El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

De Partitione Numerorum: Así titula Euler el capítulo XVI de su *Introductio in Analysin Infinitorum*, y en él da comienzo a la Teoría de Particiones. Los extraordinarios resultados obtenidos en los últimos años han impulsado, más si cabe, el estudio de esta rica teoría. Jorge Jiménez, colaborador de George Andrews y de Ken Ono, ha sido testigo de excepción de estos avances.

De Partitione Numerorum

por

Jorge Jiménez Urroz

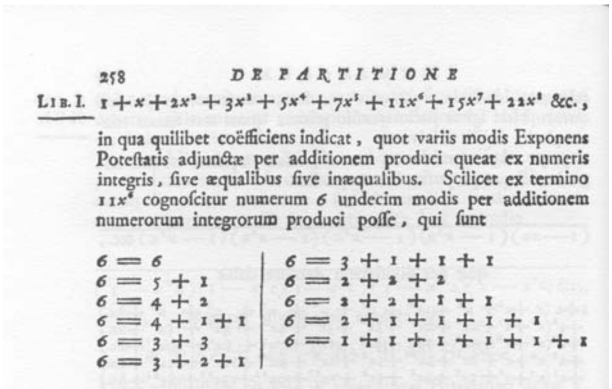
¿De cuántas maneras podemos escribir un entero $n \geq 1$ como suma de enteros positivos?

Entre la correspondencia que Gottfried Wilhelm Leibniz mantuvo con Johann Bernoulli en el año 1669 ya aparece esta pregunta y, en palabras del propio Leibniz, “parece un problema difícil pero importante”. No exageraba en ninguno de estos dos adjetivos. Más de 70 años después es un profesor de la universidad de San Petersburgo, Philippe Naudé, quien formula esta pregunta a Leonhard Euler. En su *Introductio in Analysin Infinitorum* Euler consigue dar los primeros pasos, de vital importancia en la búsqueda de la respuesta. No era sino el comienzo de la Teoría de Particiones.

IDENTIDADES DE q-SERIES Y LA FUNCIÓN PARTICIÓN

Una partición del entero n es una sucesión no creciente[1] *de enteros positivos, que llamamos partes, cuya suma es n. Al número total de particiones de n lo llamamos $p(n)$. Por convenio p(0)=1.*

En la figura[2] aparecen todas las particiones de 6. Obsérvese que la disposición no creciente de las partes, fija el orden de presentación de éstas, con lo que cada partición queda perfectamente determinada por el número de unos, de doses, etc., que la forman.



258 DE PARTITIONE

LIB. I. $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8$ &c.,

in qua quilibet coëfficiens indicat, quot variis modis Exponens Poteſtatis adjunctæ per additionem produci queat ex numeris integris, ſive æqualibus ſive inæqualibus. Scilicet ex termino $11x^6$ cognoſcitur numerum 6 undecim modis per additionem numerorum integrorum produci poſſe, qui ſunt

$6 = 6$	$6 = 3 + 1 + 1 + 1$
$6 = 5 + 1$	$6 = 2 + 2 + 2$
$6 = 4 + 2$	$6 = 2 + 2 + 1 + 1$
$6 = 4 + 1 + 1$	$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$
$6 = 3 + 3$	$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$6 = 3 + 2 + 1$	

Así que, si llamamos x_i al número de partes de la partición que son iguales a i, el valor de $p(n)$ coincidirá también con el número de soluciones de la ecuación

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots = n, \quad x_i \geq 0. \tag{1}$$

En respuesta a Naudé, Euler [E], en el estudio de la función $p(n)$, utiliza dos identidades entre series de potencias ((2) y (3)) que serán la base de toda la Teoría de Particiones. Usando repetidamente la identidad $\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\cdots, \quad q \in \mathbb{C}, \quad |q| < 1$, Euler observa que el coeficiente de q^n en el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n} = (1+q^1+q^2+\cdots)(1+q^2+q^4+\cdots)(1+q^3+q^6+\cdots)\cdots$$

