Gaudí y la Proporción

por

Rafael Pérez Gómez

... se puede echar mano de la Proporción
que es una de las principales cualidades de la Belleza.
A. Gaudí, Manuscrito de Reus, 10 de agosto de 1878

Introducción

Con este artículo es mi deseo contribuir al reconocimiento que la Comunidad Matemática debe al arquitecto catalán Antoni Gaudí Cornet, quien se definía diciendo que era uno de nosotros: *soy un geómetra, que quiere decir sintético.*

En el año en que se cumple el sesquicentenario de su nacimiento en Reus son muchos los análisis publicados sobre su legado arquitectónico. Profesionales de la Arquitectura, Ingeniería, Historiografía, etc., están aportando diferentes puntos de vista sobre sus contribuciones al mundo del Arte, sus innovadoras soluciones constructivas, su posicionamiento socio-político y religioso, etc. ¿Qué podemos añadir desde el mundo de las Matemáticas? Prácticamente nada que no puedan hacer las personas que pertenecen a los campos del conocimiento antes señalados, ya que saben que *las Matemáticas son demasiado importantes como para dejarlas sólo en manos de matemáticos y matemáticas*, y también se dedican a ellas. Mas esto no significa que no nos sintamos obligados a estar presentes con nuestras particulares formas de analizar la realidad. En las arquitecturas de Gaudí hay líneas y superficies que se oponen continuamente a los triedros trirrectángulos tan propios de la Arquitectura Minimalista hacia la que ha ido derivando, fundamentalmente, la del siglo XX. A la fuerza de la gravedad no le gustan los ángulos rectos, aunque en Matemáticas nos empeñemos en buscar sistemas de referencia ortogonales para simplificar la resolución de muchos problemas. Porque un edificio, una galería en un parque, una columna, ha de cumplir la norma más elemental en Arquitectura –¡sostenerse!–, Gaudí trabajó de modo "matemático" buscando elementos y recursos constructivos tendentes a tal fin. Encontró soluciones de equilibrio con el arco catenario -véanse sus famosas maquetas de funiculares- y de facilidad constructiva en las superficies regladas, aunque le faltó tecnología para llegar a soluciones de mínimos como podría haber hecho sustituyendo, por ejemplo, los hiperboloides de revolución -que son superficies apropiadas para recibir tanto fuerzas de compresión como de tracción al tener curvatura negativa (al igual que el resto de superficies regladas), por lo que son especialmente idóneas para su uso como bóvedas ya que disminuyen el número de puntos del sistema, ayudan a minimizar el peso y las dimensiones de las partes estructurales que cubren [To]- por catenoides y haberse adelantado así a la Arquitectura sometida sólo a tracción que empezara a desarrollar Frei Otto en el estadio olímpico de Munich. Mas no iré en este trabajo en la dirección que marca el estudio de las formas geométricas usadas por Gaudí, sino tras el análisis de la composición en sólo una de sus obras, El Capricho. Lógicamente, para evitar el riesgo de haber analizado "una casualidad", también presentaré análisis de elementos de otras edificaciones realizadas por él en los que se insiste en el uso de la proporción geométrica como elemento clave para lograr una armonía entre las partes. Este ejercicio de libre elección viene motivado por dos razones. La primera es intentar aportar un punto de vista aún no presente en el ya amplio panorama de publicaciones que durante el 2002 están viendo la luz, tanto en lo que se refiere a la obra arquitectónica en cuestión como al tipo de análisis en sí mismo. Lo ya publicado versa, en general, sobre obras de Gaudí realizadas en Barcelona y con la introducción de El Capricho deseo dejar constancia de su presencia fuera de dicha ciudad. Así mismo, parábolas y catenarias, hiperboloides y paraboloides hiperbólicos y maclas con distintas superficies han sido también objeto de estudio, existiendo un pequeño vacío en cuanto al estudio de la estética de sus edificios. La segunda razón, para mi más interesante, es poner de manifiesto cómo el sentimiento de belleza puede tener una componente que ha sido provocada desde el uso de ciertos números irracionales. La belleza puede ser compartida desde diferentes ópticas y una de ellas nos lleva, directamente, a estudiar la estructura profunda de cualquier obra de arte, en la que encontraremos proporciones y simetrías como constantes universales de expresión de las diferentes culturas correspondientes a pueblos de todos los tiempos. La proporción y la simetría son elementos clave para la búsqueda del equilibrio en el diseño. En este artículo me ocuparé sólo del uso que Gaudí hace de la proporción.

Antoni Gaudí Cornet (1852–1926)

El estudio de cualquier persona hay que contextualizarlo, aunque sea brevemente, para su mejor comprensión. Por tanto, dedicaré unas líneas con las que alcanzar tal pretensión. Antoni Gaudí nació en Reus, un 25 de junio de 1852, en el seno de una familia modesta. Tras una infancia con poca salud, comienza sus estudios en la Escuela de Arquitectura de Barcelona; se licencia como arquitecto en 1878. Al parecer no se interesaba demasiado por las clases en la Escuela, por lo que pasaba largas horas leyendo libros en la biblioteca. A juzgar por las fichas de tales lecturas, estaba tremendamente interesado por la arquitectura islámica, en general,

Figura 1: Gaudí

y por la Alhambra de Granada, en particular. Su corta, pero intensa, relación con el monumento granadino es la causa de mi acercamiento inicial a Gaudí. Como dato clave he de decir que cuando su primer mecenas, el Marqués de Comillas, le encarga el proyecto de las Misiones, una iglesia para la ciudad de Tánger, viaja con éste por Andalucía y en 1892 visita la Alhambra. En un congreso celebrado en San Sebastián en 1999, Claudi Alsina y yo aportamos este particular [A-PG] por lo que no voy a entrar aquí en detalles. Únicamente diré que la influencia de la Alhambra en Gaudí es grande y creo que su gran visión tridimensional hizo que determinadas composiciones planas alhambreñas se tornasen en elementos destacados de su arquitectura. Para ejemplificar lo que digo recordaré aspectos conocidos sobre las columnas de la Sagrada Familia. Están concebidas desde los sinos, o estrellas centrales, correspondientes a las llamadas lacerías de 4, 6, 8, 10 y 12 (2D) que son las bases de las columnas de idéntico nombre (3D) que mediante un sistema ingenioso, y nada trivial, de doble giro consigue que sus partes altas sean perfectas columnas dóricas [GS]. En particular, las columnas de 8 se sitúan sobre una malla cuadrada de lado 7.5 metros al modo en que aparecen en los sellos de Salomón en el zócalo de azulejos del patio de la Alberca en la Alhambra.

