La Columna de Matemática Computacional

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta*, alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página*[1]*) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.*

En este número...

...presentamos un artículo que ilustra, con algún detalle, el uso de los programas de cálculo simbólico en la docencia universitaria de los rudimentos del Análisis Matemático. Los profesores Afonso y Dorta, de la Universidad de La Laguna, tienen una amplia experiencia en la utilización y difusión de software en este contexto. En su artículo nos proponen una metodología concreta para la enseñanza de las nociones de convergencia puntual y uniforme en sucesiones funcionales, mediante el uso de las facilidades gráficas y de cálculo (numérico o simbólico) de MAPLE V.

El uso de programas de ordenador como herramienta auxiliar en la enseñanza universitaria de matemáticas es una técnica que gana, día a día, nuevos practicantes, tanto por la generalización de los medios materiales para realizarla como por el particular estado de conocimientos y de madurez matemática de los alumnos que acceden a la educación superior. La Universidad tiene que dar una respuesta *docente* a este estado de cosas, una respuesta que no puede consistir, simplemente, en lamentar el alto índice de fracaso. Es preciso tomar medidas específicas que permitan recomponer una situación que se deteriora por momentos. El uso de los programas de cálculo simbólico es sólo una herramienta que puede ayudarnos, pero no es una panacea.

Por último, tal vez convenga recordar que, detrás de este potente software hay un trabajo de varias décadas de programación y, sobre todo, de *matemática computacional.*

[1]Tomás Recio. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071 Santander. Correo electrónico: `recio@matesco.unican.es`

Convergencia puntual y uniforme: Una perspectiva docente con software

por

Rosa María Afonso Gutiérrez y José Ángel Dorta Díaz

Introducción

Muchos profesores estamos de acuerdo en que los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme de sucesiones funcionales son de gran importancia para un matemático, para un físico, para un ingeniero... Por otra parte se admite que iniciar a los alumnos que llegan del bachillerato en la definición (ε, ν) de límite de una *sucesión numérica* resulta una tarea de cierto grado de dificultad (Afonso, R. M. & Dorta, J. A., [1]). Ciertamente los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme de *sucesiones funcionales* conllevan un doble grado de complejidad impuesto por el hecho de combinar simultáneamente dos variables (la n, que varía en $\mathbb{N}$, y la x que varía en $\mathbb{R}$), hecho al que los alumnos que ingresan en la Universidad no están acostumbrados.

Somos conscientes de que los conceptos de convergencia puntual y uniforme y teoremas afines no son fácilmente asimilados por la mayoría de los alumnos de los primeros cursos universitarios; incluso, sobre el concepto de convergencia uniforme, en muchas Facultades y Escuelas Técnicas, se discute la conveniencia o no de presentarlo a los alumnos; además podemos afirmar que en las Facultades de Matemáticas, donde es obligatorio su estudio, los resultados que obtienen los alumnos podrían mejorarse notablemente.

En los estudios de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, durante el curso 1998-1999, en la instrucción–formación de los conceptos de Análisis Matemático relacionados con las suceciones y series funcionales y la convergencia uniforme de las mismas, se utilizó un método clásico.

El análisis de las contestaciones de los estudiantes a una pequeña encuesta que realizamos al término de dicho curso nos permitió comprobar que la asimilación y estudio de dichas cuestiones no les había resultado fácil. Además, el uso exclusivo del método docente clásico no lograba despertar un interés que les impulsara a aventurarse en la investigación de cuestiones más profundas relacionadas con el tema. Por otro lado, y sabiendo que la muestra de alumnos elegida para la encuesta estaba constituida por aquellos que habían obtenido las mejores calificaciones, observamos que éstos, después de cuatro meses, presentaban importantes lagunas conceptuales; ello manifiesta que los métodos puramente tradicionales no son suficientemente eficaces, incluso a corto plazo.

