Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

Alan Baker: una obra transcendente

por

Juan Carlos Peral

Alan Baker recibió en 1970 la Medalla Fields por su contribución a las ecuaciones diofánticas.

Su trabajo, que desarrolla la teoría de las formas lineales en logaritmos, tanto en sentido cualitativo como cuantitativo, ha tenido una gran repercusión en numerosos problemas de la teoría de números, desde las curvas elípticas hasta los números tracendentes, y en particular en su relación con el séptimo problema de Hilbert, o desde la resolución efectiva de amplias categorias de ecuaciones diofánticas hasta la solución del clásico problema de Gauss relativo a los cuerpos cuadráticos imaginarios de factorización única.

Alan Baker

Breve Reseña Biográfica

Alan Baker nació en Londres en 1939. Su primera educación tuvo lugar en la Stratford Grammmar School para pasar después al University College de Londres donde completó su B. Sc. Posteriormente ingresó en el Trinity College de Cambridge donde hizo su M. A. En Cambridge continuó su trabajo investigador hasta conseguir el doctorado y ser elegido Fellow del Trinity College en 1964.

Desde 1964 hasta 1968, Baker desarrolló su labor como Fellow en Cambridge y fue elegido Director de Estudios en Matemáticas, puesto que ejerció hasta 1974 año en el que fue seleccionado como Professor of Pure Mathematics.

Durante este periodo pasó algún tiempo en Estados Unidos donde fue Profesor Visitante en la Universidad de Stanford y Miembro del Institute for Advanced Study en Princeton en 1970.

Alan Baker recibió la Medalla Fields en 1970 en el Congreso Internacional de Niza. La concesión del premió quiso destacar su relevante trabajo sobre las ecuaciones diofánticas.

Ese mismo año fueron galardonados con la Medalla Fields otros tres matemáticos: H. Hironaka, S. P. Novikov y J. G. Thompson.

El Comité estuvo formado J. Doob, F. Hirzebruch, L. Hormander, S. Iyanaga, J. Milnor, I. R. Shafarevich y P. Turán, y presidido por H. Cartan.

Además de la Medalla Fields, Alan Baker ha recibido otros premios y nombramientos entre los que se incluyen el Adams Prize de la Universidad de Cambridge en 1972, su nombramiento como Fellow of the Royal Society en 1973 o su elección como miembro honorario de la Indian National Science Academy.

La Obra de Alan Baker

El bastante obvio juego de palabras que me he permitido en el título define sin duda su obra. Son reveladoras en este sentido las palabras de Turán al glosar la concesión de la Medalla Fields:

...las ecuaciones diofánticas, con una historia de más de mil años, eran hasta los primeros años del siglo, poco más que una colección de problemas aislados y tratados con ingeniosos métodos ad hoc. Fue A. Thue quién consiguió un gran avance hacia resultados de tipo general, probando en 1909*, que todas las ecuaciones diofánticas de la forma*

$$f(x, y) = m$$

donde m es un entero y f una forma binaria irreducible de grado al menos tres, con coeficientes enteros, tiene a lo más una cantidad finita de soluciones en enteros.

Posteriormente C. Siegel y K. Roth generalizaron el tipo de ecuaciones de las que se podía extraer la misma conclusión.

El tipo de resultados citados son lo que se conoce como resultados inefectivos que no permiten el cálculo de todas las soluciones, ya que no establecen de forma explícita las cotas máximas que pueden alcanzar las soluciones, aunque si demuestran que dichas cotas existen.

Sigue Turán en sus comentarios

... Aquí Baker obtiene un avance brillante... consiguiendo determinar una cota efectiva B dependiente únicamente de m y de los coeficientes de f, de manera que cualquier solución (x', y') de la ecuación satisface

$$\max |(x', y')| \leq B$$

Aunque a veces la constante B es grande, los resultados de Baker ofrecen, por primera vez, la posibilidad de obtener la lista completa de todas las soluciones de los problemas diofánticos citados, o bien la inexistencia de soluciones.

