Programas informáticos en matemáticas

Sección a cargo de

Emilio Bujalance

Tecnología para el realismo en la enseñanza del Cálculo Integral

por

José Luis Llorens Fuster

El uso de programas de cálculo simbólico puede contribuir a cambiar los objetivos de aprendizaje. En particular, facilita que los ejemplos, los ejercicios y los problemas, puedan corresponderse a la realidad cotidiana. Ello implica también una profunda revisión en los contenidos, pues desaparecen muchas limitaciones que venían impuestas por las limitaciones en los cálculos.

Un poco de historia

Hace más de diez años que los programas de cálculo simbólico empezaron a incorporarse al quehacer cotidiano de la enseñanza de las matemáticas. Paulatinamente, el uso de asistentes matemáticos como **Derive** ha introducido en la Universidad, en el lenguaje habitual de los planes docentes, el concepto de **práctica**, de manera que ya nadie se sorprende si las asignaturas de matemáticas tienen créditos teóricos, prácticos y de *laboratorio*.

Al mismo tiempo, los ordenadores y las calculadoras se han abierto camino en la enseñanza secundaria, influyendo en algunos cambios en el *estilo* de las clases y de los mismos libros de texto. Así, no es raro encontrar referencias explícitas (cfr., por ejemplo, [1]), casi interactivas diríamos ahora, a esos programas de cálculo simbólico o a calculadoras gráficas avanzadas como la "$TI-92$", es decir, que disponen de capacidades **gráficas, numéricas y simbólicas**.

Esos tres aspectos que caracterizan a los programas de cálculo simbólico, tanto separados como combinados, son los que abren un abanico de posibilidades muy sugerente si queremos usar los recursos tecnológicos para facilitar la comprensión de los conceptos, para recurrir a ejemplos más reales, para no hacer concesiones innecesarias a las limitaciones impuestas por ciertos cálculos manuales. El tiempo ha pasado y, en estos años, se ha *demostrado* la eficacia del uso de esos programas en las tres direcciones apuntadas (cfr., [5, 2]).

Cuando a principios de los noventa empezábamos a usar **Derive**, nos admirábamos de su simplicidad. Un programa que, desde aquellas primeras versiones para "Ms-Dos" ofrecía una capacidad sorprendente y que cabía en un solo disco, de aquellos flexibles de "5 y 1/4", aunque ya entonces nos brindaba las mismas posibilidades que ya hemos apuntado. Las experiencias de entonces y los trabajos posteriores deben desembocar, en definitiva en **cambios importantes e imprescindibles** en la forma de enfocar las asignaturas de matemáticas, sobre todo cuando pensamos en sus fundamentos, en los últimos años de la enseñanza secundaria o en los primeros de la Universidad.

Porque a mayor simplicidad del recurso, a mayor difusión de los ordenadores personales, menos excusas pueden caber para ignorar la existencia de esas posibilidades. Renunciar, por ejemplo, a resolver *hasta el final* determinados ejercicios, no tiene sentido si los cálculos tediosos se confían a una máquina. Y, por lo mismo, no parece justificable que la preparación básica que reciben los estudiantes se centre sobre todo en *estrategias* de cálculo. Pero *límites, derivadas e integrales* son todavía sinónimos de los platos fuertes de muchos exámenes y no precisamente porque en ellos se pregunte acerca de esos **conceptos...**

¿A mano o a máquina? Un ejemplo real

No se quiere decir con esto que no haya que enseñar a los estudiantes a calcular *primitivas*, a obtener la *función derivada* o a resolver *indeterminaciones...* Pero la confusión es lo peor, porque de tanta "integral", de tanta "derivada" y de tanto "límite", lo que acaban pensando esos estudiantes es justamente eso: Que los conceptos se reducen a unas recetas de cálculos, más o menos tediosas. Así, con una enseñanza que ignore por completo la existencia de la tecnología, un estudiante de primer curso de una ingeniería acabará sabiendo calcular primitivas de unas cuantas funciones pero sólo se acercará a las "aplicaciones" de modo ocasional o prefabricado y, sobre todo, se habrá afianzado la idea de que esos aspectos son los únicos que se pueden resistir de las matemáticas (porque los demás son inútiles).