Este artículo pretende contribuir al progreso de las técnicas de enseñanza–aprendizaje en este tipo de conceptos, dando un enfoque complementario que facilite el proceso. En este sentido nuestra declaración de intenciones sería:

“Esforzarnos para conseguir que el conocimiento y la asimilación de conceptos difíciles llegue al mayor número posible de estudiantes de Ciencias”

Ello sólo se hace posible mediante un esfuerzo, por parte de la comunidad educativa universitaria, encaminado a la búsqueda de nuevos métodos y técnicas que faciliten la enseñanza de estos conceptos; desde este punto de vista aquella motivación necesaria resultará favorecida por el uso de técnicas atractivas de aprendizaje donde el alumno se vea involucrado y tenga oportunidad para *visualizar y manipular*.

El uso del ordenador y en concreto, de un software como MAPLE V puede ser considerado como un *organizador genérico*, el cual nos proporcionará las herramientas necesarias para dar una visión holística y/o integradora. Ello hace indispensable la realización de un análisis curricular (como el que iniciamos en este artículo) que promueva el uso del ordenador como elemento fundamental para el aprendizaje, dado que: *"Cambia la percepción del estudiante sobre la matemática, permite la concentración en la resolución de problemas, invita a experimentar, revitaliza el énfasis geométrico-visual, motiva y proporciona madurez"* (Amillo, Ballesteros y otros, 1995, [2]).

Antecedentes

De la bibliografía que hemos recogido para desarrollar nuestro trabajo destacamos la relativa al uso de la tecnología en el estudio de sucesiones y series infinitas; en concreto nos llamó la atención, por la calidad de la experiencia realizada, uno de los últimos trabajos citados: "El impacto de la tecnología en el estudio de series infinitas" de Hortensia Soto Johnson (1998, [6]). En éste se hace un estudio comparativo de los efectos y resultados obtenidos en una experiencia en la que se aplican tres métodos diferentes de enseñanza sobre la comprensión del concepto de serie infinita, así como sobre la actitud de los estudiantes hacia el uso de la tecnología en la clase de Cálculo.

Dos de estos métodos, *el proyecto CALC* (El Cálculo como un Curso de Laboratorio) y *el proyecto revisado de Illinois*, forman parte de la llamada Reforma del Cálculo, que promueve un cambio en los cursos de esta materia. Dicho cambio dirige su interés en mejorar la comprensión conceptual y para ello enfatiza la importancia de alternar los métodos tradicionales de instrucción y el uso de la tecnología que compromete a los estudiantes como aprendices activos (Leitzel & Lucker, 1995, citados en [6]). Por tanto, ambos proyectos son el producto de un esfuerzo por modificar la dinámica magistral de los cursos tradicionales de Cálculo, en los que se ha constatado, mediante investigaciones relativamente recientes, que la mayoría de los alumnos que terminan satisfactoriamente un curso de Cálculo no entienden realmente lo que hacen:

"*Son incapaces de explicar conceptos, de argumentar el "por qué" del procedimiento mecánico que usan para resolver determinadas cuestiones y por lo general, se sienten impotentes a la hora de enfrentarse a problemas no rutinarios"* (Mason, Selden y Selden, 1989, citados en [6]).

Desde esta perspectiva, las investigaciones llevadas a cabo ponen de manifiesto que los estudiantes, por lo general, muestran una actitud positiva hacia el uso de software por considerarlo ventajoso en el estudio y la comprensión del Cálculo (Bookman & Friedman, 1994; Heid, 1988, citados en [6]). Por otro lado, la mayoría de los trabajos en los que se ha verificado el éxito del uso de la tecnología en la enseñanza, se han realizado sobre temas relacionados con Cálculo Diferencial e Integral, omitiendo, salvo excepciones, el concepto fundamental de serie infinita; esta omisión tiene lugar incluso en estudios importantes en los que se examina el impacto de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas (Bookman & Friedman, 1994; Penn, 1994, citados en [6]).

La experiencia descrita de Soto Johnson nos incitó a la realización de otra similar que ponga de manifiesto los beneficios que aportan los métodos tradicionales apoyados con el uso de software. Es en esta línea en la que nos proponemos desarrollar nuestro estudio, ampliando el campo iniciado por Hortensia Soto Johnson para series numéricas infinitas al campo de las sucesiones y series funcionales.

