Fijada la altura  $k$ , ¿cuántas posibles mezclas hay? Desde luego, si  $k = 0$  o  $k = N$ , sólo uno, pues no hay montones que mezclar. En todo caso, fijémonos en que, al mezclar, se mantiene el orden relativo de los dos mazos; esto es, la carta 1 nunca aparecerá detrás de la 2, o de la  $k$ ; y de igual manera, la carta  $N$  no puede aparecer, por ejemplo, delante de la  $k + 1$ .

Contemos de cuántas maneras se pueden entrelazar las cartas: la disposición final del mazo es una lista de  $N$  posiciones (leer de izquierda a derecha la lista es como leer de arriba a abajo las cartas del mazo). Las dos listas siguientes son dos posibles resultados de la mezcla:



Nótese que las  $k$  cartas del primer montón mantienen el orden relativo. El resto de la lista se completa automáticamente: esas posiciones las ocupan los

símbolos  $(k + 1, \dots, N)$  (en este orden). Así que, después de todo, un entremezclado no es más que elegir  $k$  posiciones de entre las  $N$  posibles. Hay, por tanto,  $\binom{N}{k}$  mezclas posibles (para  $k$  prefijado).



El árbol que dibujamos a la izquierda describe todo el proceso: el primer vértice, la raíz, representa al mazo en el orden original. Los vértices de la generación siguiente representan al mazo después de cortar (cada rama corresponde a un corte a altura  $k$ ). De cada uno de estos vértices salen un cierto número de ramas: para cada  $k$ , exactamente  $\binom{N}{k}$ . Los vértices finales, las hojas del árbol, representan las posibles ordenaciones del mazo que obtenemos con este procedimiento; pero, para asegurarnos de que estamos contando correctamente, tendremos todavía

que comprobar que no haya hojas que representen a la misma reordenación.

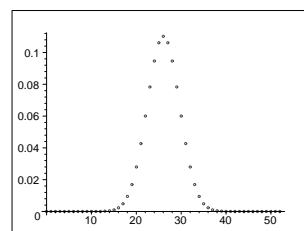
En realidad, sólo hay una permutación a la que se puede llegar de distintas maneras: curiosamente, la permutación identidad, aquella que deja el mazo tal como estaba. Desde luego, si  $k = 0$  ó  $k = N$ , el mazo queda tal como estaba. Pero incluso cortando a altura  $k$ , con  $1 \leq k \leq N - 1$ , podemos volver a la ordenación inicial: los montones son  $(1, \dots, k)$  y  $(k+1, \dots, N)$ , y los mezclamos de manera que primero vayan las cartas del primer montón, y luego las del segundo (una manera algo torpe de mezclar, por cierto).

Como señalábamos, éste es el único caso en que podemos llegar a la misma ordenación siguiendo dos procesos distintos (esto requiere un pequeño argumento, que dejamos como ejercicio para el lector), así que ya tenemos toda la información: un sencillo cálculo nos dice que, tras una mezcla por imbricación, podemos obtener  $2^N - N$  reordenaciones distintas del mazo original.

Vamos a asignar probabilidades, con un modelo que intenta replicar el proceso físico que seguimos al mezclar las cartas<sup>10</sup>. En primer lugar, es razonable considerar que los cortes “más o menos por la mitad” sean los más probables: proponemos, entonces, asignar al corte a altura  $k$  una probabilidad

$$\frac{1}{2^N} \binom{N}{k}.$$

El aspecto de una tal distribución binomial es el que aparece en la figura de la derecha (para el caso  $N = 52$ ): hay probabilidad no nula de realizar cualquier corte (aunque, para  $N = 52$ , esta probabilidad es del orden de  $10^{-15}$ ), y lo más probable es cortar por la mitad.



<sup>10</sup>Un modelo sugerido por Gilbert y Shannon en 1955 e, independientemente, por Reeds en 1981.



Ahora vamos con la asignación de probabilidades para la mezcla: por supuesto, si  $k = 0$  ó  $k = N$ , no hay nada que discutir, así que pongámonos en el caso de un corte a altura  $k$  general. Estamos, pues, en un cierto vértice de la segunda generación en el árbol que dibujábamos antes: salen  $\binom{N}{k}$  ramas, y hay que asignar probabilidades a cada una de ellas. Una opción posible es asignar una distribución uniforme: esto es, la probabilidad de cada una de las  $\binom{N}{k}$  ramas es, simplemente,  $1/\binom{N}{k}$ . Como cortar a altura  $k$  tenía probabilidad  $2^{-N} \binom{N}{k}$ , resulta que todas las posibles reordenaciones (salvo la identidad) tienen la misma probabilidad,  $1/2^N$ .