Agotemos este mismo ejemplo del cálculo integral, cuya enseñanza se justifica muchas veces por sus aplicaciones al cálculo de áreas y de volúmenes. Sin embargo, en muy pocas ocasiones se termina resolviendo problemas **reales** de esas supuestas aplicaciones. Horas de adiestramiento en el cálculo de primitivas, en la aplicación de la regla de *Barrow*, concluyen en algún ejemplo que no es, precisamente, la obtención del volumen de un *donut* o de una lata de *atún* (de las llamadas ovaladas, para que no sea muy fácil), por mencionar dos objetos que podemos encontrar en un hipermercado. Casi siempre, la cosa se reduce a ejercicios “ideales” sobre de recintos limitados por funciones no menos *ideales*.

Sin embargo, casi todo el mundo está de acuerdo en que un estudiante de una ingeniería agrícola no debería terminar su formación matemática sin ser capaz de calcular el volumen de algún fruto. Si damos el cálculo integral porque se supone que sirve para calcular volúmenes y no enseñamos a aplicarlo a esos ejemplos, ¿de qué nos sorprenderemos después? ¿En qué libro encontrará, por ejemplo, la “fórmula del **volumen del kiwi**” (*actinidia chinensis*)? No se trata de que suponga que el kiwi es parecido a un elipsoide y que conozca más o menos vagamente que hay una fórmula que da ese volumen en función de las dimensiones (*largo, ancho y alto*) de dicho elipsoide. Ni siquiera valdría que supiese que esa fórmula se puede deducir usando el cálculo integral. Eso último parece sugestivo, pero lo que interesa es que sepa que es ¡fácil! **deducir** la siguiente fórmula para el volumen (los parámetros *a, b* y *c* representan las medidas respectivas del “largo”, “ancho” y “alto” de ese fruto):

KIWI3(a, b, c, 2.2, 2.4)

$$\frac{\pi\cdot b\cdot c\cdot\int_0^{a/2}\left(a^{12/5}-4\cdot 2^{2/5}\cdot x^{12/5}\right)^{5/6}dx}{4\cdot a^2}+\frac{\pi\cdot b\cdot c\cdot\int_0^{a/2}\left(a^{11/5}-4\cdot 2^{1/5}\cdot x^{11/5}\right)^{10/11}dx}{4\cdot a^2}$$

La deducción de esa fórmula, en efecto, es relativamente sencilla porque puede plantearse como un ejercicio típico de los llamados “*volúmenes de cuerpos de sección conocida*”: La planta del fruto coincide con dos curvas de *Lamé* yuxtapuestas, con parámetros respectivos $2'2$ y $2'4$. La sección transversal se supone que es elíptica, con excentricidad constante. Por otra parte, el volumen de un objeto de esas características es, en efecto, un buen modelo con relación al *kiwi* [8] pues, tal como se demostró en la referencia citada, para una muestra amplia y variada de esos frutos, la coincidencia entre el volumen real (hallado experimentalmente con métodos que garanticen una precisión razonable) y el obtenido mediante la aplicación del modelo, es casi perfecta [8].

Prescindiendo ahora de los detalles acerca de la “fórmula” mencionada, el ejemplo real consistiría en su aplicación: Compramos un kiwi “de verdad”, cogemos un pie de rey y medimos su longitud, su “anchura” y su “grosor” (en su parte central). Y obtenemos, **por ejemplo** (esto sí que es un “ejemplo” de la vida misma, salvo quizá por la precisión), $6'92$, $5'32$ y $5'04$ cm, respectivamente. Sustituyendo esos valores en nuestra “fórmula”, tenemos que calcular las integrales que aparecen en la ilustración siguiente:

```
KIWI3(6.92, 5.32, 5.04, 2.2, 2.4)
```

$$\frac{8379\cdot\pi\cdot\int_0^{173/50}\left(29929\cdot 173^{2/5}-2500\cdot 50^{2/5}\cdot x^{12/5}\right)^{5/6}dx}{37411250},\quad \frac{8379\cdot\pi\cdot\int_0^{173/50}\left(29929\cdot 173^{1/5}-2\right.}{37411250}$$

$$H(x) := \left(29929\cdot 173^{2/5}-2500\cdot 50^{2/5}\cdot x^{12/5}\right)^{5/6}$$

$$G(x) := \left(29929\cdot 173^{1/5}-2500\cdot 50^{1/5}\cdot x^{11/5}\right)^{10/11}$$

en las que aparecen implicadas las funciones $H(x)$ y $G(x)$ de la ilustración, en el intervalo $[0, 173/50]$. Insisto en que ésa es la realidad, no la que a veces nos empeñamos en presentar, llena de números enteros pequeños y amables, de resultados "exactos"... y de funciones que tienen primitiva.