La herramienta clave en todo el desarrollo del trabajo de Alan Baker, y de las aplicaciones del mismo hechas por otros matemáticos, es su teoría sobre las formas lineales en logaritmos, es decir sobre expresiones del tipo

$$\Lambda = \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$$

para las que haciendo hipótesis adecuadas sobre el tipo de números representados por $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_i\}$ consigue tanto resultados cualitativos como estimaciones que pueden aplicarse a un gran número de problemas importantes. Lo que resulta especialmente interesante del método de Baker, como se ha citado antes, es que proporciona cotas efectivas, con lo que la búsqueda de soluciones queda restringida a una cantidad finita de casos comprobables de forma directa.

Para ejemplificar como entran en juego las formas lineales en los problemas diofánticos vamos a centrarnos en una variante simplificada de la ecuación de Catalan. En 1844, Catalan formuló la conjetura de que la única solución en enteros mayores que 1 de la ecuación en cuatro incógnitas

$$x^p - y^q = 1 \quad \text{es} \quad 3^2 - 2^3 = 1.$$

Aunque la conjetura no ha sido establecida se han sucedido importantes avances relativos a la finitud del número de soluciones. La variante más sencilla a la que nos referíamos es la siguiente ecuación diofántica

$$ax^n - by^n = c \quad \text{con } a,\ b \text{ y } c \neq 0 \text{ enteros dados.}$$

Se trata de acotar los hipotéticas soluciones (x, y). Se puede suponer sin pérdida de generalidad que a, b son positivos y que $y \geq x$. La ecuación puede escribirse de forma equivalente como

$$e^{\Lambda} - 1 = \frac{c}{by^n} \quad \text{donde}$$

$$\Lambda = \log \frac{a}{b} + n \log \frac{x}{y}$$

En la región donde $y^n \leq (2c)^2$ hay sólo una cantidad finita de posibles (x, y), para los que se puede comprobar directamente si son o no soluciones. Si $y^n > (2c)^2$ se deduce fácilmente que

$$|e^{\Lambda} - 1| < \frac{1}{2y^{\frac{n}{2}}}$$

y teniendo en cuenta que para cualquier número real la desigualdad $|e^t - 1| < \frac{1}{2}$ implica que $|t| \leq 2|e^t - 1|$, se deduce que

$$\log |\Lambda| < -\frac{1}{2} n \log y$$

Por otra parte, de la teoría sobre formas lineales en logaritmos de Baker, se deduce que para la forma anterior se verifica una estimación inferior del tipo

$$\log|\Lambda| >> -\log n \log y$$

donde la constante ímplicita es calculable y depende únicamente de a y de b. Esto conduce a una desigualdad del tipo

$$\frac{1}{2}n << \log n$$

que implica inmediatamente una acotación efectiva para el valor de n en términos de a y b.

Las cotas para (x, y) se obtienen de nuevo por aplicación de los resultados citados antes y relacionados con la ecuación de Thue.

Otras ecuaciones importantes donde se aplica con muy buenos resultados el método de Baker son las ecuaciones de Mordell, en las que se trata de encontrar las soluciones enteras de

$$y^2 = x^3 + k$$

Esta ecuación representa una de las familias de curvas elípticas más tratadas en la literatura matemática por lo que los resultados obtenidos por aplicación del método han sido de gran repercusión.

En este caso las cotas que se consiguen son del tipo

$$\max(|x|, |y|) \leq \exp(c|k|^{c'})$$

donde c y c' son constantes absolutas y computables de forma efectiva.

Hay otros dos grandes campos donde la obra de A. Baker también ha resultado un revulsivo de enorme calado.

Por supuesto nos referimos, en primer lugar, a su aportación al séptimo problema de Hilbert.

El problema citado fue propuesto por Hilbert en el Congreso Internacional de 1900 en el séptimo lugar de su famosa lista de 23 problemas. Hilbert consideraba que su séptimo problema era de una profundidad y dificultad comparable a la de la hipótesis de Riemann.