Esta asignación no es tan arbitraria como podría parecer, como muestra el siguiente argumento. Empezamos con dos montones de  $k$  y  $N - k$  cartas, e interpretamos la mezcla de la siguiente manera: sacamos, una a una, cartas del fondo de cualquiera de los dos montones, y las vamos situando en el mazo final. Si en un paso de este proceso, digamos el paso  $i$ , hay  $k_i^{(1)}$  y  $k_i^{(2)}$  cartas en cada uno de los montones, proponemos que las probabilidades de extraer la siguiente carta del primer y segundo montón sean

$$\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(1)} + k_i^{(2)}} \quad \text{y} \quad \frac{k_i^{(2)}}{k_i^{(1)} + k_i^{(2)}}, \quad \text{respectivamente.}$$

Esto es, probabilidades proporcionales al tamaño de cada montón.

Curiosamente, este proceso termina asignando una probabilidad uniforme a cada uno de los  $\binom{N}{k}$  resultados posibles. Supongamos que hemos obtenido una cierta mezcla siguiendo este procedimiento. La probabilidad de haber obtenido este resultado particular es el producto

$$\prod_{i=1}^N \frac{k_i^{(*)}}{k_i^{(1)} + k_i^{(2)}},$$

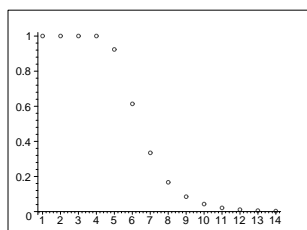
donde  $k_i^{(*)}$  será, para cada  $i$ , quizás  $k_i^{(1)}$  o quizás  $k_i^{(2)}$ . Sea cual sea el orden de extracción de las cartas seguido, lo cierto es que, cuando el contador  $i$  aumenta en una unidad, el denominador disminuye en otra (hay una carta menos). El primer denominador es  $k + (N - k) = N$ , así que el producto de los denominadores es  $N!$ . Para los numeradores ocurre otro tanto: no sabemos en qué orden sucede, pero las  $k$  cartas del primer montón y las  $N - k$  cartas del segundo van pasando al mazo final. Así que en el numerador aparecen todos los números de  $k$  a 1, y de  $N - k$  a 1. En total, el numerador vale  $k!(N - k)!$ ; y la probabilidad de cada resultado particular es  $1/\binom{N}{k}$ .

Ya hemos completado la descripción del modelo: en una mezcla por imbricación se pueden producir  $2^N - N$  reordenaciones distintas: la identidad tiene probabilidad  $(N + 1)/2^N$ , mientras que las demás tienen, cada una de ellas, probabilidad  $1/2^N$ .

Vamos entonces con lo que nos interesa: ¿qué ocurre cuando realizamos, sucesivamente, varias mezclas por imbricación? Con la primera mezcla apenas generamos  $2^N$  de las  $N!$  posibles permutaciones. Tras la segunda, incluso suponiendo que no se repitan ordenaciones, obtendríamos no más de  $2^{2N}$ . Un cálculo con el ordenador, o el uso de la estimación de Stirling, nos permiten convencernos de que, para  $N = 52$ , y en el mejor de los casos, cuatro mezclas sucesivas apenas podrían generar 1 de cada 10000 permutaciones. Desde luego, nunca diríamos que la baraja queda suficientemente mezclada.