El cálculo (a mano) de esas integrales no resulta "difícil" porque las funciones implicadas lo sean o porque aparezcan números relativamente desagradables, etc. No es por eso, aunque muchos estudiantes seguramente sería lo primero que pensarían ya que, con tanto ejercicio *prefabricado*, la presencia de números como 29.929 se considera **inaceptable**. Lo que ocurre, como se sabe, es *peor aún*... ya que en el intervalo considerado $H(x)$ y $G(x)$ son funciones continuas, de modo que tienen primitiva. Por tanto, para calcular las integrales podría aplicarse la regla de *Barrow*... si fuésemos capaces de obtener dicha primitiva, cosa que ¡no es posible! (en términos de funciones elementales). De modo que si lo único que saben los estudiantes del concepto de integral es usar la regla de *Barrow*, lo tienen crudo y se quedarán sin saber el volumen de ese kiwi concreto y, lo que es peor, no dispondrán de un método efectivo y rápido para obtener el volumen de **cualquier** kiwi.

Insisto pues, en que este ejemplo pone de manifiesto que centrar la enseñanza del cálculo integral en el adiestramiento sobre el cálculo de primitivas para poder aplicar la regla de *Barrow*, no sirve para obtener el volumen de un objeto *real* y relativamente cotidiano. Yendo más lejos, podemos afirmar que, como el cálculo de primitivas no parece justificarse más que por la regla de Barrow, quizá habría que empezar por ahí, es decir, por insistir que esa regla es sólo un método para calcular **algunas** integrales y que, en la práctica, no siempre es aplicable. Por tanto, el cálculo de primitivas no siempre va a servir y, por tanto, habrá que tener eso presente cuando se programe la asignatura y sus exámenes... Sin embargo, parece claro que no es eso lo que habitualmente se hace y, más bien al contrario, ni siquiera se considera que la justificación de dar o no unos contenidos o una técnica de cálculo concreta, tenga que estar en función de sus aplicaciones rea-les. La separación de la realidad que ello lleva implícito se vende como una virtud de las propias matemáticas, algo así como la culminación de la "abstracción". Pero, en el fondo, se oculta que son las limitaciones impuestas por los cálculos artificiales y por la necesidad de que las cuentas sean relativamente fáciles y cortas, lo que justifica esa elección de contenidos y de metodología.

```
KIWI3(6.92, 5.32, 5.04, 2.2, 2.4)
104.939
```

Más sobre el kiwi y la realidad

¿Qué es lo más importante del cálculo integral para un estudiante de ingeniería? Sin duda, la posibilidad que brinda de **definir** conceptos constantemente reclamados por las aplicaciones. Nada menos que áreas, longitudes, volúmenes, etc. Pero si lo que damos no sirve ni para un objeto sencillo como ese fruto, algo no va bien y a nadie puede extrañar que la conclusión sea, para muchos estudiantes, la muletilla de que *"las matemáticas no sirven para nada"*.

Y el caso es que **Derive** (y, seguramente, cualquier programa de cálculo simbólico y cualquier calculadora del tipo de la $TI-92$) facilita valores aproximados de esas integrales en pocos segundos, con una precisión más que suficiente.

Además, el método *genérico* para obtener esas aproximaciones es fácilmente comprendido por los estudiantes porque puede presentarse como una aplicación **directa** del concepto de integral y de algunos resultados teóricos importantes como el teorema de *Riemann*. Eso quiere decir que, sin necesidad de haber explicado nada más que el concepto, el ordenador permite aplicarlo de forma inmediata para obtener *aproximaciones* de las integrales ([3], por ejemplo). **Derive**, cuando se aproxima una integral, aplica de forma automática el método de *Simpson* "mejorado". Pero no es necesario dar detalles del mismo si se implementa la mera transcripción del concepto de integral de *Riemann* con la posibilidad de elegir un punto concreto en cada subintervalo de la partición, tal como se demuestra en el teorema citado: El método es menos eficiente, claro está, pero estamos hablando de diferencias de décimas de segundos de cálculos para los ejemplos que estamos considerando).