[1]En este artículo no nos importará el orden de presentación de los sumandos. Si tuviésemos en cuenta el orden, la respuesta sería sencilla e ingeniosa: por ejemplo, una representación de 7 sería $4+1+2$. Podríamos identificar cada representación con una disposición de signos $*$, que separan los sumandos, y de signos $\circ$, que unen las unidades de cada sumando, entre los $n-1$ huecos que dejan los n unos:

$$1 \circ 1 \circ 1 \circ 1 * 1 * 1 \circ 1 \qquad \longrightarrow \quad 4+1+2$$

Como en cada uno de los $n-1$ huecos podemos colocar cualquiera de los dos símbolos, existen un total de 2^{n-1} representaciones distintas.

[2]Extraída de la edición facsímil de *Introductio in Analysin Infinitorum*, de L.Euler [E], editado por SAEM Thales y la R.S.M.E. (2000)

es precisamente el número de soluciones de (1) (el primer factor cuenta el número de unos, el segundo el número de doses, etc), que, como ya hemos señalado, coincide con el valor de $p(n)$. Es decir, el producto infinito es la función generatriz de la función partición:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}. \tag{2}$$

Por otro lado Euler demuestra que el inverso de la función anterior cumple una identidad extremadamente simple cuya demostración indicaremos más adelante:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(3n^2+n)/2}. \tag{3}$$

Obsérvese que las únicas potencias que aparecen en el sumatorio son los números pentagonales, $k = (3n^2+n)/2$, con coeficientes 1 ó -1.

Ahora no hay más que multiplicar (2) y (3) para conseguir la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{(3m^2+m)/2} = 1.$$

Si igualamos coeficientes obtenemos, para $n \geq 1$, la notable fórmula de recurrencia siguiente:

$$p(n) = \quad p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + \cdots \ ,$$

que, entre otras virtudes, permite calcular el valor de $p(n)$ con relativa velocidad.

Pero además es interesante observar cómo el argumento utilizado por Euler en su primera identidad está definiendo una nueva forma de pensar: funciones aritméticas aditivas complicadas se traducen en productos más o menos simples, y todo gracias a la función exponencial, que traduce productos en sumas de exponentes. Veamos otros ejemplos de este fenómeno. La identidad

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p'(n)q^n$$

genera otro tipo de función de partición, $p'(n)$, que cuenta el número de particiones de n con todas las partes distintas (cada parte proviene de un factor diferente del producto). Si ahora cambiamos de signo en la parte izquierda de la identidad anterior obtenemos

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(p'_p(n) - p'_i(n))q^n \tag{4}$$

donde $p'_p(n)$ y $p'_i(n)$ son el número de particiones de n con todas las partes distintas y número total de partes par o impar, respectivamente. Y si ahora recuperamos la identidad (3) obtenemos un bonito y famoso teorema sobre particiones.

Teorema (de los Números Pentagonales de Euler). *El número de formas de escribir n como suma de un número par de enteros positivos distintos coincide con el número de formas de escribir n como suma de un número impar de enteros positivos distintos, salvo si n es un número pentagonal. En este caso, la diferencia es ± 1. En concreto,*

$$p'_p(n) - p'_i(n) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = k(3k \pm 1)/2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El Teorema de los Números Pentagonales se podría considerar como el primer ejemplo de una extensa teoría que en la actualidad se conoce con el nombre de Identidades de q-series. Es decir, fórmulas que relacionan productos con sumas infinitas y que, vistas como funciones generatrices, tienen notables consecuencias para las funciones aritméticas que generan.

En el corazón de esta teoría está lo que hoy se conoce como Producto Triple de Jacobi:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} z^{2n} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 + z^2 q^{2n-1})(1 + z^{-2} q^{2n-1}), \tag{5}$$

para $z \neq 0$ y $|q| < 1$. Fue probado por Jakob Jacobi en 1829 dentro de su estudio sobre funciones elípticas. Una prueba más directa consiste en probar que la parte derecha de la identidad, que llamaremos $G_q(z)$, cumple la ecuación funcional $G_q(z) = qz^2 G_q(qz)$, y posteriormente desarrollarla como serie de Laurent en potencias de z, para obtener la parte izquierda de la identidad gracias a la relación de recurrencia que aparece entre los coeficientes.