Claro que, ¿qué quiere decir “suficientemente mezclada”? Difícil cuestión, sin duda. Aquí daremos una posible medida, sobre cuya validez el lector podrá reflexionar<sup>11</sup>. Estamos en  $S_N$ , el conjunto de las permutaciones de  $N$  objetos. Si hacemos  $s$  mezclas por imbricación sucesivas, el resultado es una cierta permutación; llamemos entonces  $p_s(\pi)$  a la probabilidad de que las  $s$  mezclas produzcan la permutación  $\pi \in S_N$ . Lo que haremos será comparar esta distribución de probabilidad con la uniforme,  $u(\pi) = 1/N!$ , para cada  $\pi \in S_N$ , mediante la siguiente cantidad:

$$\delta_s = \frac{1}{2} \sum_{\pi \in S_N} \left| p_s(\pi) - \frac{1}{N!} \right|.$$



El factor  $1/2$  es sólo para normalizar, de forma que nos quede un número entre 0 (si, y sólo si,  $p_s$  es la uniforme) y 1. Aunque aquí no daremos los detalles<sup>12</sup>, se puede calcular explícitamente  $p_s$  y, con ayuda del ordenador, obtener el valor de nuestra medida  $\delta_s$  para los sucesivos valores de  $s$ . La gráfica de la izquierda muestra los valores de  $\delta_s$  para los primeros 14 valores de  $s$  en el caso de una baraja con  $N = 52$  cartas. Desde luego, en el valor  $s = 7$  es la primera vez que  $\delta_s$  está por debajo de 0.5. Uno podría decidir que seis, o quizás ocho, es el número de mezclas adecuado. Pero lo que nos muestra esta gráfica es que, en torno a las 6–8 mezclas se produce un salto enorme, lo que se llama un fenómeno de *cut-off*<sup>13</sup>.

<sup>11</sup>Es la llamada “variación total”, un concepto bien conocido en Probabilidad. En [TT] se sugiere otra aproximación al problema, en términos de Teoría de la Información. Esencialmente, estudian cómo la “información” contenida en la ordenación inicial de la baraja va “desapareciendo” conforme vamos haciendo sucesivas mezclas.

<sup>12</sup>El lector podrá consultarlos, por ejemplo, en [DB].

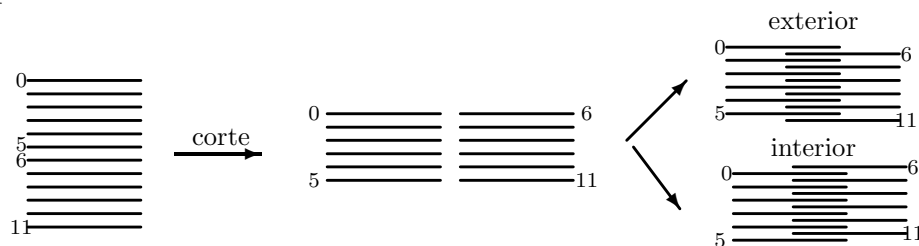
<sup>13</sup>Con la aproximación en términos de Teoría de la Información de [TT], este fenómeno no aparece. La información va desapareciendo desde la primera mezcla y, en torno a la sexta mezcla, se ha perdido casi completamente. Incluso cuatro o cinco bastarían, desde este punto de vista, para desordenar la baraja.

#### 4. LA MEZCLA FARO PERFECTA

En esta sección final nos asomaremos a las matemáticas de las llamadas *mezclas perfectas* o *mezclas faro*. El nombre procede de un antiguo juego de cartas que se llamaba precisamente *faro*, cuya finalidad era emparejar las cartas. Cada vez que se jugaba una nueva mano, se hacía una mezcla de este tipo, pues era necesario deshacer todas las parejas que se habían formado en la partida anterior.

La mezcla perfecta consiste en cortar (exactamente) por la mitad, y luego entrelazar las cartas de manera que las cartas de uno y otro mazo vayan alternándose. Como ya advertimos en su momento, hacer una mezcla de éstas con una baraja completa es extremadamente difícil<sup>14</sup>. El lector podrá intentar-la con un número reducido de cartas, haciendo la imbricación “manualmente”.

En realidad hay diversos tipos de mezclas perfectas, dependiendo del número de cartas de que conste la baraja. Empecemos por el caso de un número par de cartas,  $N$ , que, para los cálculos que haremos a continuación, conviene etiquetar como  $0, 1, \dots, N - 1$ : cortamos por la mitad y luego tenemos dos opciones, o bien mezclar de manera que la carta de la posición 0 quede arriba (será una mezcla **exterior**), o bien de forma que quede en la segunda posición del mazo final (mezcla **interior**). En el dibujo aparecen las dos posibilidades, para un mazo con  $N = 12$  cartas:



Si  $N$  es impar, al cortar se forman dos mazos desiguales y, en la mezcla, haremos que el mazo grande englobe siempre al pequeño. De nuevo distinguimos la mezcla exterior (la carta 0 queda en la posición superior) y la mezcla interior (la 0 va a la segunda posición). El dibujo recoge el caso de un mazo con  $N = 11$  cartas:



Tenemos cuatro casos posibles, pero en cualquiera de ellos, estamos reordenando el mazo original, haciendo una permutación del orden inicial. Si lla-

<sup>14</sup>Aunque uno de los autores de esta nota, que para eso es mago, es capaz de ello. En la página <http://www.uam.es/pablo.fernandez> pondremos próximamente un vídeo con una demostración práctica.

mamos  $E(k)$  (respectivamente,  $I(k)$ ) a la posición a la que va la carta  $k$  en una mezcla exterior (interior), es fácil comprobar que

$$E(k) \equiv 2k \begin{cases} \text{mód } (N-1) & \text{para } N \text{ par y } 0 \leq k < N-1, \\ \text{mód } (N) & \text{para } N \text{ impar;} \end{cases}$$

(y además  $E(N-1) = N-1$  si  $N$  es par), mientras que

$$I(k) \equiv 2k+1 \begin{cases} \text{mód } (N+1) & \text{para } N \text{ par,} \\ \text{mód } (N) & \text{para } N \text{ impar.} \end{cases}$$

Ya podemos presentar un juego basado en mezclas perfectas. Para realizarlo se requiere bastante habilidad manual. Lo incluimos sólo para ilustrar las posibilidades mágicas que tiene la mezcla *faro*.

TRUCO 7: *El principio de Penélope*

Este principio dice lo siguiente:

Si retiro  $n$  cartas de la parte inferior de una baraja, entonces, al hacer una *faro* (exterior si  $n$  es par, o interior si  $n$  es impar), la carta que ocupaba la posición vigésimosesta pasa a ocupar la posición  $n$ -ésima.

Las posiciones a las que nos referimos aquí son las naturales, cuando etiquetamos las posiciones en la baraja de 1 a 52. Evidentemente, el número 26 no desempeña ningún papel especial: si la baraja tuviera  $N$  cartas (con  $N$  par), sería la carta de la posición  $N/2$  la que habría que considerar. Por supuesto, el número  $n$  de cartas que retiramos debe ser menor o igual que  $N/2$ . El gran mago inglés Alex Elmsley ha publicado gran cantidad de juegos basados en este principio (ver [Mi]).

La explicación de esta propiedad no es del todo evidente a primera vista. Para poder utilizar las fórmulas que hemos escrito anteriormente, numeremos las posiciones de las  $N$  cartas de 0 a  $N-1$ . Lo que tenemos que comprobar, en esta numeración, es que la carta de la posición  $N/2-1$  pasa a la posición  $n-1$ . Tras retirar las  $n$  cartas del fondo de la baraja, nos quedan  $N-n$  cartas, cuyas posiciones van etiquetadas por  $0, 1, \dots, N-1-n$ .

Si  $n$  es par, la *faro* exterior con las  $N-n$  cartas nos lleva la que nos interesa, la de la posición  $N/2-1$ , a

$$\begin{aligned} E\left(\frac{N}{2}-1\right) &\equiv 2\left(\frac{N}{2}-1\right) &\equiv N-2 && \text{mód } (N-n-1) \\ &&\equiv N-n-1+n-1 && \text{mód } (N-n-1) \\ &&\equiv n-1 && \text{mód } (N-n-1). \end{aligned}$$

Mientras que, si  $n$  es impar, una *faro* interior con  $N - n$  cartas hará que

$$\begin{aligned}
 I\left(\frac{N}{2} - 1\right) \equiv 2\left(\frac{N}{2} - 1\right) + 1 &\equiv N - 1 && \text{mód } (N - n) \\
 &\equiv N - n + n - 1 && \text{mód } (N - n) \\
 &\equiv n - 1 && \text{mód } (N - n).
 \end{aligned}$$

Una de las dificultades técnicas de la mezcla *faro* es cortar exactamente por la mitad. En este caso, la situación es más complicada, porque además deberemos “detectar”, al hacer el corte, si el número de cartas  $N - n$  es par o impar. Con el entrenamiento adecuado, esto es perfectamente posible.

El siguiente juego es una aplicación directa del principio de Penélope.