De modo que explicar con cierto detenimiento los conceptos, permite descender mejor a las aplicaciones. Y esa elección, la de detenerse en los conceptos, es posible siempre que podamos renunciar a los largos y tediosos adiestramientos en técnicas de cálculos que, como hemos visto, no son definitivas y, por ejemplo, no sirven para calcular cualquier integral, ni mucho menos. Así pues, no hay justificación para mantener un esquema arcaico en la elección de los contenidos, en la metodología en general, acerca del cálculo integral, siendo que, además, ese esquema ha probado sobradamente sus graves carencias (cfr. [7, 5, 4, 6]).

Naturalmente que lo deseable sería no tener que elegir, de modo que dispusiéramos de tantas horas de clase que pudiésemos explicar los conceptos con todo detenimiento y, después, practicar durante horas y horas para que los estudiantes aprendieran a aproximar integrales y a calcularlas exactamen-

$$\int \frac{2\cdot x+1}{x^4+5\cdot x^2+4}\,dx = -\frac{\mathrm{ATAN}\left(\frac{x}{2}\right)}{6}+\frac{\mathrm{ATAN}(x)}{3}-\frac{\mathrm{LN}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)}{3}$$

$$F(x) :=$$

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\frac{8379\cdot\pi\cdot\int_0^{173/50}\left(29929\cdot 173^{1/5}-2500\cdot 50^{1/5}\cdot x^{11/5}\right)^{10/11}dx}{37411250} = 51.3128$$

$$\alpha :\in \mathrm{Real}\ (0,\infty)$$

$$\int_0^{\infty} \hat{e}^{-\alpha\cdot x}\cdot\mathrm{COS}(\beta\cdot x)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{x^2}\,dx = \infty$$

Integrales con **Derive**

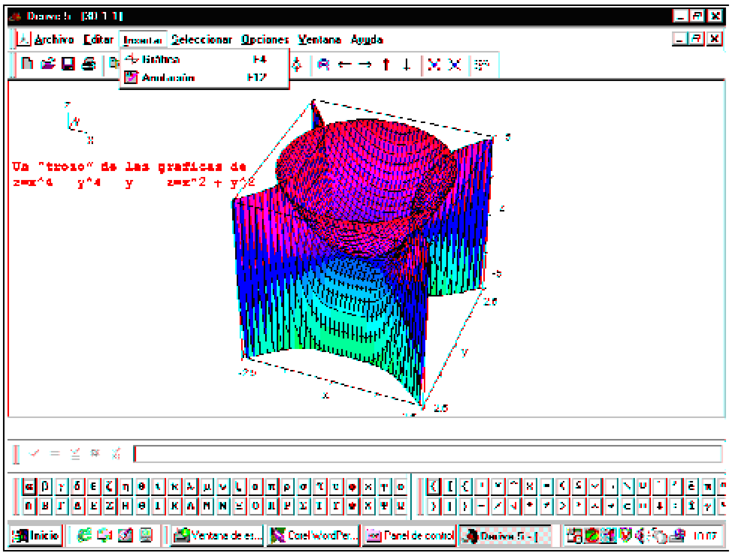
te cuando eso es posible... Sin embargo, de todo ese panorama, lo que las máquinas pueden hacer es el final; los conceptos, los teoremas, las aplicaciones, etc., no se hacen con **Derive** ni con ninguna máquina, pero los cálculos de las integrales, sí. Por tanto, la elección está clara. Y, además, una mirada a la ilustración siguiente vuelve a recordarnos que en ningún caso parece razonable ignorar esa realidad tecnológica.

Conclusiones

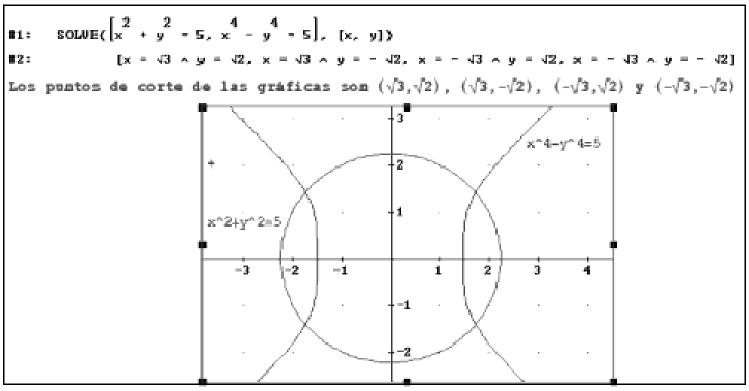
La compresión de lo que ha pasado para que **Derive** dé aquel resultado al aproximar las integrales y, antes, la deducción de la "fórmula del volumen del kiwi" son objetivos absolutamente accesibles para estudiantes de primer curso de ingeniería técnica. Por tanto, del curso siguiente al segundo de bachillerato (en el que, por lo demás, tampoco habría ninguna dificultad especial para proponérselos).

