Medias y su relación con integrales elípticas

por

Baldomero Rubio Segovia y Jesús Rubio Segovia

En este artículo se obtienen expresiones de la media aritmético-geométrica y de la media geométrico-armónica en términos de integrales elípticas, mediante la utilización de la transformación de Landen, la cual se usa también para otras aplicaciones.

1. MEDIAS

Para dos números positivos a y b, $(a > b)$, las medias aritmética, geométrica y armónica de ellos se definen respectivamente por

$$A(a,b) = \frac{1}{2}(a+b), \qquad G(a,b) = \sqrt{ab}, \qquad H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$$

y es fácil probar que

$$a > A(a,b) > G(a,b) > H(a,b) > b\,.$$

Conviene observar la relación que existe entre estas medias y las de sus inversos $a' = \dfrac{1}{b}$, $\;b' = \dfrac{1}{a}$: La media armónica es el inverso de la media aritmética de los inversos, y la media geométrica es el inverso de la media geométrica de los inversos.

Se pueden definir dos procesos iterativos de medias:

a) Designamos $A(a,b)$ y $G(a,b)$ por a_1 y b_1, y definimos

$$a_{n+1} = A(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} = G(a_n, b_n)$$

para cada número natural n.

b) Designamos $G(a,b)$ y $H(a,b)$ por a_1 y b_1, y definimos

$$a_{n+1} = G(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} = H(a_n, b_n)\ .$$

En ambos casos se observa que

$$0 < a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

por lo cual en cada proceso las dos sucesiones a_n y b_n convergen al mismo número. Estos se denominan media aritmético-geométrica (denominación atribuída a Gauss) y media geométrico-armónica de a y b, y los designamos $AG(a,b)$ *y* $GH(a,b)$. Obsérvese que $GH(a,b)$ es el inverso de $AG(a',b')$.

También se podría considerar un tercer proceso:

$$\begin{array}{rclrcl} a_1 & = & AG\,(a,b)\,, & b_1 & = & GH\,(a,b) \\ a_{n+1} & = & AG\,(a_n,b_n)\,, & b_{n+1} & = & GH\,(a_n,b_n) \end{array}$$

en donde asimismo las sucesiones $a_n,\ b_n$ convergen al mismo número. ¿Cúal es? ¿Cómo se obtienen $AG\,(a,b)$ y $GH\,(a,b)$ en función de a y b?

2. Un cambio de variable para una integral elíptica

Las respuestas a las preguntas anteriores se encuentran en relación con integrales elípticas y un cambio de variable debido a Landen que supone una modificación de los parámetros que intervienen en estas integrales.

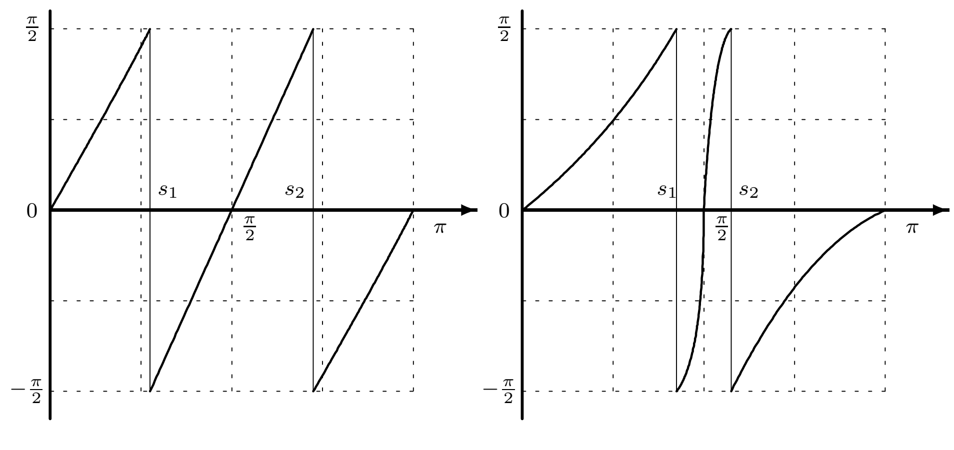
La integral elíptica de primera especie de módulo p

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2 t}}, \qquad 0<p<1,$$

puede reducirse a otra del mismo tipo en el intervalo $[0,\pi]$ y con módulo mayor. Ello se consigue mediante el cambio de variable (Landen, 1775) $t(s)$ definido para $s\in[0,\pi]$ de la siguiente manera: la función

$$\varphi\,(s) = \mathrm{arc\ tg}\left(\frac{\mathrm{sen}(2s)}{p+\cos(2s)}\right)$$