**Efecto:** El mago escribe en secreto el nombre de una carta en un trozo de papel. Un espectador toma un grupo de cartas de la parte inferior de la baraja y las cuenta mientras el mago se vuelve de espaldas. Una vez contadas las cartas (por ejemplo, ocho), se busca en el resto del paquete la carta que ocupa la posición octava. Esta carta coincide con la predicción del mago.

**Realización:** Antes de empezar, busca la carta de la posición 26 y recuérdala; esta será la carta de la predicción. Actúa según se describe en el efecto y aprovecha el momento en que te vuelves de espaldas para realizar la mezcla *faro*. El principio de Penélope hará el resto.



EL ORDEN DE UNA MEZCLA PERFECTA

Volvamos al estudio de las mezclas perfectas. Una de estas mezclas, sea cual sea, es una permutación de las  $N$  cartas y, como tal, tendrá un **orden** (si  $\sigma \in S_N$ , el orden de  $\sigma$ ,  $ord(\sigma)$ , es el menor entero  $t$  para el que  $\sigma^t = id$ ).

Hagamos, por ejemplo, la cuenta para  $N$  par,  $N = 2n$ , y la mezcla exterior  $E$ , que sabemos que mueve las cartas (excepto la última, que queda siempre fija) con la siguiente regla:  $E(k) \equiv 2k$  módulo  $(2n - 1)$ . Si aplicamos una segunda mezcla, tendremos  $E^2(k) \equiv 2^2k$  módulo  $(2n - 1)$ . Y así sucesivamente, de manera que el orden de la mezcla exterior será el menor entero  $t$  para el que

$$2^t k \equiv k \pmod{2n - 1}, \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq 2n - 1.$$

En otras palabras, el menor entero  $t$  para el que  $2^t \equiv 1$  módulo  $2n - 1$ .

Recordamos ahora el celebrado teorema de Euler: como  $2n - 1$  es impar (y, por tanto, primo con 2), sabemos que  $2^{\phi(2n-1)} \equiv 1$  módulo  $(2n - 1)$ , donde  $\phi$  es la función de Euler. Así que el orden de la mezcla exterior  $ord(E, 2n)$  dividirá, necesariamente, a  $\phi(2n - 1)$ . Si llegáramos a considerar valores muy grandes de  $N$ , tendríamos seguramente muchas dificultades para calcular este orden (recordemos que calcular  $\phi(2n - 1)$  requiere, esencialmente, factorizar

el número  $2n - 1$ ). Pero, por ejemplo, para una baraja completa con  $N = 52$  cartas,  $\phi(51) = 32$ , y resulta que  $\text{ord}(E, 52) = 8$  (nótese que 8 divide a 32).

Así que con 8 mezclas exteriores sucesivas de una baraja con 52 cartas volvemos al orden inicial del mazo (recordando una alusión televisiva que hacíamos antes, aquí “con ocho basta” para recuperar el orden inicial).

Y, en realidad, el caso de  $N$  par y mezclas exteriores es el único que necesitamos calcular. Porque, como ya habrá sospechado el lector, las diversas mezclas tienen mucho que ver unas con otras; por ejemplo, una mezcla exterior con  $2n$  cartas, si nos olvidamos de la última carta, es lo mismo que una exterior con  $2n - 1$  cartas. Con argumentos de este tipo (quitar o añadir cartas), no es difícil convencerse de que

$$\text{ord}(E, 2n) = \text{ord}(E, 2n - 1) = \text{ord}(I, 2n - 1) = \text{ord}(I, 2n - 2).$$

Esto basta, si es que tenemos  $\text{ord}(E, 2n)$  para cada valor de  $n$ , para obtener todos los órdenes de las mezclas perfectas, algunos de los cuales aparecen en la siguiente tabla:

$N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	51	52	...
$\text{ord}(E, N)$	1	2	2	4	4	3	3	6	6	10	...	8	8	...
$\text{ord}(I, N)$	2	2	4	4	3	3	6	6	10	10	...	8	52	...

Así que podemos reordenar una baraja de 52 cartas con 8 mezclas exteriores sucesivas, pero son necesarias 52 interiores para conseguir el mismo efecto. Ahí va un ejercicio: ¿cuántas mezclas exteriores —o interiores— son necesarias para “recolocar” una baraja española de 40 cartas? Una pista:  $\phi(39) = 24$  y  $\phi(41) = 40$ .