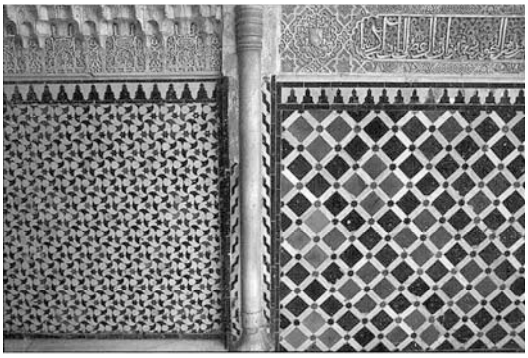

Figura 2: Sellos de Salomón en azulejos del patio de la Alberca. La Alhambra.

Examinando fotografías de la Alhambra, he observado que ... son palabras escritas por Gaudí en el Manuscrito de Reus (10 de agosto de 1878) con las que comienza a describir cómo son las columnas, los fustes y capiteles del monumento nazarí. Como botón de muestra, con este ejemplo basta. ¿Por qué le llamaba la atención la arquitectura islámica? Llegados a este punto hay que decir que era objeto de su interés también la gótica, que en la península Ibérica se desarrollaba en paralelo a la arquitectura hispanomusulmana, fundamentalmente, de al-Andalus. Así lo manifiestan sus afirmaciones de que *el gótico es un arte de fórmula* y que su propósito era *mejorar tal estilo, dar al gótico una vida que no alcanzan sus juegos de compases*; y que, lógicamente, sentía la dificultad de su intento *porque vencer un solo hombre tres siglos constructivos es empresa titánica* [FC].

Y a medida que fue pasando el tiempo, se acercó cada vez más a lo que hoy podemos comprender que era su destino inevitable; unir, como nunca antes en la historia de la arquitectura, la **forma** *y la estructura de los espacios, para que éstos a su vez, en forma, color y textura, se aproximaran a la misma naturaleza.* (G.R. Collins, recogido por [T1]).

Esta reflexión es la clave de su interés por ambos estilos arquitectónicos. Forma, derivada del magistral uso de la luz en la arquitectura islámica que, penetrando por las celosías, se refleja en la cerámica de los zócalos o en las yeserías tanto de muros como de bóvedas de mozárabes, creando un ambiente en el que la arquitectura parece flotar en el espacio; y estructura, como elemento clave de la gótica. Gaudí estudió todos los estilos y órdenes arquitectónicos, criticándolos desde su obra con la sutileza de quien sólo habla para quienes pueden ver. Con el pórtico dórico del Parque Güell hace su crítica personal a la arquitectura griega clásica [T2], ya que es allí donde muestra que *en todo conjunto pétreo de pilares y dinteles, si la piedra no resiste a flexión (no admite tracciones), tienen que existir empujes horizontales y, como consecuencia de ello, las columnas no deben ser verticales, a excepción de las correspondientes a la zona central del conjunto, donde los empujes se equilibran (...).* Nada, pues, tienen de extrañas las palabras de Eugenio D'Ors en alusión a tal sala hipóstila, afirmando que Gaudí *deja al Partenón como una tentativa frustrada. Los estilos que utilizan el medio punto como tema fundamental -romano, románico, renacentista, etc.- no son racionales y tampoco son admitidos. El medio punto brilla por su ausencia en toda la obra de Gaudí. El arco constructivo no debe definirse por razones geométricas sino por razones estructurales, su directriz debe ser el funicular de las fuerzas que actúan* [T2].

En los proyectos de la primera etapa de Gaudí prima la arquitectura islámica sobre la gótica, invirtiéndose los términos a medida que va desarrollando la profesión. Así se pone de manifiesto, por ejemplo, en la casa Vicens (1883-1888) y en la casa Milá (1905-1910), conocida popularmente como La Pedrera, respectivamente. Y, por supuesto, en su última y gran obra, la Sagrada Familia (1883-1926), a la que dedicó todo su tiempo a partir de 1913. Sin embargo, nunca se apartó del estudio de la Naturaleza. *Y a medida que fue pasando el tiempo, se acercó cada vez más a lo que hoy podemos comprender que era su destino inevitable; unir, como nunca antes en la historia de la arquitectura, la forma y la estructura de los espacios, para que éstos a su vez, en forma, color y textura, se aproximaran a la misma Naturaleza.* (G.R. Collins, *opus cit.*). Son muchos quienes sostienen que Collins ha sido quien mejor ha definido a Gaudí con las palabras anteriores. Esa forma de analizar la Naturaleza para, primero, aprender de ella y, después, imitarla vuelve a ser un nexo con las Matemáticas. La palabra *Matemática* se deriva de la griega $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ que significa *conocimiento.* De género femenino, es una ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y de sus relaciones. También se utiliza en plural con el mismo significado que en singular. La palabra *Matemático\ca* se deriva de la griega $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\zeta$. Utilizada como adjetivo tiene el significado de *exacto,* *preciso* o, como dijera Gaudí, sintético. Con la palabra $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ se refirieron los griegos, desde el siglo VII al II a. C, a la herramienta creada desde su inteligencia con la que eran capaces de interpretar y, lógicamente, conocer y explicar el mundo en el que vivían y la Naturaleza que les rodeaba, de ahí la relación antes mencionada. El estudio de la Naturaleza se presenta como un objetivo común entre las Matemáticas de todos los tiempos y Gaudí.