Una propuesta circular

En la literatura sobre Educación Matemática se ha extendido la idea de que es importante utilizar la génesis y evolución de los conceptos para el desarrollo del proceso de enseñanza–aprendizaje (Hitt, F., 1998, [5]); pero además, cuando tratamos de iniciar a los alumnos en el estudio de nuevos objetos, pensamos que los profesores, consciente y/o inconscientemente, seguimos un esquema conceptual natural en cuatro estadios, que por orden de aparición ayudarán a estructurar y consolidar los conceptos e ideas matemáticas (Afonso, R. M. & Dorta, J. A., [1]):

- Fase verbal
- Fase de representación simbólica
- Fase de representación visual
- Fase de manipulación

Este esquema conceptual constituye una síntesis en cuatro fases del proceso a seguir para la adquisición y asimilación de ***conceptos nuevos.*** No es, por tanto, un esquema conceptual de la naturaleza de los presentados por Dubinsky y otros (1986, [3]), en los cuales se parte de unos conocimientos adquiridos por el individuo, que ha tenido oportunidad de interiorizarlos y manipularlos mentalmente para, posteriormente, dar sentido y resolver una situación problemática que es percibida como tal. Dubinsky [3] define esquema conceptual como *"una colección más o menos coherente de objetos cognitivos y procesos mentales internos para manipular dichos objetos".*

Este esquema conceptual es posterior al que nosotros presentamos y es fruto del esfuerzo y la actividad mental que el sujeto realiza para "avanzar" en su conocimiento. Nuestro objetivo, en cambio, es presentar una metodología que permita al profesor obtener más y mejores resultados cuando "comienza" su labor docente e introduce conceptos nuevos.

Tradicionalmente, la enseñanza de las Matemáticas ha participado de las dos primeras etapas de nuestro esquema. La fase de representación visual ha sido una herramienta poco explotada durante mucho tiempo; unas veces por rechazo por parte de las corrientes puramente formalistas y otras porque no se le ha dado importancia como elemento de trabajo que facilita y clarifica la adquisición de contenidos (Miguel de Guzmán, [4]). En la fase de manipulación y/o aplicación el estudiante investiga y explora la realidad matemática con apoyo de las nuevas tecnologías.

Seguidamente desarrollamos una propuesta para la enseñanza de la convergencia puntual y uniforme. Por razones de espacio, nos vemos obligados a sintetizar nuestra exposición, sobre todo en lo referido a las fases verbal y simbólica. Haremos hincapié en las etapas de visualización y manipulación mediante el uso de MAPLE V como software educativo. Por las mismas razones no incluímos los programas con los que se han confeccionado las figuras, aunque pensamos que su construcción por parte de los alumnos es determinante para que ellos mismos "fabriquen su conocimiento" (si el lector está interesado en los programas diríjase a `jadorta@ull.es`).

Convergencia puntual de una sucesión de funciones

Preámbulo. El concepto de sucesión funcional lo expresamos inicialmente y sin recurrir a grandes alardes simbólicos, de la siguiente forma: *"Una sucesión de funciones es un proceso infinito:* $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots$"

Consideramos importante insistir en que el *dominio de definición* es el mismo para todas las funciones $f_n(x), n = 1, 2, 3, \ldots$, de la sucesión y éste es un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ o subconjunto de $\mathbb{R}$. Además, conviene hacer notar que una sucesión de funciones es en realidad una función de dos variables: La n que varía en el conjunto de los números naturales y la x que toma valores en el intervalo I donde cada elemento de la sucesión (cada función) está definido. Si mantenemos constante el valor de n obtenemos una función real de variable real x, la cual tomará valores en el intervalo I; si por el contrario fijamos x, pongamos por caso $x = x_0$, la sucesión de funciones da lugar a una sucesión numérica que denominamos "*sucesión numérica asociada a* x_0".

Técnicamente, la definición más extendida de sucesión de funciones es la de una aplicación de $\mathbb{N}$ en F, siendo F el conjunto de todas las funciones reales de variable real definidas en I.