### ¿BASTA CON CORTAR Y BARAJAR?

Nos preguntamos ahora por el número de permutaciones que podemos generar con este tipo de mezclas perfectas. Desde luego, bien pocas, si consideramos sólo, por ejemplo, mezclas exteriores: ya hemos visto que ocho, si la baraja tiene  $N = 52$  cartas. Así que vamos a permitir otros movimientos de la baraja: o bien combinar mezclas exteriores e interiores, o bien añadir cortes.

Un **corte simple**  $C$  consiste en llevar la carta que está en la posición superior del mazo a la última posición. Lo que hacemos así es un reordenamiento cíclico de la baraja; en fórmula, y con el etiquetado habitual  $0, 1, \dots, N - 1$ ,

$$C(k) \equiv k - 1 \pmod{N}, \quad \text{para cada } k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Si lo que queremos es hacer un corte a altura  $j$  (es decir, llevar las  $j$  primeras cartas a las  $j$  últimas posiciones, manteniendo el orden entre ellas), no hay más que efectuar  $j$  cortes simples consecutivos, lo que llamaríamos  $C^j$ :

$$C^j(k) \equiv k - j \pmod{N}, \quad \text{para cada } k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

En 1961, Solomon Golomb (ver [Go]) resolvió (casi) completamente el problema. Por ejemplo, probó que, para  $N$  par, se podía generar cualquier permutación combinando cortes y mezclas exteriores (y lo mismo con cortes y mezclas interiores)<sup>15</sup>.

Sin embargo, en el caso en que  $N$  sea impar, con cortes y mezclas exteriores (o interiores), apenas podemos generar  $ord(E, N) \times N$  permutaciones. Para darnos cuenta de qué significa realmente esto, vayámonos al caso  $N = 52$ : con cortes y mezclas exteriores (o interiores) podemos generar las  $52! \approx 10^{68}$  permutaciones de 52 cartas. Sin embargo, si quitamos una carta y nos quedamos con una baraja de 51 cartas, apenas tendremos

$$ord(E, 51) \times 51 = 8 \times 51 = 408.$$

Golomb probó también que, si  $N$  es impar, la combinación de mezclas exteriores e interiores solo generaba un grupo de  $ord(E, N) \times N$  permutaciones.

Bien, el caso impar es “malo”, pero aún podríamos esperar que, para  $N$  par, la combinación de mezclas exteriores e interiores permitiera generar todo  $S_N$ . Pero no es así, como probaron, 22 años después, Diaconis, Graham y Kantor (ver [DGK]):

**Teorema (Diaconis, Graham y Kantor).** *Para un mazo de  $N = 2n$  cartas, las mezclas faro exteriores e interiores generan*

- *si  $n \equiv 0$  módulo 4, con  $n > 12$  (y  $n$  distinto de una potencia de 2),  $n!2^{n-2}$  permutaciones. En los otros casos,*
  - *Si  $n = 12$ ,  $12!2^{11}/7!$  permutaciones.*
  - *Si  $N = 2n$  es una potencia de 2,  $N = 2^k$ , se generan  $k2^k$  permutaciones.*
- *Si  $n \equiv 1$  módulo 4 (y  $n \geq 5$ ),  $n!2^{n-1}$  permutaciones.*
- *Si  $n \equiv 2$  módulo 4 (y  $n > 6$ ),  $n!2^n$  permutaciones. Mientras que*
  - *si  $n = 6$ , se generan  $6!2^6/3!$  permutaciones.*
- *Si  $n \equiv 3$  módulo 4,  $n!2^{n-1}$  permutaciones.*

Aquí solo hemos expuesto una versión parcial del resultado, porque los autores no sólo dan el orden de los distintos grupos generados, sino que también los identifican. Su lectura es toda una fiesta para el que guste de la Teoría de Grupos.

---

<sup>15</sup>Aunque nada se dice de cuál es la sucesión de cortes y mezclas necesaria para generar una permutación dada.

## BIBLIOGRAFÍA

Martin Gardner es un conocido divulgador de la Matemática recreativa, desde su clásica columna mensual “Juegos Matemáticos” en la revista *Investigación y Ciencia*. Entre los muchos libros que ha publicado, podemos destacar los siguientes:

[Ga1] M. GARDNER.: *¡Ajá! Paradojas que hacen pensar*. Labor, Barcelona, 1983.