Antoni Gaudí Cornet muere en Barcelona, el día 7 de junio de 1926, como consecuencia del atropello que sufrió por un tranvía tres días antes. Lo hace en la indigencia, pero en la seguridad de que había concebido un proyecto arquitectónico de tal magnitud que hoy está requiriendo para su ejecución del uso de sierras robotizadas, de impresoras de sólidos, de nuevos materiales constructivos, de organizaciones de obra vanguardistas ... y todo esto lo hace en una Barcelona en la que a comienzos de 1900 se publicaban anuncios en la prensa como el que decía:

> *En casa del presidente de la Sociedad de San Federico (Aribau, 30) se realizará en los días 16 y 17 de junio, de 8 a 12, el reparto de bonos a los pobres que acrediten llamarse Federico.* (Anuncio de prensa, junio de 1909)

En cambio, la situación social era complicada, abundando la pobreza y la explotación de las clases desfavorecidas. Las revueltas producidas en aquellos años son prueba de ello. No eran años "para la lírica". Quizá por eso Gaudí adoptase una actitud huraña y solitaria que le hacen aparecer como una persona extraña, aunque como dijo Norman Foster en el acto de presentación del 150 aniversario de su nacimiento, ante Su Majestad la Reina, *fue capaz de establecer un nuevo lenguaje espacial y lírico basado en la estructura.*

Números para la Arquitectura

La Arquitectura es un compendio de ciencia y arte. Es una manifestación cultural importantísima pocas veces relacionada con el saber del pueblo al que se debe. En el diseño de edificios y su decoración, en sentido amplio, junto al trazado urbanístico de las ciudades, hay un legado científico, del que las Matemáticas forman parte, que ha perdurado hasta nuestros días. Formas y números aparecen unidos, de modo indisociable, en todos los estilos arquitectónicos con la pretensión de crear belleza. Así, y a modo de ejemplo, referiré que desde que se está utilizando Geometría Fractal en el diseño arquitectónico, números tan poco usados, incluso por nosotros, como los hipercomplejos han hecho acto de presencia en la Arquitectura. Sin embargo, a lo largo de la Historia, ha sido la Geometría Euclídea quien ha marcado las líneas maestras en cualquier proyecto de edificación. El uso de esta geometría implica algo esencial: que los números se puedan "dibujar", o construir con regla y compás para que pueda ser la medida de un segmento o el cociente entre las medidas de dos de ellos en caso de hablar de proporción. ¿Qué números son construíbles con regla y compás? La respuesta la da el teorema de Wantzell que afirma que un número real es construible si y sólo si es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ y el polinomio de grado mínimo, con coeficiente líder 1, que tiene al número como raíz, tiene como grado una potencia de 2. Por tanto, los números trascendentes no son útiles en Arquitectura en cuanto a diseño se refiere. Así, aparecen segmentos y relaciones entre ellos que se expresan mediante números irracionales en monumentos como la pirámide de Keops, el Partenón, las termas de Caracalla, Santa María del Naranco (por acercarnos al prerrománico asturiano), la Alhambra, etc., proyectados y construidos en culturas que no sólo no habían desarrollado este conocimiento matemático sino que estaban muy lejos de alcanzarlo. El paradigma de lo que acabo de decir está en la escuela pitagórica. Los seguidores de Pitágoras utilizaban un pentágono estrellado -llamado **pentagrama**- para identificarse unos con otros y compartir sus conocimientos. Lo asociaban como símbolo de la salud. La palabra *número* significaba *número entero positivo* y un cociente entre números, a/b, era la razón entre a y b, o número de veces que cabe la longitud b en la longitud a, pero no era concebido como una fracción.

Habían establecido que cualquier longitud podía medirse a partir de una unidad de medida con números enteros o fraccionarios y no siempre sucede así. Es más, no tenían más que analizar su logotipo, el pentagrama, para darse cuenta de que si un segmento, x, -que tomamos como unidad de medida- cupiese un número determinado de veces en la diagonal del pentágono regular, d, y también otro número de veces en su lado, l, podría tomarse tan pequeño que también divida a la diagonal y al lado del pentágono regular determinado en su interior por sus diagonales. Este proceso podría repetirse infinitas veces, obteniendo pentágonos tan pequeños como se quiera tales que la unidad de medida elegida al principio cabría un número determinado de veces tanto en la diagonal como en el lado. Como esto es imposible, no puede haber una unidad de medida que quepa un número de veces en la diagonal y otro en el lado; es decir, el cociente entre la longitud de la diagonal y la del lado de un pentágono regular no puede ser un número entero ni fraccionario. Al pitagórico Hipaso de Metaponto (s. V a.C.) se le atribuye el descubrimiento de las razones inconmensurables, hecho por el que fue lanzado por la borda de un barco por tambalear los principios de la filosofía pitagórica que sostenían que en el Universo todo podía reducirse a números enteros y sus razones, dando a la Historia el primer mártir de las Matemáticas. El libro X de los Elementos de Euclides está dedicado a la clasificación de los inconmensurables. Es curioso que en este proceso clasificatorio se retomara por Leonardo de Pisa, Fibonacci[1], en cuyo trabajo hay que destacar su observación acerca de que la

[1]Durante el periodo medieval europeo, el primer matemático no andalusí que merece mencionarse es Leonardo de Pisa (c. 1170-1250), conocido también por Fibonacci. Fue educado en África, viajó mucho por Europa y Asia Menor y fue famoso por sus conocimientos matemáticos. En 1202, escribió un libro titulado **Liber Abaci** que no era sino una traducción libre al latín de materiales escritos en árabe y griego. En él figura el conocido problema sobre la reproducción de unos conejos que consiste en suponer que una pareja de conejos de un

clasificación de Euclides no incluía todos los irracionales, que había algunos -como las raíces de la ecuación $x^3+2x^2+10x=20$- que no podían construirse con regla y compás. Pero para nuestra historia, al igual que para aquellos griegos, sólo serán interesantes los números que se puedan dibujar con las herramientas euclídeas ya que, como hemos dicho antes, éstos son los únicos números "construíbles" y, por tanto, válidos para la Arquitectura.

Es de todos conocido que la diagonal y el lado de un pentágono regular se relacionan entre si con un número irracional, el número de oro[2].

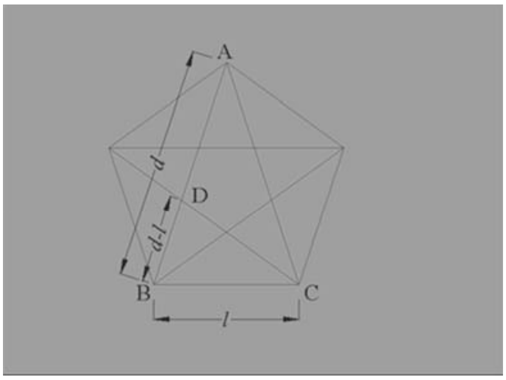

Figura 3: Imagen del Pentagrama.