Si sustituimos q por $q^{3/2}$ y z^2 por $-q^{1/2}$ obtenemos la identidad (3) que, junto con las observaciones anteriores, termina por demostrar el Teorema de los Números Pentagonales. Obsérvese que la flexibilidad de los parámetros en (5) permite abarcar una amplia gama de problemas distintos. Como en el Teorema de los Números Pentagonales, no tenemos más que escoger convenientemente z y q para que la identidad genere distintas funciones aritméticas.

En un artículo reciente, George Andrews, Ken Ono y el autor de estas líneas [A-J-O], han probado, entre otros resultados, una nueva identidad, del estilo y generalidad del Producto Triple de Jacobi, que, en particular, ofrece una relación explicíta entre la función partición y la función divisor $\tau(n)$. Para cada partición π denotamos m_π a la parte mayor de la partición, y definimos $A_p(n) = \sum m_\pi$, donde la suma es sobre las particiones de n con partes distintas y número par de partes. $A_i(n)$ se define de manera análoga con número impar de partes.

Teorema (G. Andrews, J.J. ,K. Ono)

$$A_p(n) - A_i(n) = \tau(n) - \tau(n-1) - \tau(n-2) + \tau(n-5) + \tau(n-7) - \cdots$$

si y sólo si n no es un número pentagonal.

Es interesante observar que, mientras que la parte izquierda de la identidad es una función de caracter aditivo, en la parte derecha interviene una función puramente multiplicativa.

El teorema, por un lado recuerda a la fórmula de recurrencia de la función partición, y por otro generaliza el Teorema de Euler de los Números Pentagonales, confirmando así la singularidad de la artimética de estos números. Al igual que en aquél, la fórmula necesita una corrección, que también se recoge en el artículo, cuando n es un número pentagonal.

En la prueba se utilizan técnicas de variable compleja y series hipergeométricas. George Andrews es uno de los mayores expertos en la Teoría de Particiones en los últimos 30 años[3] y Ken Ono se ha relevado como la figura más brillante en esta teoría en el siglo XXI. Recomendamos efusivamente el reciente artículo divulgativo escrito por Scott Ahlgren y Ken Ono [A-O], el cual ha sido una valiosa referencia a la hora de escribir estas líneas.

La aritmética de la función partición

El estudio de la aritmética de $p(n)$ empezó en 1919 [H-R] con un espléndido trabajo fruto de la colaboración entre un gran matemático, como fue Godfrey Harold Hardy, y el genio innato de Srinivasa Ramanujan. El tema central del artículo era la obtención del desarrollo asintótico de la función partición,

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

De hecho, en el artículo no sólo se proporciona el desarrollo asintótico, sino que se describe un método que, mejorado 20 años más tarde por Hans Rademacher, produce una fórmula exacta para $p(n)$ como una serie infinita de ciertas funciones trascendentes.

Como información adicional para el estudio de la función partición, Hardy y Ramanujan contaban con la tabla que Percy Alexander McMahon había publicado en los Proceedings of London Mathematical Society un año antes y que contenía los valores de $p(n)$ hasta $n = 200$. Para este último McMahon calculó $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$. ¡Hay más de 3 billones de formas distintas de escribir 200 como suma de enteros positivos! La tabla de McMahon no pasó inadvertida a Ramanujan (ver foto):

[3]George Andrews es autor de [An], principal referencia de la Teoría de Particiones en la actualidad

"... A recent paper by Mr. Hardy and myself contains a table, calculated by Major MacMahon, of the values of $p(n)$, the number of partitions of n, for all values of n up to 200. On studying the numbers in this table I observed a number of curious congruence properties, apparently satisfied by $p(n)$"

Había notado que todos los enteros de la tabla en la progresión aritmética 4, 9, 14... , tenían un número de particiones que era divisible por 5. Ramanujan, a partir de los datos recogidos por McMahon, probó que

$$\begin{aligned} p(5n+4) &\equiv 0 \pmod 5 \\ p(7n+5) &\equiv 0 \pmod 7 \\ p(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}, \end{aligned}$$

y conjeturó un resultado equivalente para cualquier potencia de 5, 7 y 11, ¡sólo con 200 valores!