En la Figura 1 hemos representado las *sucesiones numéricas asociadas* a los puntos $x_1 = 0.6$ y $x_2 = 0.8$ de la sucesión funcional

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & si \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & si \quad 1 \le x \le 1.5. \end{cases}$$

La observación de una gráfica de este tipo permite al alumno establecer una conexión visual entre los conceptos de sucesión funcional y *sucesión* *numérica asociada* a un punto x_0. Desde este punto de vista MAPLE V facilita la tarea del profesor que puede dar al alumno una visión global e integradora de los conceptos tratados (Hitt, F., 1998, [5]).

A partir de este ejemplo, el lector puede apreciar algunas de las ventajas que ofrece un software de las características de MAPLE V: Sería una labor engorrosa para el alumno obtener el esbozo de una sucesión de funciones mediante los métodos tradicionales; MAPLE V permite al estudiante obtenerlo fácil y directamente, a partir de una serie de instrucciones básicas, sencillas de aprender. Además la visualización de la gráfica permite ya intuir algunas de las propiedades que posteriormente vamos a estudiar.

Por otra parte, dada una sucesión funcional, en la fase manipulativa el alumno indagará sobre la forma algebraica y visual de sus primeros términos. La imagen proporcionada por el software le aproximará a su conocimiento y al de otras suceciones funcionales semejantes, ya que es muy fácil para un estudiante **manipular** estos programas cambiando coeficientes, exponentes, signos, etc. en las variables x y n para obtener otros ejemplos y otras representaciones. Dejamos abierto al profesor el planteamiento de otras cuestiones que puedan resultar útiles para alcanzar determinados objetivos que se propongan[2].

Fase verbal y fase de representación simbólica. Sea $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones cuyo dominio de definición es un intervalo I. Decir que la sucesión funcional $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función determinada $f(x)$, es lo mismo que afirmar que, si fijamos un x_0, cuando n se hace muy grande, los términos de la *sucesión numérica asociada* a ese punto $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$, se aproximan cada vez más, "*y a su propio ritmo*", a $f(x_0)$; así pues: *"Cada sucesión numérica asociada converge a su propio ritmo"*

Por tanto: $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente hacia $f(x)$ en I si para cada $x_0 \in I$ existe $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, lo cual simbólicamente equivale a expresar: Para todo x_0 se tiene que

$$[\forall\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists\nu \in I\!N, \nu = \nu(\varepsilon, x_0) \text{ } y \text{ } \forall n \in I\!N, n \geq \nu \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Desde una perspectiva educacional, hacemos notar que:

- el subíndice ν depende tanto del ε elegido como del punto $x = x_0$;

- este subíndice es el parámetro que controla la "velocidad o ritmo de convergencia" de la sucesión numérica asociada correspondiente, el cual es inversamente proporcional a ν;

- la definición lleva implícito un *proceso visual dinámico* que podemos clasificar como "*dinamismo puntual*".

[2]Por ejemplo: **1**. Analizar desde un punto de vista gráfico sucesiones funcionales de tipo a) Algebraico: Polinómicas, racionales, irracionales, etc..., b) Trascendente: Trigonométricas, potenciales, exponenciales, hiperbólicas, etc...; **2**. Estudiar su comportamiento en el dominio de definición: Estudio local, máximos, mínimos, etc...; **3.** Calcular límites desde un punto de vista intuitivo, etc...

Fase de representación visual. Consideremos la sucesión $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$. Su representación gráfica obtenida mediante MAPLE V se muestra en la Figura 2.