Gaudí incluye en la casa Vicens esta figura para dar armonía a una de las fachadas.

Euclides, de quien se sabe con exactitud que vivió y enseñó en Alejandría hacia el 300 a.C., recogió en los libros II y VI de los *Elementos* los siguientes resultados relativos a la proporción áurea que ha sido usada desde antiguo:

mes de edad es demasiado joven para reproducirse; pero en su segundo mes de vida, y así todos los meses a partir de entonces, producen una nueva pareja. Si cada nueva pareja se comporta de igual forma y ninguno de los conejos muere, ¿cuántas parejas de conejos habrá cada nuevo mes?

Meses	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Parejas de conejos	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

[2](Vease figura Los triángulos ABC y BCD son semejantes luego sus lados homólogos son proporcionales: $\frac{d}{l}=\frac{l}{d-l}$; la proporción anterior puede escribirse también como $(\frac{d-l}{l})\frac{d}{l}=1$; o bien, $(\frac{d}{l}-1)\frac{d}{l}=1$; quitando el paréntesis y pasando todo al primer miembro, queda $(\frac{d}{l})^2-(\frac{d}{l})-1=0$; o más fácil, llamando x a $\frac{d}{l}$, $x^2-x-1=0$.

La raíz positiva de dicha ecuación es el número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que es el valor del cociente $\frac{d}{l}$.

Este número se conoce como **número de oro**; dos segmentos, como d y l, están en **proporción áurea** si el cociente del mayor entre el menor es igual al número de oro.

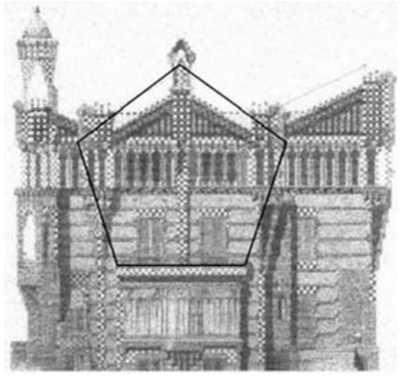

Figura 4: Fachada de la Casa Vicens y su relación con el pentágono regular.

Proposición II.11 Diuidir vna linea de manera que el rectángulo de toda ella y vna de fus partes fea ygual a aquel cuadrado q fe haze de la parte q refta (sacado de la traducción al castellano de *Los seis libros primeros de la Geometría de Euclídes* que hizo en 1576 Rodrigo Çamorano).

Nosotros lo diríamos así:

Proposición II.11 Cortar un segmento dado, de manera que el rectángulo cuyos lados son el segmento dado y uno de los segmentos resultantes de la división sea igual al cuadrado del otro segmento.

Como vemos, es el célebre problema de la división de una recta en razones extrema y media[3], o sección áurea, que, sin embargo, está definida en el libro

[3]Para dividir un segmento en media y extrema razón, se procede de la manera siguiente:

1º Construye un segmento cuya longitud sea igual a la mitad del que deseas dividir.

2º Coloca el segmento obtenido perpendicularmente al dado en uno de sus extremos.

3º Une los otros dos extremos. Habrás dibujado un triángulo rectángulo con un cateto el doble que el otro.

4º Haciendo centro en el vértice del ángulo agudo que forma el cateto menor con la hipotenusa, y tomando como radio la longitud de dicho cateto, traslada con un compás la longitud del cateto menor sobre la hipotenusa y marca el punto extremo que determina. De este modo, la hipotenusa queda dividida en dos segmentos; uno con longitud igual que la del cateto menor y otro con una longitud mayor.

5º Haciendo centro en el vértice del ángulo agudo que forma el cateto mayor con la hipotenusa, y tomando como radio la longitud del segmento mayor determinado sobre ella anteriormente, traslada con un compás la longitud de dicho segmento sobre el cateto mayor y marca el punto extremo que determina. Éste será el punto de división buscado.

VI -definición 3- que presenta la aplicación de la teorías del libro V que, a su vez, recoge la de Eudoxo sobre las proporciones.

Definición VI. 3 Dize fe fer diuidida una linea recta con razon extrema ymedia quando fuere quecomo fe ha toda a la mayor parte, affi la mayor a la menor. (*opus cit.*)

Definición VI. 3 Un segmento está dividido en extrema y media razón cuando el total es a la parte mayor como ésta a la menor.

Y en el mismo libro figura:

Proposición VI. 30 Diudir vna linea recta dada terminada co extrema y media razon.

También Gaudí hace uso de esta construcción en sus diseños. A modo de ejemplo, obsérvese cómo la división de la altura de la fachada principal del Palacio Güell según la sección áurea va definiendo la colocación de los diferentes elementos de la misma. Este palacio está considerado como su primera gran obra.

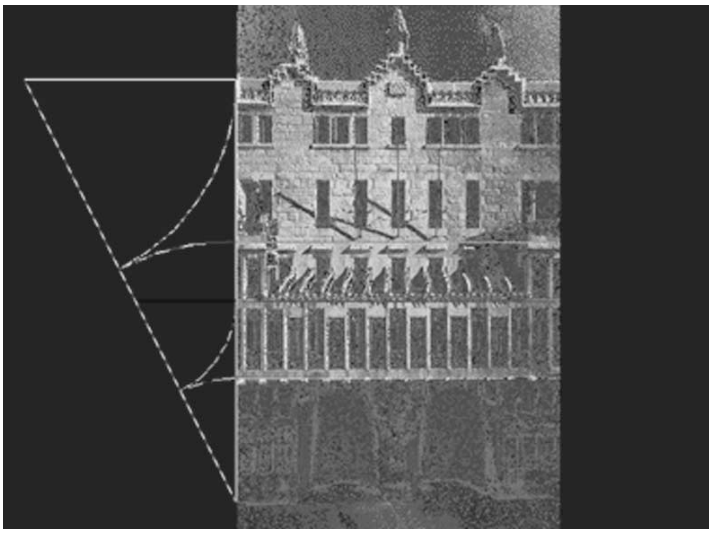

Figura 5: Fachada principal del Palacio Güell.