Como ya se ha demostrado a través de diversos trabajos de investigación o de experiencias docentes (cfr. [4, 8]) o de experiencias docentes, la renovación pedagógica que viene de la mano de estos recursos tecnológicos va mucho más allá de ser capaz de calcular deprisa el valor aproximado de una integral. El ejemplo que hemos comentado ilustra bastante bien lo que, a mi entender, es lo principal de la cuestión: Que esas capacidades simbólicas y de cálculo que nos brinda un asistente como **Derive**, apoyadas convenientemente por las posibilidades gráficas, podemos ser aprovechadas de forma eficaz y relativamente sencilla.

En ese sentido –y sólo en ése– las referencias a **Derive** no son gratuitas ya que el recurso tecnológico debe ser lo suficientemente amable para que no nos complique más la vida, ni a los profesores ni a los estudiantes. Además, desde aquellos primeros años y desde aquellas primeras versiones de **Derive**, las cosas han evolucionado favorablemente. Los programas de cálculo simbólico se han definido mejor y Derive se ha afianzado en su papel de "primer escalón" en este contexto, pues ha sabido conservar su facilidad de uso adaptándose al nuevo entorno. Incluso la dificultad del idioma ha ido desapareciendo ya que las últimas ediciones ya están disponibles *en español* (y en otros seis idiomas). En la versión más reciente, **Derive 5**, se han incorporado nuevas posibilidades que, sin afectar a lo fundamental, no cabe duda de que amplían el espectro de las aplicaciones y dotan al programa de más facilidades. Así, se han mejorado muchísimo los gráficos en tres dimensiones:



También se ha incorporado un editor de texto a la ventana de Álgebra, en la que además se pueden insertar gráficas y otros objetos de Windows, de modo que ahora sí que es posible confeccionar documentos con expresiones matemáticas, gráficas, comentarios, etc. Y, además, se han incorporado nuevas capacidades algebraicas:



Aunque **Derive 5** sigue sorprendiendo porque es un programa muy sencillo y potente a la vez, no pasa de ser *uno más* y, desde luego, no es la única posibilidad. Lo más importante, hoy como ayer, es abrir las puertas a esos recursos tecnológicos que nos ayudan a reflexionar acerca de lo que enseñamos y cómo lo enseñamos.

REFERENCIAS

[1] J. M. ARIAS Y S.A. PÉREZ; *Matemáticas. Eso 3* (y otros de los mismos autores y editorial). Ed. Casals. 1996.

[2] P. CAMPILLO HERRERO; *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de Van Hiele.* Tesis Doctoral. Univesidad Politécnica de Valencia, 1998.

[3] J.L. LLORENS FUSTER; Aplicaciones de Derive: Análisis Matemático I. *Servicio de Public. de la U.P.V*, Valencia, 1993.

[4] J.L. LLORENS FUSTER; A Mathematics course with Derive at Technicall Colleges. *Int. Derive Journal*, vol. 2, n.2, 33-42. 1995

[5] J.L. LLORENS Y P. PÉREZ CARRERAS; An extension of van Hiele's model to the study of local approximation. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* vol. 28, n.5, 713-726. 1997.

[6] J.L. LLORENS Y F. SANTONJA; Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, vol. 5, n.1/2, 13-22. 1995.

[7] J. MUNDY; Analysis of errors of first year Calculus students. *Proc. ICME-5*, 170-172. 1984.

[8] M. OLTRA ARANAZ; *Aplicación práctica de modelos matemáticos para la obtención del volumen del kiwi.* Trabajo final de Carrera. UPV, 1997.

José Luis Llorens Fuster
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
correo electrónico: `llorens@mat.upv.es`