En una de sus formulaciones, el problema consiste en decidir, dados dos números algebraicos $a \neq 0, 1$ y b si

$$a^b \quad \text{es transcendente o no.}$$

El primer avance significativo en este problema fue conseguido por Gelfond[1] en 1929. Mediante el uso de técnicas de interpolación Gelfond demostró

[1]Aleksandr Gelfond (1906-1968), matemático ruso que, aparte de sus trabajos sobre números transcendentes, hizo aportaciones a la teoría de interpolación y a la aproximación de funciones de variable compleja. No hay que confundirlo con Israil Gelfand, matemático ucraniano nacido en 1913 y muy conocido por sus resultados en análisis funcional, ecuaciones diferenciales, representaciones de grupos y, más recientemente, biología.

que el logaritmo de un número algebraico con base algebraica no puede ser un número cuadrático imaginario, o dicho de otra forma que si a es algebraico $a \neq 0, 1$ y b es irracional cuadrático imaginario, entonces a^b es tracendente. En particular al escribir e^π como

$$e^\pi = (-1)^{-i}$$

resulta que dicho número es transcendente. El resultado de Gelfond fue extendido por Kuzmin para irracionales cuadráticos en 1930. Los métodos usados sin embargo no parecían susceptibles de nuevas generalizaciones.

Nuevas ideas desarrolladas por Gelfond y Schneider de forma independiente en 1934 extendieron los resultados para irracionales generales. En ambos casos la técnica de la demostración depende de la construcción de una función auxiliar que se anula en ciertos puntos selecccionados.

Finalmente el problema de Hilbert quedó resuelto ya que el teorema de Gelfond-Schneider demuestra que para números algebraicos no nulos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$, β_2 con $\log \alpha_1$, $\log \alpha_2$ independientes sobre los racionales se verifica

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0$$

La generalización del resultado anterior al caso de un número cualquiera de sumandos del mismo tipo fue demostrada por Baker en 1966 en la forma del teorema que ahora se establece, ver [B1].

Teorema 1 *Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ son números algebraicos no nulos tales que sus logaritmos son linealmente independientes sobre los racionales, entonces*

$$1, \log \alpha_1, \cdots, \log \alpha_n$$

son linealmente independientes sobre los números algebraicos.

La demostración del teorema depende de la construcción de una función auxiliar de varias variables complejas que generaliza la empleada en una variable por Gelfond. En las derivadas de la función auxiliar aparecen de forma natural los logaritmos de los $\{\alpha_i\}$ y de las estimaciones obtenidas en una serie de lemas bastantes técnicos se consigue una desigualdad que es contradictoria con la suposición de que el teorema es falso.

Con el trabajo de Baker se identifica una vasta categoría de números transcendentes y a su vez la teoría generada en torno al trabajo, ha sido usada para la resolución de una gran cantidad de nuevos problemas. Para dar una idea se citan algunos resultados que son corolarios del teorema anterior.

Teorema 2 *Cualquier combinación lineal no nula de logaritmos de números algebraicos con coeficientes algebraicos es transcendente.*

Teorema 3 *Si*

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \ \ \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$$

son algebraicos no nulos entonces el número

$$e^{\beta_0}\alpha_1^{\beta_1}\ \alpha_2^{\beta_2}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$$

es transcendente.

Teorema 4 *Si* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, *son algebraicos diferentes de* 0 *y de* 1 *y* $\beta_1, \beta_2, \cdots$ β_n *son algebraicos con* $1, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ *linealmente independientes sobre los racionales, entonces*

$$\alpha_1^{\beta_1}\ \alpha_2^{\beta_2}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$$

es transcendente.

La otra cuestión relevante que vamos a resaltar aquí es la relativa al famoso problema del número de clases igual a uno ya propuesto por Gauss. El problema consistía en decidir si los nueve cuerpos cuadráticos imaginarios, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, con número de clases uno (es decir, cuyo anillo de enteros es de factorización única), ya conocidos, eran los únicos con esta propiedad o bien existía algún otro cuerpo cuadrático imaginario con dicha propiedad.