Los pitagóricos aplicaron los resultados obtenidos sobre las proporciones a campos como la Música, Escultura, Arquitectura ... en los que dicha teoría podía ser “vista u oída”. Incluso, como dije anteriormente, se explicaban la armonía del Universo desde la existencia de las mismas proporciones que habían encontrado para la Música al compararlas con las formadas a partir de las distancias entre los astros. Se referían a la belleza de la disposición de astros y estrellas en el firmamento con la conocida metáfora de la “música de las esferas”, metáfora que aún hoy sigue empleándose en el mundo del Arte. La proporción áurea es un invariante en el Arte.

Dando un gran salto en el tiempo, hay que indicar que el gran arquitecto del siglo XX ha sido Le Corbusier, el cual escribió en 1948 un tratado cuyo tema central era el análisis de las proporciones que se habían usado a lo largo de la Historia. Su aportación consistió en dar un canon de proporciones, basadas en la figura humana, con el que se ha dado paso a la Arquitectura actual. Creó su modulor, una persona cuya altura es de 182.9 cm y que presenta las partes clave de su anatomía en los puntos de división de su cuerpo según la sección áurea. A partir de ahí, determina dos series de números, la serie roja y la azul[4], a partir de un valor $d = 182.9$. Matemáticamente observamos que se trata de series geométricas de razón el número de oro y, por las propiedades de éste, tienen carácter de series de Fibonacci lo que le da un gran interés para el diseño al permitir su transformación en una malla gráfica de rectángulos que permiten ser dibujados unos a partir de los anteriores por simple yuxtaposición (suma de longitudes) de lados.

Es evidente que todas las personas no tienen la estatura igual a 182.9 cm. Sin embargo, si dividimos la altura total de nuestro cuerpo entre la distancia que hay desde nuestro ombligo al suelo, veremos que, independientemente de la persona medida, este cociente es siempre un número próximo a 1.6; es decir, el ombligo divide al cuerpo según la división áurea. Este hecho ha permitido el desarrollo de la arquitectura industrial, totalmente opuesta a la de Gaudí ya que plasmaba cada uno de los elementos de sus edificios de un modo que podemos decir era "totalmente artesanal" (solía hacer una maqueta en escayola de sus proyectos, incluyendo hasta los más mínimos detalles).

Proporciones basadas en los números metálicos

Es misterioso, pero no hay duda de que a la Naturaleza le gusta el número de oro y ciertos impares relacionados con él. Baste observar la serie numérica asociada al número de pétalos de las flores siguientes: tradescantia (3), geranio (5), cosmos (8), caléndula (13), aster (21), crisantemo $(34, 55, 89)$. Vemos que se corresponden con términos de la sucesión de Fibonacci de la cual podemos construir la serie de cocientes dividiendo cada término por su anterior: $1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, 89/55, 144/89, 233/144....$ Escrita en forma decimal,

$$
\begin{gathered}
1, 2, 1.5, 1.6, 1.625, 1.615384615384615384615384615384 61...,\\
1.619047619047619047619047619047 61...,1.617647058823529411764705882352 94...,\\
1.618181818181818181818181818181 81...,1.617977528089887640449438202247 19...,\\
1.618055555555555555555555555555 55...
\end{gathered}
$$

es evidente que tiende a estabilizarse, que converge hacia un número real positivo. ¿Cuál?

[4]Serie roja: $d, \Phi d, \Phi^2 d, \Phi^3 d, \phi^4 d, ...$ Serie azul: $2d, 2\Phi d, 2\Phi^2 d, 2\Phi^3 d, 2\Phi^4 d, ...$

La sucesión de Fibonacci puede escribirse mediante la ley de recurrencia $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$ por lo que la de cocientes sería $F(n+1)/F(n) = 1 + F(n-1)/F(n)$ y en caso de existir límite, $lim_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)}$, y llamándolo x, debería satisfacer la ecuación de segundo grado: $x = 1 + \frac{1}{x}$; equivalentemente, $x^2 - x - 1 = 0$ cuya raíz positiva es el número real $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

¿Existe realmente el límite? El teorema de Binet-D. Bernouilli[5] afirma que sí. La generalización, cuando procede, es un heurístico que solemos emplear los matemáticos. La serie de Fibonacci puede ser generalizada sin más que tomar dos números cualesquiera, a y b, y otros dos naturales, p y q, para definir la serie $a, b, pb + qa, p(pb + qa) + qb, ...$ de modo que se verifique: $G(n + 1) = pG(n) + qG(n - 1)$.

La generalización aludida nos lleva a afirmar el conocido resultado siguiente: Dada la serie numérica $a,\ b,\ pb + qa,\ p(pb + qa) + qb...$, tal que $G(n+1) = pG(n)+qG(n-1)$, con a y b cualesquiera y p y q naturales, existe y es único el número real positivo:

$$lim_{n\to\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)} = \sigma$$

[5]La demostración se basa en que $F(0) = F(1) = 1$ y, llamando $H(n) = F(n-1)$, podemos escribir el sistema:

$$F(n+1) = F(n) + H(n)$$

$$H(n+1) = F(n)$$

Escrito matricialmente:

$$\begin{pmatrix} F(n+1) \\ H(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(n) \\ H(n) \end{pmatrix}$$

Aplicando la recurrencia:

$$\begin{pmatrix} F(n+1) \\ H(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F(1) \\ H(1) \end{pmatrix}$$

Que no es más que:

$$\begin{pmatrix} F(n+1) \\ H(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es bien sabido que una de las aplicaciones de la diagonalización de matrices es el cálculo de la potencia n-ésima de una matriz cuadrada. Por tanto, calculando los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenemos $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Por tanto, la matriz diagonal será $A_d = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi' \end{pmatrix}$ y la matriz de cambio $P = \begin{pmatrix} \Phi & \Phi' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Aplicando que $A^n = PA_d^nP^{-1}$, se deduce que $F(n+1) = \frac{\Phi^{n+2} - \Phi'^{n+2}}{\Phi - \Phi'}$. Luego, finalmente, $lim_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} = \Phi$.

El número σ viene dado por la solución positiva de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, que es igual a

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Es decir:

$$lim_{n\to\infty}\frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

Para diferentes valores de p y q se obtiene una familia de números que se conocen como metálicos [WS]. Por ejemplo, si $p = q = 1$, se obtiene el número de oro; con $p = 2$ y $q = 1$, el de plata; para $p = 3$ y $q = 1$, el de bronce; etc.