Conjetura (de Ramanujan): *Sea* $\delta = 5^a 7^b 11^c$ *y* $24\lambda_\delta \equiv 1 \pmod{\delta}$. *Entonces*

$$p(\delta n + \lambda_\delta) \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

Nacido en la pobreza de Erode, una pequeña ciudad al sur de la India, Ramanujan decidió, a la edad de 16 años, aprender Matemáticas de manera autodidacta. Durante la década entre 1903 y 1913 escribió una serie de cuadernos cuyo contenido es, todavía en la actualidad, objeto de estudio de matemáticos de primera línea. Su carrera como matemático profesional fue extremadamente corta. Comenzó con la invitación de Hardy a pasar una temporada en la Universidad de Cambridge en 1914. Seis años más tarde murió al deteriorarse su frágil salud.

Las observaciones de Ramanujan sobre la divisibilidad de $p(n)$ y sus demostraciones de algunos casos hicieron que su conjetura cobrase mucho interés. A pesar de ello se mantuvo abierta hasta el año 1935 en el que S. Chow la descubrió, a la vista de una tabla extendida por H. Gupta, que $p(243) \not\equiv 0 \pmod{7^3}$ mientras que $24 \times 243 \equiv 1 \pmod{7^3}$. La conjetura, tal y como fue formulada por Ramanujan, no era correcta para las potencias de 7.

No es ésta sin embargo una conjetura que pueda achacarse a un estudio descuidado de la función por parte de Ramanujan. Recientemente se han encontrado en uno de los manuscritos de Ramanujan, no publicado hasta 1988, notas sin detallar acerca de la prueba para potencias de 5 y 7. N. Watson, que a pesar de tener una copia de dichas notas, nunca las mencionó, no tuvo más que completar los detalles para darse cuenta de un error en la conjetura y modificarla ligeramente para probar que si $24\lambda \equiv 1 \pmod{5^a 7^b}$, entonces

$$p(5^a 7^b n + \lambda) \equiv 0 \pmod{5^a 7^{\lfloor b/2 \rfloor + 1}}.$$

El caso de las potencias de 11, de carácter mucho más complejo que los anteriores, lo probó A. O. L. Atkin en 1967 [At].

¿Y qué pasa para potencias de otros primos? El propio Ramanujan se aventuraba a hacer notar que no parecía que existiesen congruencias de este tipo para primos distintos de los anteriores.

Congruencias de Ramanujan

Cualquier ordenador personal puede reproducir en cuestión de segundos miles de valores de la función partición. Para $n = 50\,000$ se obtiene que exactamente 24984 de las particiones son pares y 25016 son impares mientras que, módulo 3, hay 16628, 16653 y 16719 que son congruentes respectivamente con 0, 1 ó 2 módulo 3. A la vista de estos resultados parece sensato sospechar que los valores de la función partición se distribuyen de manera uniforme en las clases de congruencias módulo 2 y 3. Se sabe que $p(n)$ aparece infinitas veces en cada una de las clases módulo 2; sin embargo se desconoce si ocurre en la misma proporción. Más dramático es el caso módulo 3, en el que todavía no se ha probado siquiera que $p(n) \equiv 0 \pmod 3$ *para infinitos enteros.*

Si se analizan los valores de $p(n)$ módulo 5, se observa que hay más valores de $p(n)$ múltiplos de 5 que en cualquier otra clase módulo 5 (18.195 en los 50.000 primeros). Como acabamos de ver, este fenómeno no es sino reflejo de que, como ya demostró Ramanujan, en la progresión aritmética $5n + 4$ todos los valores de la función partición son múltiplos de 5. Si suponemos además que los valores de $p(5n + r), r \neq 4$, se distribuyen uniformemente módulo 5, el número esperado de enteros con $p(n)$ múltiplo de 5 es 18000, muy cercano a los 18195 que hay en realidad.