Baker resolvió el problema en 1966 concluyendo que la lista de valores

$$d = 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163$$

estaba completa. Es decir, se obtiene

Teorema 5 *Los únicos cuerpos cuadráticos imaginarios* $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ *con número de clases* 1 *son los que corresponden a los siguientes valores de d,*

$$d = 1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 11,\ 19,\ 43,\ 67,\ 163$$

Para elló empleó algunas ideas de Gelfond y Linnik ligando un par de L funciones de Dirichlet mediante un producto y estimando el término principal que aparece en la fórmula con su propio método referente a las formas lineales en logaritmos.

Este problema fue resuelto de forma independiente y casi simultánea por H. Stark [S], partiendo de las ideas incluidas en un artículo de Heegner que en su momento no fue admitido como completo.

En particular, para la resolución del problema de Gauss, Baker considera un par de símbolos de Kronecker

$$\chi(n) = \left(\frac{k}{n}\right),\ \ \chi'(n) = \left(\frac{-d}{n}\right)$$

donde $k > 0$ y $-d < 0$ son los discriminantes de los cuerpos cuadráticos $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ respectivamente.

Al multiplicar las correspondientes $L-$funciones y tomar límites se obtiene que su valor en el punto 1 es

$$L(1,\chi)L(1,\chi\chi') = \frac{\pi^2}{6}\prod_{p|d}(1-\frac{1}{p^2})\sum_f \frac{\chi(a)}{a} + \sum_f \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r e^{\pi i r b/(ka)}$$

donde se conocen estimaciones sobre los coeficientes A_r, y donde

$$f = f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

en los subíndices indica que se suma sobre un conjunto completo de formas no equivalentes con discriminate $-d$ y p es el conjunto de divisores primos de d.

Las fórmulas de Dirichlet afirman que

$$L(1,\chi) = \frac{2\log\epsilon}{\sqrt{k}},\ \ L(1,\chi\chi') = \frac{h\pi}{\sqrt{kd}}$$

donde h es el número de clases de $\mathbb{Q}(\sqrt{-dk})$ y ϵ es la unidad fundamental para $\mathbb{Q}(\sqrt{k})$.

Si ahora se supone que el número de clases de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ es uno y $d > 2$, entonces necesariamente d es un primo congruente con 3 en módulo 4 y la única clase de formas de discriminante $-d$, está representada por

$$f = x^2 + xy + \frac{1}{4}(1+d)y^2$$

por lo que la suma en el primer término de la fórmula anterior se reduce a un único sumando que corresponde a

$$\frac{\chi(a)}{a} = \frac{\chi(1)}{1} = 1$$

Tomando $k = 21$ cuya unidad fundamental es $\epsilon = \frac{1}{2}(5+\sqrt{21})$ y cuyo número de clases es 1, se obtiene, tras estimar la última suma del producto de L funciones anterior, la siguiente estimación

$$|h\log\epsilon - \frac{32}{21}\pi\sqrt{d}| < e^{-\pi\sqrt{d/100}}$$

válida para $d > 10^{20}$.

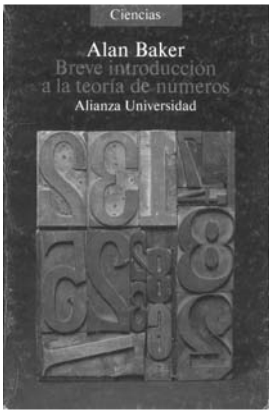
Ahora se observa que $\pi = -2i\log i$, por lo que el término de la izquierda en la desigualdad es una forma lineal en dos logaritmos a la que se pueden aplicar las estimaciones de los resultados efectivos de Baker, junto con estimaciones conocidas para h en función de k y d, y ello conduce a que la acotación anterior sólo puede ser cierta por debajo de una constante efectivamente computable, y que en este caso se puede evaluar como $d < 10^{500}$.

Dicha estimación está dentro de los rangos comprobables mediante cálculos directos, pero debido a que Heilbronn y Linfoot habían establecido en 1934, que de existir un décimo cuerpo cuadrático de número de clases 1, este debía tener un discriminante mayor que $\exp(10^7)$, el resultado de Baker junto con el citado demuestran la conjetura de Gauss.