¿Cómo han sido utilizados estos números en Arquitectura? Hasta ahora no tenemos conocimiento de la presencia de todos ellos en obras arquitectónicas. Por lo dicho anteriormente, es obvio que el número de oro ha sido el más utilizado. Pero también el de plata fue elemento clave para la arquitectura romana [K]. En cualquier caso, su presencia viene en forma de proporción. Unas veces como cociente de las longitudes de segmentos en los que ha quedado dividido otro y, otras, como cociente entre la longitud del lado mayor y la del lado menor de un rectángulo, se define como su proporción. Así pues, cuando se habla de un rectángulo áureo nos referimos a un rectángulo cuyo lado menor es la unidad y el mayor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Si nos referimos a uno de plata, su lado menor mide la unidad mientras que el mayor será $1 + \sqrt{2}$. Geométricamente pueden obtenerse rectángulos de igual proporción que uno dado utilizando el trazado de rectángulos recíprocos[6], internos y externos.

Componiendo los elementos de un edificio de modo que todas sus partes estén en armonía, se consigue un diseño equilibrado y que, ante nuestros ojos, es bello. Recordando las palabras de Gaudí con las que comenzaba este artículo:

> *También pueden ser Geométricos* (aludiendo a los motivos ornamentales usados para la Arquitectura) *en las formas de cuerpos,*

[6]Por ejemplo, a partir de un rectángulo áureo de vértices $ABCD$, escritos consecutivamente, puedes construir otros rectángulos que se conocen como rectángulos recíprocos internos del $ABCD$. Se construyen como sigue:

a) Traza, por ejemplo, la diagonal AC;

b) dibuja por B la perpendicular a AC;

c) esta perpendicular cortará en E al lado CD;

d) si construyes la perpendicular por E al lado AB, se determinará el punto F.

El rectángulo $FBCE$ es un rectángulo recíproco interno del $ABCD$.

Si eliges el vértice D para trazar la perpendicular a AC, obtendrás otro rectángulo recíproco. Análogamente, si desde el comienzo, optas por la otra diagonal, BC, puedes formar los rectángulos recíprocos internos correspondientes a los vértices A y C, respectivamente.

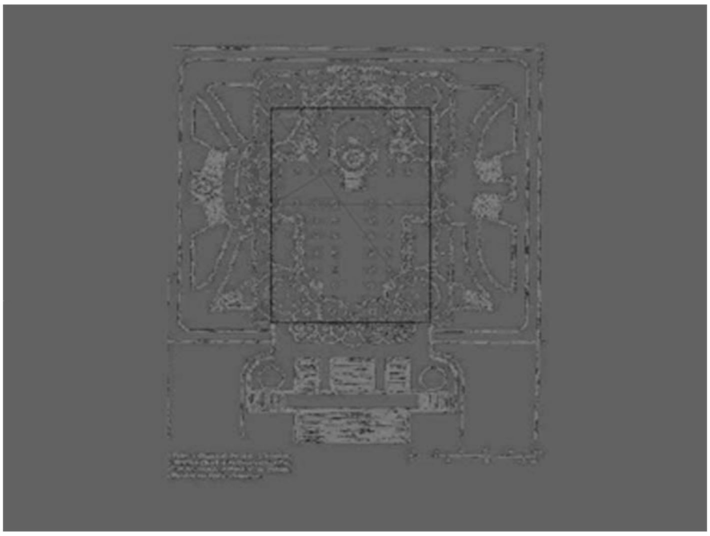

Figura 6: Planta de la Sagrada Familia. Están dibujados un rectángulo áureo y su recíproco interno. Obsérvese cómo delimitan partes del conjunto.

> *superficies, líneas y combinaciones de todos ellas y de cuyo contraste se puede echar mano para la Proporción que es una de las principales cualidades de Belleza.*

Combinando adecuadamente rectángulos se logra una estética concreta basada en sus proporciones. Estos rectángulos son los que determinan espacios del edificio como las fachadas, ventanas, puertas, habitaciones, etc., como mostraré claramente en el análisis de El Capricho.

Proporciones pitagóricas y cordobesa

No todos los rectángulos que se utilizan tiene proporciones basadas en números metálicos. En Arquitectura son muy frecuentes los llamados *rectángulos pitagóricos*, cuyas proporciones vienen dadas por los números irracionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{n}$, ...

Pero por ser un caso especialmente singular, y llevar un nombre español, cerraré esta breve introducción a la teoría de la proporción en la Arquitectura hablando un poco sobre la proporción cordobesa [H]. Se obtiene dividiendo el radio del octógono regular entre el radio de la circunferencia en la que está inscrito.

En este caso, el número es, aproximadamente, 1.3. Su valor exacto es $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

Esta proporción que se asocia a la arquitectura califal de Córdoba, se extendió a otros lugares como, por ejemplo, Toledo o Zaragoza en su arquitectura islámica.

El Capricho

Nos ocuparemos de la casa conocida como El Capricho, construida en Comillas (Santander). Fue proyectada en 1883, a la vez que comenzaba Gaudí su primera obra, la casa Vicens, y recibía el encargo de la última, la Sagrada Familia. El encargo se lo hizo Máximo Díaz Quijano, hombre rico y soltero cuya hermana se casó con un hermano del primer Marqués de Comillas, Antonio López y López. Se utilizaría como lugar de veraneo y esparcimiento.

No está claro el que Gaudí fuese a Comillas para estudiar el terreno sobre el que posteriormente edificaría El Capricho. El diseño se hizo a partir de una maqueta muy detallada elaborada por Gaudí en Barcelona y la obra la dirigió su compañero de carrera Cristóbal Cascante. El edificio combina y adapta formas hispanomusulmanas con otras neogóticas, haciendo gran uso del hierro en la decoración. El ladrillo visto, los azulejos y el hierro producen una ornamentación totalmente nueva para la época.

Destacan sobre manera los cinco huecos de la fachada principal, con ventanas de guillotina cuyos contrapesos son tubos metálicos que, al ser usados, reproducen notas musicales. Este hecho hace pensar en la posible inspiración de Gaudí en una composición musical para desarrollar el ritmo del diseño de la fachada, cosa que nada tiene que extrañar porque es bien conocido el que la gran obra de Brunelleschi[7], la catedral de Florencia, aplica la estructura musical de un motete compuesto por su amigo Dufay, en cuanto a proporciones entre tiempos se refiere, para diseñar la majestuosa cúpula que es considerada como joya de la Arquitectura.