[Ga2] M. GARDNER.: *Mathematics magic and mystery*. Dover, New York, 1956.

Los siguientes son libros de magia donde se desvelan trucos profesionales. Sólo se encuentran en tiendas especializadas:

[Ca] V. CANUTO.: *Cartomagia fundamental*. Icasa, Sevilla, 1993.

[Fu] K. FULVES.: *More self-working card tricks*. Dover, New York, 1983.

[Mi] S. MINCH.: *The collected works of Alex Elmsley*, vol. 2. L & L Pub., Tahoma, 1994.

[Ta] J. TAMARIZ.: *Sonata*. Frakson, Madrid, 1990.

La página web <http://www.ams.org/new-in-math/cover/mulcahy1.html> es también una buena fuente de información sobre diversos trucos con cartas. El libro

[Mo] S.B. MORRIS.: *Magic Tricks, Card Shuffling and Dynamic Computer Memories*. The Mathematical Association of America, 1998,

es una excelente referencia para todo lo relacionado con mezclas tipo Faro. El lector podrá encontrar allí, también, varios trucos de cartas, así como una sorprendente conexión de la mezcla de cartas con el diseño de memorias de ordenador.

Persi Diaconis tiene una carrera poco convencional: primero mago profesional, más tarde profesional de las Matemáticas (actualmente trabaja en el Departamento de Estadística de Stanford)<sup>16</sup>. Éstos son algunos de los trabajos que ha publicado sobre la mezcla de cartas (tanto sobre mezclas perfectas como sobre mezclas aleatorias):

[AD] D. ALDOUS, P. DIACONIS.: Shuffling cards and Stopping Times. *American Mathematical Monthly* **93** (1986), 333–348.

[DB] P. DIACONIS, D. BAYER.: Trailing the Dovetail Shuffle to its Lair. *The Annals of Applied Probability* **2** (1992), 294–313.

[DGK] P. DIACONIS, R.L. GRAHAM, W.M. KANTOR. The Mathematics of perfect shuffles. *Advances in Applied Mathematics* **4** (1983), 175–193.

Los detalles del modelo probabilístico que expusimos en la sección 3 se pueden encontrar también en las dos siguientes referencias:

[CL] L.N. COYLE, G.F. LAWLER.: *Lectures on Contemporary Probability*. American Mathematical Society, 1999.

---

<sup>16</sup>Diaconis viaja todos los años a España para asistir a un congreso sobre cartomagia muy especializado que organiza Juan Tamariz en El Escorial. Uno de los autores ha tenido el placer de verle actuar en la sede de la Sociedad Española de Ilusionismo.



- [GS] C.M. GRINSTEAD, J.L. SNELL.: *Introduction to Probability*. American Mathematical Society, 1997.

Otros artículos y referencias citados en esta nota son:

- [Go] S. GOLOMB.: Permutations by cutting and shuffling. *SIAM Review* **3** (1961), 293–297.
- [Kl] M. KLEBER.: The best card trick. *The Mathematical Intelligencer* **24** (winter 2002), no. 1, 9–12.
- [LRV] J.C. LAGARIAS, E. RAINS, R.J. VANDERBEL.: *The Kruskal count*. Se puede conseguir en <http://xxx.lanl.gov/math.PR/0110143>.
- [TT] L.N. TREFETHEN, L.M. TREFETHEN.: How many shuffles to randomize a deck of cards? *Proc. R. Soc. Lond. A* **456** (2000), 2561–2568.

Venancio Álvarez González  
Departamento de Análisis Matemático  
Universidad de Málaga  
Campus de Teatinos, s/n, 29071, Málaga  
Correo electrónico: [nancho@anamat.cie.uma.es](mailto:nancho@anamat.cie.uma.es)

Pablo Fernández Gallardo  
Departamento de Matemáticas  
Universidad Autónoma de Madrid  
Ciudad Universitaria de Cantoblanco, s/n, 28049, Madrid  
Correo electrónico: [pablo.fernandez@uam.es](mailto:pablo.fernandez@uam.es)

María Auxiliadora Márquez Fernández  
Departamento de Análisis Matemático  
Universidad de Málaga  
Campus de Teatinos, s/n, 29071, Málaga  
Correo electrónico: [marquez@anamat.cie.uma.es](mailto:marquez@anamat.cie.uma.es)