Los métodos citados junto con fórmulas de productos de L funciones con más términos fueron usadas por Baker para completar la lista de los cuerpos cuadráticos imaginarios con número de clases 2. Ver [B3] y [B4].

En el caso de los cuerpos cuadráticos reales, el conocimiento existente sobre cuestiones parecidas es mucho más limitado ya que aunque se sospecha que hay infinitos cuerpos cuadráticos reales con número de clases 1 esta conjetura no ha sido demostrada ni desmentida.

Además de sus numerosos artículos de investigación, han sido especialmente celebrados tres de sus libros *Transcendental Number Theory* (1975), *Transcendence Theory: advances and applications* (1978) y *A concise introduction to the Theory of Numbers*[2] (1988).



En particular una de las recensiones del primer libro citado, y que apareció en el *Bulletin of the A. M. S.* dice:
El libro de Baker es EL LIBRO sobre números transcendentes. En sólo 128 *páginas recorre la mayoría de aquellas áreas que han alcanzado resultados definitivos...*
Como literatura, puede compararse con las mejores obras de Landau, Rademacher y Titchmarsh.

Este tipo de comentarios puede hacerse extensivo a los otros libros citados donde con concisión y elegancia se recogen resultados y puntos de vista sobre los temas tratados que resultan altamente esclarecedores y sugerentes.

CONCLUSIÓN

Hay numerosos e importantes problemas, además de los citados de manera explícita antes, en los que la obra de Alan Baker se ha aplicado con excelentes resultados. Esto pone de manifiesto aún más, la profunda y extensa influencia de sus métodos en diferentes áreas de la Teoría de Números.

Por ejemplo, usando su trabajo, Coates [C] ha deducido una forma de encontrar todas las curvas elípticas con un conductor dado.

Otros ejemplos son las aproximaciones de números algebraicos por racionales o los resultados sobre la no anulación del regulador $p-$ádico de un cuerpo abeliano.

[2] Existe una edición en castellano, *Breve introducción a la Teoría de Números*, Alianza Editorial (1986).

En las ecuaciones hiperelípticas y en las funciones elípticas de Weierstrass también se han producido avances importantes por la influencia de la obra de Baker.

La lista es prácticamente interminable... por lo que para finalizar quizá lo mejor sea recordar de nuevo los comentarios de P. Turán en los que afirma que la obra de Baker ejemplifica de forma convincente dos principios.

Primero, que además de la valiosa tendencia de desarrollar una teoría para solucionar un problema, también compensa atacar directamente problemas difíciles y concretos...

Segundo, continua Turán, *muestra que la solución directa de un problema profundo suele conducir de forma natural hacia una teoría rica y acaba estableciendo un contacto fructífero con otros problemas importantes de la matemática.*

Bibliografía

[A] Atiyah, M., Lagolnitzer, D., (Editores): *Fields Medals,* A. K. Peters, Ltd. (1998).

[B1] Baker, A.: *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I, II, III, IV,* Mathematika 13 (1966), 204-216, Mathematika 14 (1967), 102-107, 220-228, Mathematika 15 (1968), 204-216.

[B2] Baker, A.: *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press (1975).

[B3] Baker, A.: *A remark on the class-number of quadratic fields,* Bull. London Math. Soc. 1 (1969), 98-102.

[B4] Baker, A.: *Imaginary quadratic fields with class-number* 2, Annals of Math. 94 (1971), 139-152.

[C] Coates, J.: *An effective $p-$adic analogue of a theorem of Thue, I, II, III,* Acta Arithmetica 15 (1969), 279-305, Acta Arithmetica 16 (1970), 399-412, Acta Arithmetica 16 (1970), 425-435.

[S] Stark, H.: *A complete determination of the complex quadratic fields with class-number one,* Michigan Math J. 14 (1967), 1-27.

Juan Carlos Peral
Departamento de Matemáticas
Universidad del País Vasco
Apartado 644, 48080 Bilbao
correo-electrónico: `mtppealj@lg.ehu.es`