Se trata de un edificio, con planta en forma de U, inscrito en un rectángulo de 15×16 metros. Tiene un semisótano, planta baja y desván. En el semisótano se encuentra la cocina, el lavadero, el garaje y las dependencias para el servicio. En la planta baja, el comedor, el salón y los dormitorios. Otros usos corresponden al desván. Ambas plantas se comunican mediante dos escaleras de caracol, o conoides rectos como decimos en Matemáticas. La entrada principal se identifica con una torre cilíndrica cuya parte inferior se transforma en un porche con cuatro columnas, mientras que la superior presenta un mirador con bancos que a la vez hacen de barandilla.

[7] **Brunelleschi, Filippo** (1377-1446), artista italiano, uno de los maestros fundamentales de la transición hacia el Renacimiento. Sus aportaciones, como la recuperación de los motivos clásicos y la capacidad para trasladar a sus obras las leyes matemáticas de la proporción y la perspectiva, le convirtieron en el primer arquitecto de la edad moderna.

Proporciones en el semisótano

Se trata de un espacio totalmente organizado con la estética de las proporciones áureas.

1. Si el segmento de la longitud total de la planta es dividido en media y extrema razón, nos encontramos con el pie del eje del conoide recto definido por la escalera principal de caracol. Si, por idéntico procedimiento, se siguen dividiendo los segmentos resultantes se da lugar, por un lado, a una línea de la fachada retranqueada y, por el otro, al comienzo de una ventana de las que hablamos anteriormente. De igual modo van apareciendo las restantes ventanas, las líneas que delimitan las habitaciones sobre las que se construyen los tabiques, el límite de los arcos de circunferencia que se dibujan con las hojas de las puertas al ser abiertas, etc.

2. Análogas consideraciones si se analiza la anchura máxima.

En suma, esta planta se articula mediante una red de rectángulos que son el resultado de dividir sucesivamente el largo y ancho del rectángulo en el que se inscribe.

El resultado final ofrece rectángulos de tres tipos: pitagóricos $\sqrt{2}$, de plata y áureos. Abundan más los del primer tipo, estando destinados a espacios destinados al servicio. La cocina, lugar más importante de la planta, está definida con el único rectángulo de plata existente. El garaje obedece al tipo de rectángulo áureo.

Proporciones en la planta baja

Aplicando nuevamente la división de un segmento en media y extrema razón se obtiene la distribución de esta planta principal. En esta ocasión elimina el rectángulo de plata y da entrada, para el comedor, al rectángulo cordobés. Al existir cuatro baños, los personaliza haciendo uno con plata áurea, dos pitagóricos , uno cuadrado y otro cordobés. Para los dormitorios usa tanto áureos como pitagóricos $\sqrt{2}$.

Proporciones del desván

En esta planta alta las proporciones son algo singulares. Se sale de la regla de división en media y extrema razón porque hay espacios que coinciden con otros existentes en las plantas inferiores pero con menor superficie para lo cual utiliza la técnica que aún faltaba por aparecer consistente en la determinación de los rectángulos recíprocos internos de modo recurrente. Así, pues, en una ocasión se divide un rectángulo en dos, mientras que en otra se unen dos.

Para la cubierta de las dos piezas retranqueadas utiliza rectángulos áureos.

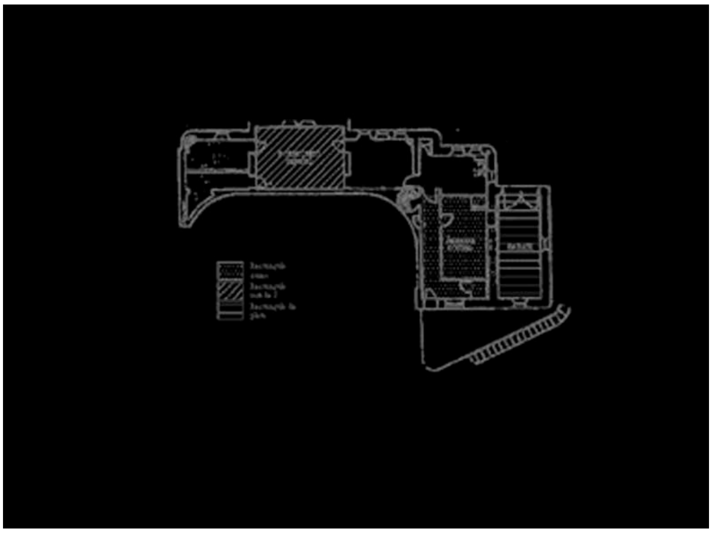

Figura 7: Análisis de las proporciones del Semisótano de El Capricho. Rectángulos áureos y de plata. Obsérvese la determinación del arranque de la escalera principal.

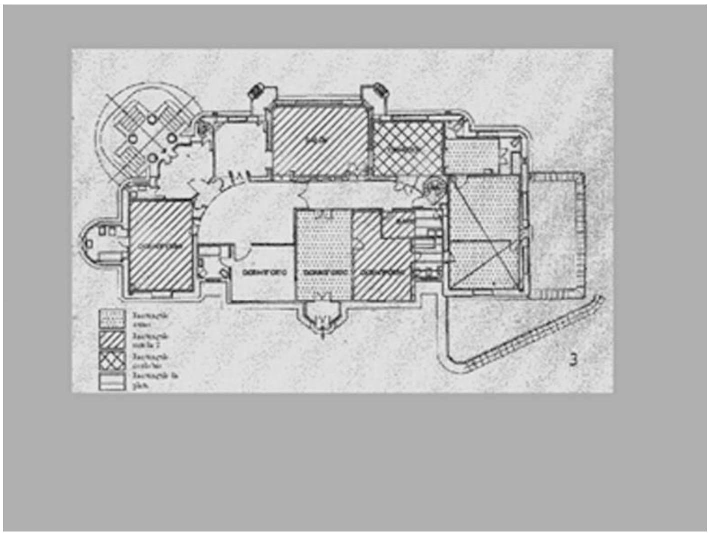

Figura 8: Análisis de las proporciones de la Planta Baja de El Capricho. Especial atención al rectángulo cordobés del comedor. Obsérvese la malla obtenida por divisiones sucesivas en media y extrema razón con la que se define la colocación de tabiques y ejes de puertas.