En general, las progresiones aritméticas $an + b$ con un número de particiones divisibles por un mismo l, $p(an + b) \equiv 0 \pmod l$, se denominan *congruencias de Ramanujan.*

Tuvieron que pasar 40 años desde el descubrimiento de Ramanujan para que apareciese un nuevo resultado referente a la divisibilidad de la función partición. M. Newman, en el año 1957, mostraba una familia infinita de enteros con número de particiones divisible por 13. Poco después A. O. L. Atkin, para asombro de todos los expertos, conseguía dos nuevas familias, que en este caso sí que eran congruencias de Ramanujan:

$$\begin{aligned} p(17303n + 237) &\equiv 0 \pmod{13} \\ p(206839n + 2623) &\equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Si nos fijamos en el valor de $p(2623)$, vemos que tiene 53 dígitos, (¡ $p(200)$ tenía 13 !). No es de extrañar que ni Ramanujan ni nadie pudiesen encontrar nuevos ejemplos de congruencias. Pero, ¿qué condujo a estos descubrimientos? Newman fue alumno de Rademacher, mientras que Atkin pasó su periodo de formación en la Universidad de Cambridge al lado de matemáticos como R. Rankin o el propio Hardy. El interés natural de ambos por la función partición, unido a su formación analítica, proporcionó la combinación perfecta para que se produjese un nuevo avance en el estudio de la función partición. En aquel momento empezaba a dar sus frutos el empleo de las formas modulares.

En la actualidad las formas modulares desempeñan un papel fundamental dentro de la Teoría de Números, en problemas que van desde el Último Teorema de Fermat o la conjetura de Shimura-Taniyama-Weil, a la Hipótesis de Riemann. Estas funciones de variable compleja, extremadamente simétricas, también aparecen en el estudio de la función partición y revelan propiedades extraordinarias para la función que tanto llamó la atención de Leibniz.

Como es lógico, los descubrimientos de Atkin y Newman no hicieron sino dar comienzo a una carrera frenética por encontrar más congruencias de Ramanujan y, en general, entender por qué estos fenómenos tan particulares podían estar produciéndose. Los siguientes 30 años fueron completamente infructuosos. Ni un solo resultado que apoyase la existencia de más congruencias, y ni uno solo que dijese lo contrario. En palabras de Andrews, recogidas en [Pe], "*...It was really believed that there would probably never be any new major discoveries regarding partition congruences...*"

Pero no sólo parecía lejano el encontrar más congruencias de Ramanujan, sino que en realidad ni siquiera se entendía la distribución de $p(n)$ sobre las distintas clases de congruencias. En 1960 Newman hizo la siguiente conjetura [N]:

Conjetura (de Newman) *Si M es un entero positivo, entonces para todo $1 \leq r \leq M$ existen infinitos valores de n tales que $p(n) \equiv r \pmod{M}$.*

De la conjetura de Newman, hasta el año 2000, los únicos casos que se habían corroborado eran $M \in \{2, 5, 7, 13\}$. En general, el conocimiento de la aritmética de $p(n)$ era tan pobre que ni siquiera se sabía si, fijado un primo ℓ, existía algún entero n con $p(n)$ múltiplo de ℓ.

En el número de enero de 2000 de *Annals of Mathematics* aparece uno de los trabajos más rotundos en Teoría de Particiones. Ken Ono, en quince páginas, termina la discusión sobre la existencia de congruencias de Ramanujan [O].

Teorema (K.Ono) *Para todo primo $\ell \geq 5$ existen infinitas congruencias de la forma*

$$p(An + B) \equiv 0 \pmod{\ell}.$$

Las progresiones que son subprogresiones de otras no se consideran como nuevas en el teorema.

El artículo fue presentado el 19 de Enero de 1999 en el “Seminario Informal de Teoría de Números” de la universidad de Penn State. Después de anunciar que había encontrado un método para construir infinitos ejemplos de congruencias de Ramanujan, Ono mismo confesaba que le daba vergüenza tener que decirnos que la prueba era tan fácil.