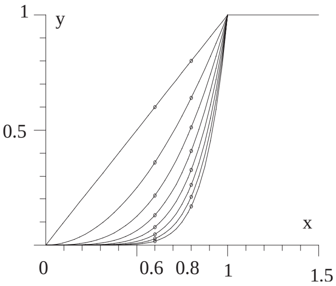

Figura 1

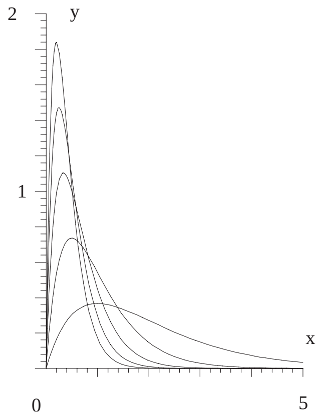

Figura 2

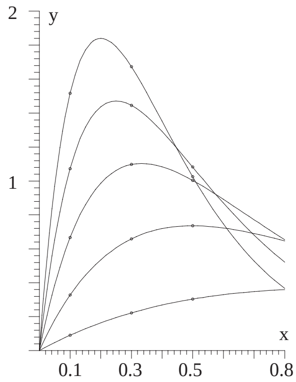

Figura 3

Sabemos que para cada número real x_0 obtenemos una sucesión de números reales $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ que hemos denominado *sucesión numérica asociada a* x_0. Para aclarar ideas elijamos, por ejemplo, tres números reales: 0.1, 0.3 y 0.5, y en un mismo gráfico, Figura 3, representemos la sucesión funcional y los cinco primeros elementos de las correspondientes sucesiones numéricas asociadas: $f_n\left(\frac{1}{10}\right)$, $f_n\left(\frac{3}{10}\right)$, $f_n\left(\frac{5}{10}\right)$.

MAPLE V nos permite cuantificar los diferentes valores de algunos términos avanzados de cada una de las sucesiones asociadas; en este caso hemos evaluado los términos del 31 al 35:

$f_n\left(\frac{1}{10}\right)$	$f_n\left(\frac{3}{10}\right)$	$f_n\left(\frac{5}{10}\right)$
4.329228350	.02635760594	.00008915155499
4.174049688	.02080626785	.00005761800945
4.016576930	.01639206863	.00003716541038
3.857950007	.01289066652	.00002392884002
3.699179469	.01011964514	.00001537986983

De la observación directa de las gráficas (Figuras 4, 5 y 6), de las tablas anteriores y otras que el lector pueda listar, se intuye que las sucesiones numéricas asociadas convergen (cada una a su propio ritmo) hacia 0 y en consecuencia la sucesión funcional "*converge puntualmente*" hacia la *función cero* en el intervalo $(0, +\infty)$. MAPLE V nos proporciona el valor exacto del límite mediante la instrucción **limit:** $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 x e^{-nx} = 0$.

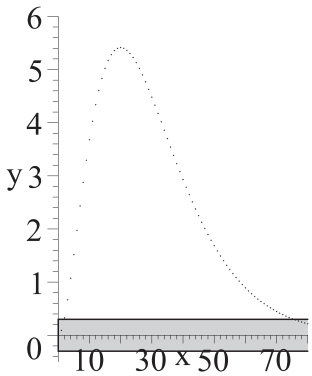

Figura 4

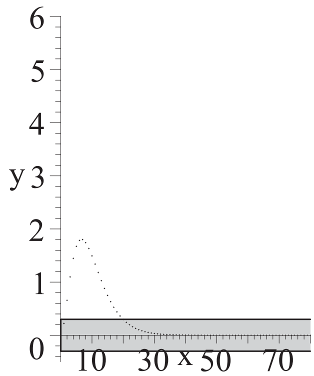

Figura 5

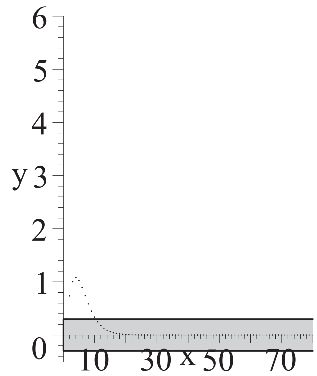

Figura 6

En principio es suficiente la obtención de la gráfica para comprobar que el rítmo de convergencia es diferente en cada $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$: En nuestro ejemplo se observa que en $x_1 = \frac{1}{10}$ la convergencia es mucho más lenta que en $x_3 = \frac{3}{10}$ y en ésta más aún que en $x_5 = \frac{5}{10}$. Este sería el momento idóneo para plantear al alumno las siguientes cuestiones:

a) ¿Cómo cuantificamos de "forma más precisa" la velocidad de convergencia de la sucesión funcional en cualquier punto de su dominio? **b)** ¿De qué manera analizaríamos el parámetro que nos va a servir para comparar ese rítmo en varios puntos?