(ver la figura 1) está definida en el intervalo $[0,\pi]$ salvo en los puntos s_1 y s_2 $(s_1<s_2)$ en donde se anula el denominador:



$p=0.1$ $\qquad$ $p=0.9$

Figura 1: La función φ para dos valores de p

La función

$$t(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{si} \quad s \in [0, s_1) \\ \varphi(s) + \pi & \text{si} \quad s \in (s_1, s_2) \\ \varphi(s) + 2\pi & \text{si} \quad s \in (s_2, \pi] \end{cases}$$

puede definirse en s_1 y s_2 de manera que sea derivable y

$$t'(s) = 2\frac{1 + p\cos 2s}{1 + 2p\cos 2s + p^2}, \quad s \in [0, \pi] \ .$$

Se observa que t es creciente, ya que su derivada es positiva, puesto que el denominador anterior es mayor o igual que $(1 + p\cos 2s)^2$, que es positivo, y t transforma $[0, \pi]$ en $[0, 2\pi]$. La modificación de t al variar el parámetro p se aprecia en un ligero cambio en la curvatura de la gráfica.

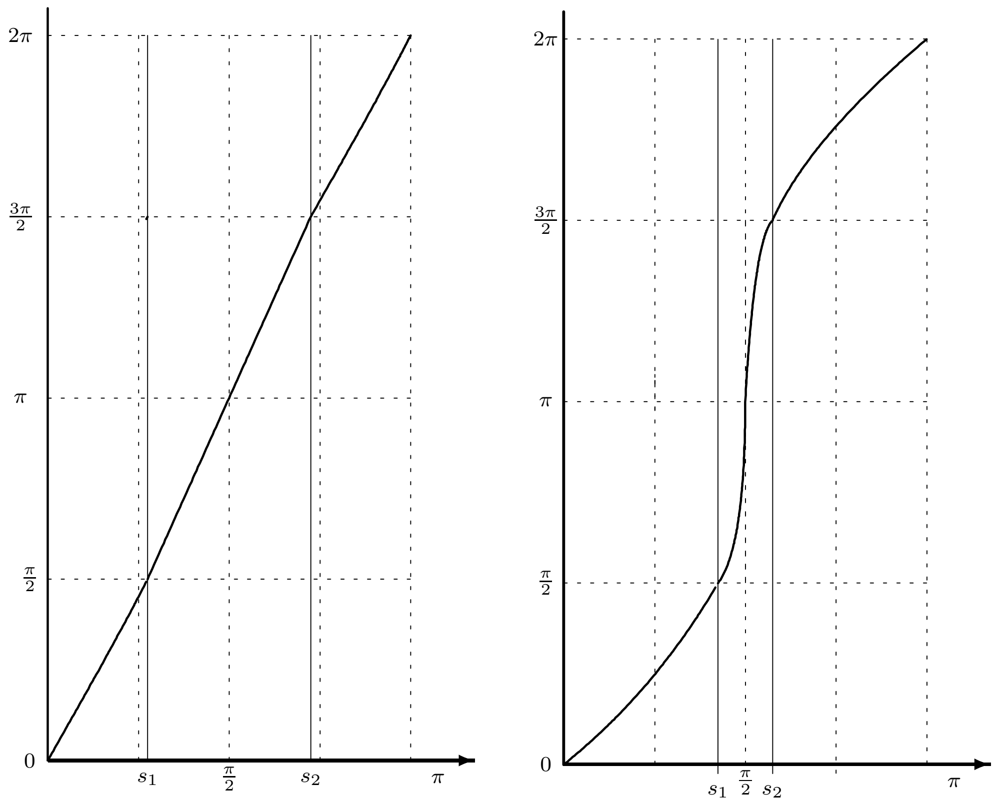


Figura 2: La función φ para dos valores de p

Por tener período π el cuadrado de la función seno, resulta

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2 t}} = \int_0^{\pi} \frac{t'(s)\,ds}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2\varphi(s)}}$$

Vamos a observar ahora que, salvo un factor, la segunda integral tiene la misma estructura que la primera. Utilizando las requeridas identidades trigonométricas, obtenemos en primer lugar

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2\varphi(s)}} = \frac{\sqrt{1+2p\cos 2s+p^2}}{1+p\cos 2s},$$

y después

$$\frac{t'(s)}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2\varphi(s)}} = \frac{2}{\sqrt{1+2p\cos 2s+p^2}}$$