Fácil. Habían pasado 80 años. Matemáticos de enorme prestigio, con profundas herramientas matemáticas, en parte descubiertas por el estudio de la función partición, se habían dedicado al estudio de este problema, ¡y sólo habían aparecido cinco ejemplos de congruencias de Ramanujan! La prueba podía ser cualquier cosa menos fácil. Pero, ¿por qué le parecía fácil?

En su parte técnica, la prueba usa de manera determinante los últimos resultados que se habían desarrollando en la teoría algebraica de las formas modulares. La inspiración, según el propio Ono, vino del manuscrito no publicado de Ramanujan.

Actualmente, pocos son los que dominan con tanta facilidad la profunda teoría algebraica de las formas modulares. Y quizás uno sólo, además, conoce la Teoría de Particiones tan profundamente como para que unas notas le inspiren cambiar la historia de un problema.

Sin embargo, a pesar de que el propio Ono incluye un nuevo ejemplo de congruencia, $p(59^4 \cdot 13n + 111247) \equiv 0 \pmod{13}$, el argumento no es claramente constructivo. Todavía hacía falta describir un algoritmo que pudiese exhibir nuevos ejemplos de congruencias de Ramanujan.

Una estudiante de licenciatura de Ono, Rhiannon Weaver [W], aceptó como proyecto de fin de curso, escribir un algoritmo que hiciese posible la búsqueda sistemática de nuevas congruencias. En su último curso y como trabajo añadido, empezó a estudiar los trabajos de Deligne, Serre y Shimura [D], [D-S], [S], sobre formas modulares y su aplicación a las particiones tal y como hacía Ono. Como resultado de este estudio Weaver escribió un programa que, después de estar funcionando durante dos días, produjo 70.362 nuevas congruencias de Ramanujan, entre las que están, por ejemplo, $p(14375n + 3474) \equiv 0 \pmod{23}$ ó $p(4063467631n + 30064597) \equiv 0 \pmod{31}$.

Todas estas congruencias hacen referencia sólo a módulos primos y, combinándolas, a módulos libres de cuadrados. Poco tiempo después, sin embargo, completando el estudio ℓ-ádico de las formas usadas por Ono, Scott Alhgren [A] extendería el teorema de Ono reemplazando el módulo ℓ por cualquier potencia ℓ^m, lo cual nos garantiza la existencia de congruencias de Ramanujan módulo cualquier entero M.

Curiosamente, en ninguna de las congruencias predichas por el teorema de Ono se cumple que $A = \ell$, como ocurría en las congruencias originales de Ramanujan. Sin embargo en todos estos casos también se tiene que $24B \equiv 1 \pmod{\ell}$. ¿Tiene algo de especial el inverso de 24 para admitir ese tipo de congruencias?

Recientemente Ahlgren y Ono [A-O] han probado que en realidad esto no es más que una coincidencia, y que de hecho para cada primo ℓ existen $(\ell+1)/2$ clases módulo ℓ que contienen congruencias de Ramanujan.

Pero volvamos a la distribución de $p(n)$. Todos estos resultados hacen referencia a enteros con número de particiones que es múltiplo de un entero dado M; pero ¿qué pasa con las demás congruencias módulo M? ¿Es finalmente cierta la conjetura de Newman?

En un artículo reciente, Jan Bruinier y Ken Ono [Br-O], usando de nuevo la profunda teoría de formas modulares desarrollada por Deligne, Serre y Shimura, dan una condición suficiente y computable para que la congruencia $p(n) \equiv r \pmod{M}$ tenga infinitas soluciones. En concreto prueban que, dado un primo ℓ, o bien hay una congruencia de Ramanujan módulo ℓ con $A = \ell$, es decir $p(\ell n+\lambda_\ell) \equiv 0 \pmod{\ell}$, o bien la conjetura de Newman es cierta para ese primo. Por tanto, para probar la conjetura de Newman en un caso concreto, basta encontrar un n tal que $p(\ell n+\lambda_\ell) \not\equiv 0 \pmod{\ell}$. Un sencillo programa les permite probar la conjetura de Newman no sólo para 2, 5, 7 y 13 sino ¡para todo primo $p \neq 3$ hasta 2×10^5!