Para ello haremos uso de la definición formal de convergencia puntual: En primer lugar fijamos $\varepsilon = 0.3$ y estudiamos por separado el comportamiento de las tres sucesiones numéricas asociadas. En cada caso se resuelve la inecuación: $|f_n(x_0) - 0| < 0.3$, que nos permitirá obtener el valor del subíndice ν a partir del cual los términos de las sucesiones asociadas correspondientes son menores que 0.3; gráficamente ésto equivale a decir que en una representación bidimensional, los términos de $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ (con $n \geq \nu$) penetran dentro de una **banda** centrada en la función límite (en este caso la función nula) y de anchura 2ε (Afonso, R. M. & Dorta, J. A., [1]).

En nuestro estudio elaboramos tres programas diferentes, correspondientes a cada una de las tres sucesiones numéricas asociadas. MAPLE V nos proporciona: **1**. El valor numérico del subíndice $\nu = \nu(0.3, x_0)$; **2**. La gráfica de la sucesión numérica; **3**. La gráfica de la banda de semianchura 0.3 que nos permite confirmar que a partir del subíndice obtenido los términos de la sucesión penetran en la misma.

Para la sucesión numérica asociada al punto $x_1 = \frac{1}{10}$, $\left\{f_n\left(\frac{1}{10}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$el valor de ν obtenido fue $\nu_1 = 76$ (el primer término que penetra en la banda es el que ocupa el lugar 76: $f_{76}\left(\frac{1}{10}\right)$), y en este caso diremos que la convergencia es "lenta" en comparación con las otras sucesiones asociadas; para la asociada a $x_3 = \frac{3}{10}$ se obtuvo $\nu_3 = 20$, lo cual nos informa que la convergencia de la sucesión en este punto es más rápida que en el anterior; y para la sucesión numérica asociada a $x_5 = \frac{5}{10}$ obtuvimos $\nu_5 = 11$ (a partir del undécimo todos los términos de la sucesión numérica "caen" dentro de la banda) y la convergencia en este caso es "muy rápida". Todo ello lo corroboramos gráficamente: Como consecuencia del análisis de estos ejemplos el alumno comprueba formal y visualmente que el parámetro que mide la velocidad de convergencia es ν, y que éste depende tanto del valor x_0 elegido como de la semianchura de la banda, ε (en este caso $\varepsilon = 0.3$). Finalmente, en la *fase manipulativa*, el profesor propondrá al alumno ejercicios análogos a los descritos en este trabajo, con el objeto de que alterne simultáneamente varios registros de representación que permitan obtener finalmente una visión holística y/o global del concepto de convergencia puntual.

Convergencia uniforme

Fase inicial o verbal. Sea $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$una sucesión funcional definida en un intervalo I. Diremos que $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente* hacia una determinada función $f(x)$ en un cierto intervalo $A \subseteq I$, si el conjunto de todas las sucesiones numéricas asociadas $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$convergen a $f(x_0)$ con la misma velocidad, siendo $x_0 \in A$; por tanto "*convergencia uniforme*" equivale a "*convergencia puntual al mismo ritmo*" o "*acercamiento global*". Desde esta perspectiva todos los elementos de la sucesión funcional (todas las funciones) se "acercan globalmente" y al mismo tiempo hacia $f(x)$. Al asimilar el hecho de que todas las sucesiones numéricas asociadas convergen al mismo ritmo, el alumno puede comprender que la idea de *convergencia uniforme* es independiente del x_0 elegido y como consecuencia, las sucesiones numéricas asociadas desempeñan un papel poco significativo.