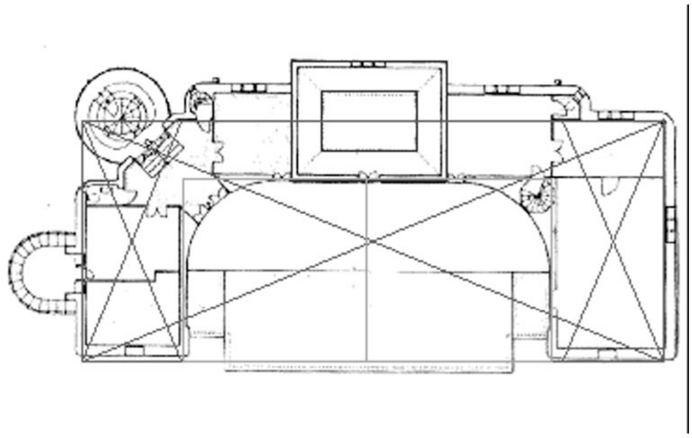

Figura 9: Imagen: Análisis de las proporciones del desván de El Capricho. Obsérvense los rectángulos recíprocos internos de proporción $\sqrt{2}$.

FACHADAS Y ELEMENTOS

Las rectángulos áureos, de plata y cordobés son los encargados de suministrar la estética exterior del edificio. En cuanto a los elementos de la fachada cabe destacar las ventanas, horizontales en la planta alta y verticales en la baja, que contienen rectángulos áureos que, a su vez, definen uno cordobés. Así mismo, los elementos que sostienen la cornisa definen un rectángulo de plata.

EL SOLAR

Al tener una forma alargada e indefinida es difícil pensar que racionalmente en la elección del lugar para el edificio. Mas no sucede así ya que tanto el edificio como las curvas están situadas en el lugar justo siguiendo la dinámica anterior según la media y extrema razón.

En resumen, el resultado es espléndido. Cada elemento ocupa un lugar y está concebido geométricamente dentro de un esquema de proporciones que da al conjunto una gran armonía y belleza que produce la sensación de una arquitectura a modo de escultura, quizá partitura musical o puede que de cuento de hadas. Esa sensación que ciertos números irracionales usados racionalmente producen en las personas y que no se aciertan a explicar pero que desde el análisis geométrico subyacente se pone al descubierto.

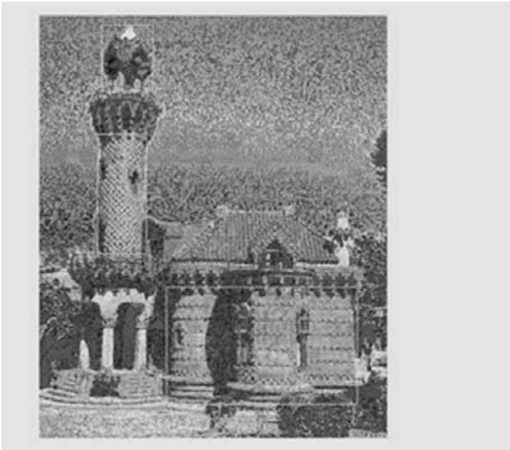

Figura 10: Análisis de las proporciones de diferentes elementos de la fachada de El Capricho.

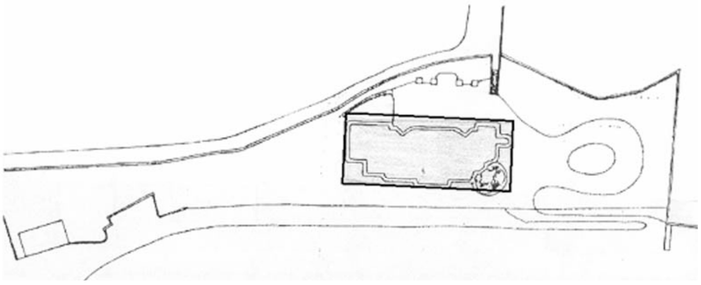

Figura 11: Análisis de las proporciones del Solar de El Capricho.

Referencias

[A-PG] C. Alsina y R. Pérez-Gómez, Gaudí and the Alhambra of Granada: A geometrical perspective. *ISSAMA 99*, Ed. UPV, San Sebastián 1999.

[BN] J. Bassegoda Nonell, *El gran Gaudí*, Ed. Ausa, Sabadell 1989.

[C] M^{A} Constantino, *Gaudí*, Ed. LIBSA, Madrid 1993

[C-C] E. Campuzano y L. Castillo, El Capricho de Gaudí en Comillas, *Revista de Santander* 63, 1991.

[FO] J.A. Fernández Ordóñez, Gaudí, un precursor, *Obras Públicas* 59, pgs. 4-5, Barcelona 2002.

[FC] C. Fernández Casado, Gaudí visto desde la arquitectura de un ingeniero, *Obras Públicas* 59, pgs. 6-15, Barcelona 2002.

[GS] J. Gómez Serrano et al., *La Sagrada Familia. De Gaudí al CAD.* Ed. UPC, Barcelona 1996.

[H] R. de la Hoz Arderius, La proporción cordobesa, *Actas de las VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales*, pgs. 67-84, Córdoba 1995.

[K] J. Kappraff, Musical proportions at the basis of systems of architectural proportion both ancient and modern. En Nexus - *Architecture and Mathematics.* Ed.: Kim Williams, 1996.

[T1] S. Tarragó i Cid, *Gaudí*, Ed. Escudo de Oro, Barcelona 1974.

[T2] S. Tarragó i Cid, La relación estructura y forma en Gaudí, *Obras Públicas* 59, pgs. 18-27, Barcelona 2002.

[To] J. Tomlow, *The spirit of calculation in the architectural work of Antoni Gaudí, Gaudí 2002.* Miscelánea. Ed. Instituto de Cultura de Barcelona, Barcelona 2002.

[WS] V.W. de Spinadel, The metallic means family and multifractal spectra, *Nonlinear Analysis* 36, pgs. 721-745, 1999.

Rafael Pérez Gómez
Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S. de Arquitectura
Universidad de Granada
correo electrónico: rperez@ugr.es