Es poco probable que Leibiniz imaginase cómo de importante y difícil podía ser su pregunta. Con los descubrimientos de Ono tenemos a nuestro alcance un entendimiento mucho más completo de la función partición. A pesar de ello, muchos son los problemas de aspecto inocente que todavía no están resueltos, y largo el camino que todavía queda por recorrer.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a Fernando Chamizo y Pablo Fernández la atenta lectura que hicieron de este artículo y sus valiosos consejos y correciones.

A Javier Cilleruelo, responsable de esta sección, quisiera agradecerle el enorme trabajo que ha hecho para mejorar la presentación de este artículo, desde una elección más apropiada del título, hasta la revisión de la última de las referencias.

Referencias

[1] S. Ahlgren; The partition function modulo composite integers M, *Math. Annalen* 318 (2000), 795-803.

[2] S. Ahlgren; K. Ono; Addition and Counting: The arithmetic of partitions, *Notices of the AMS* 48 (2000), 978-984.

[3] S. Ahlgren; K. Ono; Congruence properties for the partition function, aceptado en *Proc. Natl. Acad. Sci.*

[4] G.E. Andrews; *The Theory of Partitions,* Addisson-Wesley (1976)

[5] G.E. Andrews; Euler's pentagonal number theorem, *Math. Mag.* 56 (1983), 279-284.

[6] G.E. Andrews; J. Jiménez-Urroz; K. Ono. q-series identities and values of certain L-functions, *Duke Math. J.* 108, 3 (2001), 395-419.

[7] A.O.L. Atkin; Multiplicative congruence properties and density problems for $p(n)$, *Proc. London Math. Soc.* 18, (1968), 563-576.

[8] B.C. Berndt; K. Ono. Ramanujan´s unpublished manuscript on the partition and tau functions with proofs and commentary, *Sém. Lothar. Combin.* 63 pp. (electronic). 42, (1999).

[9] J. Bruinier; K. Ono. *Coefficients of half integral weight modular forms*, preprint.

[10] P. Deligne; *Formes modulaires et representations ℓ-adiques*, Lecture Notes Math. 179, (1971), 139-172.

[11] P. Deligne; J.P. Serre; Formes modulaires de poids 1, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 7, (1974), 507-530.

[12] L.E. Dickson; *History of the theory of numbers* AMS Chelsea Publ. Vol. II, (1992)

[13] L. Euler; *Introductio in analysin infinitorum,* SAEM Thales y Real Soc. Mat. Esp. Editores: Antonio Durán y Francisco Javier Pérez Fernández, (2000).

[14] The Mathematics Genealogy project.
http://hcoonce.math.mankato.msus.edu/

[15] G.H. Hardy; S. Ramanujan;, Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.* 17, (1918), 75-115.

[16] M. Newman; Periodicity modulo m and divisibility properties of the partition function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 97, (1960,) 225-236.

[17] M. Newman; Congruences for the coefficients of modular forms and some new congruences for the partition function, *Canad. J. Math.* 9, (1957), 549-552.

[18] K. Ono; The distribution of the partition function modulo m, *Annals of Math.* 151, (2000), 293-307.

[19] K. Ono; *The arithmetic of the partition function,* Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Special Functions, Special Functions (2000) (Ed.J. Bustoz and S. Suslov), Kluwer Acad. Publ. 2001, 243-253.

[20] I. Peterson; The power of partitions, *Science news*
http://www.sciencenews.org /20000617/bob2.asp.

[21] H. Rademacher; On the expansion of the partition function in a series, *Ann. Math.* 44, (1943), 416-422.

[22] G. Shimura; On modular forms of half integral weight, *Ann. Math.* 97, (1973), 440-481.

[23] R.L. Weaver; New congruences for the partition function, *Ramanujan J.* 5, (2001), 53-63.

Jorge Jiménez-Urroz
Departamento de Matemática Aplicada IV
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Nord - Edif. C3
Jordi Girona, 1-3
08034 Barcelona
correo electrónico: `jjimenez@mat.upc.es`