Fase de representación simbólica. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$*converge uniformemente* hacia $f(x)$ en un conjunto $A \subseteq I$ significa que para todo ε positivo (por pequeño que éste sea), existe algún número natural ν a partir del cual la distancia en vertical desde $f_n(x)$ hasta $f(x)$ es menor que ε (y en consecuencia tan pequeña como nosotros queramos), y ésto para todo x de A. Simbólicamente: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para cada $n \geq \nu$, para todo ε y para todo $x \in A$, o lo que es lo mismo:

$$\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists \nu \in I\!N, \nu = \nu(\varepsilon) \text{ } y \text{ } \forall x \in A \text{ } y \text{ } \forall n \in I\!N, \text{ } n \geq \nu \Rightarrow$$

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

Desde una perspectiva educacional, obsérvese que:

- Decir *"para todo ε positivo, por pequeño que sea"* es equivalente a decir *"para toda banda por estrecha que ésta sea".* El paralelismo entre ambas expresiones resulta claro al observar la gráfica y analizar la definición simbólica de este tipo de convergencia;

- El número positivo ε es un valor que nosotros elegimos arbitrariamente y que controla el ancho de la banda;

- El subíndice ν (número natural que ahora depende sólo de ε, no de x) controla la velocidad a la que, "globalmente", las funciones de la sucesión penetran del todo "dentro de la banda"; a este subíndice lo podemos denomimar "índice de penetración" el cual es inversamente proporcional "al ritmo de convergencia". Simbólicamente la definición lo expresa de la siguiente forma: $(\forall n \geq \nu)$ y $(\forall x \in A)$ los términos de la sucesión funcional caen dentro de la banda: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

- Esta definición, igual que la de la convergencia puntual, lleva implícito un "*proceso visual dinámico*": Si allí el dinamismo era "*punto a punto*", aquí, en la convergencia uniforme este dinamismo es *"global"*.

Fase de representación visual. Desde un punto de vista estrictamente visual, comprobamos, haciendo uso de la definición, que la sucesión funcional $f_n(x) = \dfrac{\frac{1}{2}n(x-3) + \sin(n(x-3))^3}{n}$ converge uniformemente hacia una cierta función $f(x)$ en el intervalo $[-1, 7]$; nótese que esta sucesión resulta de modificar (por razones estéticas) esta otra: $f_n(x) = \dfrac{nx + \sin(nx)^3}{n}$, la cual, converge hacia $f(x) = x$. En la Figura 7 presentamos algunos elementos de la misma.

Con MAPLE V calculamos el límite:

$$lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(x-3) + \sin(n(x-3))^3}{n} = \frac{x-3}{2}.$$

A continuación tomamos $\varepsilon = 0.3$ (semi-anchura de la banda). En la Figura 8 representamos conjuntamente la banda y un cierto número de funciones de la sucesión funcional para así obtener el índice de penetración, ν:

Se observa que a partir del término 4º (éste incluido) todas las funciones quedan dentro de la banda. En este caso hemos representado gráficamente las seis primeras funciones; el lector puede comprobar que si se representan las tres primeras éstas quedan en parte fuera y que, a partir de la cuarta, todas penetran completamente. Esto es equivalente a afirmar, simbólicamente:

$$\frac{x-3}{2} - 0.3 < f_n(x) < \frac{x-3}{2} + 0.3, \ \forall n \geq 4 \ y \ \forall x \in [-1, 7]$$

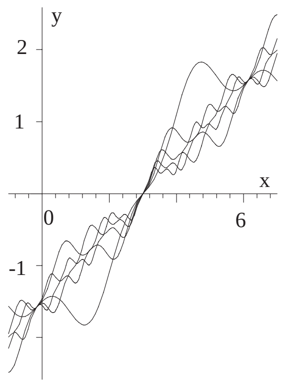

Figura 7

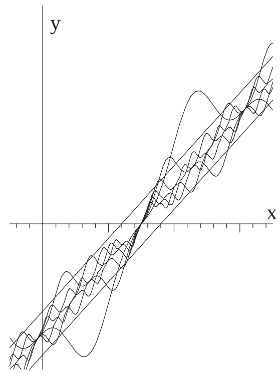

Figura 8

En la *fase de manipulación* presentamos la sucesión funcional:

$$f_n(x) = \frac{\frac{1}{2}n\,(x-6)^2 + \sin\left(n^3\,(x-6)^3\right)}{n} + 4$$

cuyo límite se comprueba mediante MAPLE V que es una parábola:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n\,(x-6)^2 + \sin\left(n^3\,(x-6)^3\right)}{n} + 4 = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 22.$$

En la Figura 9 presentamos dos elementos de esta sucesión y en la 10 añadimos la banda cuyos límites son $f\,(x) - 0.3$ y $f\,(x) + 0.3$, todo lo cual el alumno puede construir con un sencillo programa.

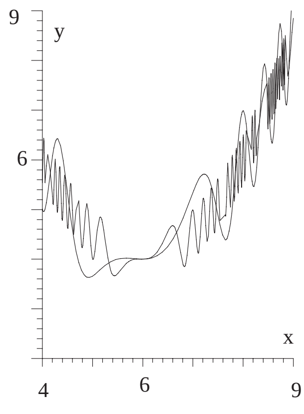

Figura 9

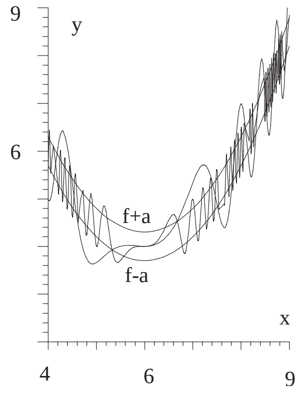

Figura 10

En una segunda instancia se complementaría el programa utilizado anteriormente con la instrucción "**animate**", la cual nos permite observar el proceso en movimiento y confirmar así los aspectos dinámicos de estos conceptos. En dicho programa incluimos un modelo novedoso al representar *la sucesión funcional, la función límite, la banda y el movimiento* simultáneamente y haciendo uso de la instrucción "**display**" dentro de otro "**display**":

```
restart:with(plots):
f:=(x,n) → (((1/2)*n*(x-6)^2+ sin((n*(x-6))^3))/n)+4;
x[1]:=4:x[2]:=9:y[1]:=2:y[2]:=9:
epsilon:=a:a:=0.3:
s:=x → (1/2)*x^2-6*x+22:
r:=plot(s(x),x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2]):
t:=plot({s(x)+a,s(x)-a},x=x[1]..x[2],y=y[1]..y[2],color=black):
v:=textplot([[6,4.6,‘f+a‘],[6,3.4,‘f-a‘]]):
p:=animate(f(x,n),x=4..9,n=1..20,frames=25,color=black):
c:=display({p},insequence=true,color=black):
display({t,v,c},thickness=2);
```

Bibliografía

[1] Afonso Gutiérrez, R. M.; Dorta Díaz, J. A.: *Representación visual y aprendizaje en un contexto de software educativo.* Revista Cubo Matemática Educacional. Universidad de Frontera. Temuco. Chile. Vol. 2, 2000, págs.: 39-71.

[2] Amillo, Ballesteros, Guadalupe & Martín.: *Conceptos, ejercicios y sistemas de computación matemática, MapleV.* McGrawHill (1996).

[3] Dubinsky, E.; Lewin, p.: *Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic descomposition of induction and compactness.* The Journal of Mathematical Behavior, 5, 55-92. 1986.

[4] Guzmán, Miguel De: *El rincón de la pizarra.* Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis. Pirámide (1996).

[5] Hitt Espinosa, Fernando.: *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum (1997).* Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. MÉXICO. Educación Matemática. Vol. 10. No. 2. Agosto 1998.

[6] Soto-johnson, Hortensia.: *Inpact of Technology on Learning Infinite Series.* The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 1998. Vol. 5, No. 2.

Rosa María Afonso Gutiérrez
José Ángel Dorta Díaz
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
correos electrónicos: rosiafonso@terra.es
jadorta@ull.es