Ahora expresamos $\cos 2s$ en función de $\mathrm{sen}^2 s$ y resulta finalmente

$$\int_0^{\pi} \frac{t'(s)\;ds}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2\varphi(s)}} = \frac{2}{1+p}\int_0^{\pi} \frac{ds}{\sqrt{1-q^2\,\mathrm{sen}^2 s}}$$

siendo

$$q = \frac{2\sqrt{p}}{1+p}, \quad \text{o bien} \quad p = \frac{1-\sqrt{1-q^2}}{1+\sqrt{1-q^2}}$$

Por ser $0 < p < 1$, resulta que $(1+p)^2 < 4$ y

$$q^2 > \frac{4p}{(1+p)^2} > p > p^2,$$

es decir, que $q > p$. Hemos reducido así la integral elíptica de módulo p en $[0, 2\pi]$ a una integral elíptica de módulo q mayor que p en $[0, \pi]$. La relación obtenida puede expresarse también de la forma

$$\int_0^{\pi} \frac{ds}{\sqrt{1-q^2\,\mathrm{sen}^2 s}} = \frac{1+p}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2 t}}$$

y, teniendo en cuenta la simetría de los integrandos en $[0, \pi]$ y en $[\pi, 2\pi]$, resulta asimismo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1-q^2\,\mathrm{sen}^2 s}} = (1+p)\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2 t}}$$

lo cual expresa que la integral de módulo q se puede reducir a otra de módulo menor en el mismo intervalo $[0, \pi/2]$.

La relación anterior será usada para establecer la conexión entre integrales elípticas y medias.

3. RELACIÓN ENTRE INTEGRALES ELÍPTICAS Y MEDIAS

Sea $a > b > 0$. La integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{a^2 \cos^2 s + b^2 \operatorname{sen}^2 s}}$$

se puede expresar de la forma

$$\frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1 - q^2 \operatorname{sen}^2 s}},$$

siendo

$$q^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

De acuerdo con lo establecido en la sección anterior, esta integral elíptica de modulo q se puede reducir a la de módulo p, siendo

$$p = \frac{1 - \sqrt{1 - q^2}}{1 + \sqrt{1 - q^2}} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Resulta así

$$\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{a^2 \cos^2 s + b^2 \operatorname{sen}^2 s}} = \frac{1}{a}(1 + p) \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 t}}.$$

Sustituyendo en la fórmula anterior el valor obtenido antes para p, se observa que el radicando puede expresarse de la forma

$$\frac{1}{4} \left[(a + b)^2 - (a - b)^2 \ \operatorname{sen}^2 t \right],$$

y también

$$\frac{1}{4} a^2 \cos^2 t + \frac{1}{4} b^2 \cos^2 t + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} ab \operatorname{sen}^2 t\,.$$

Ahora es suficiente hacer uso de la identidad

$$\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ab \left(\cos^2 t + \ \operatorname{sen}^2 t \right)$$

para obtener finalmente

$$\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{a^2 \cos^2 s + b^2 \operatorname{sen}^2 s}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{A(a,b)^2 \cos^2 t + G(a,b)^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

es decir, la primera integral no se altera sustituyendo a y b por sus medias aritmética y geométrica respectivamente. Iterando el proceso de medias aritméticas y geométricas como se indicó en la sección 1, se obtiene asimismo,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{a^2\cos^2 s + b^2 \operatorname{sen}^2 s}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2\cos^2 t + b_n^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

y puesto que a_n y b_n convergen a la media aritmético-geométrica $AG(a,b)$, resulta finalmente

$$\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{a^2\cos^2 s + b^2 \operatorname{sen}^2 s}} = [AG(a,b)]^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

y

$$AG(a,b) = \frac{\pi/2}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{a^2\cos^2 s + b^2 \operatorname{sen}^2 s}}}$$

En cuanto a la media geométrico-armónica de a y b, basta tener en cuenta que su inverso es la media aritmético-geométrica de los inversos de a y b. Se observa que

$$AG(a,b)GH(a,b) = ab,$$

por lo que en el proceso iterativo para estas medias, descrito en la sección 1, la convergencia se produce a la media geométrica de a y b.

4. Origen geométrico de la transformación de Landen

En la sección 2 hemos considerado la transformación t debida a Landen y construída según se ha señalado a partir de la función φ que verifica

$$\operatorname{tg}[\varphi(s)] = \frac{\operatorname{sen}(2s)}{p + \cos(2s)},\ 0 < p < 1.$$

Es natural pensar que esta forma de calcular tiene una interpretación geométrica y es justamente el intento de calcular la media aritmético-geométrica del par de números positivos a, b $(a > b)$ lo que la proporciona. En la sección 3 hemos utilizado a este fin la relación anterior poniendo

$$p = \frac{a-b}{a+b}.$$

Es decir, lo crucial para la construcción que hemos efectuado parte de la función φ que verifica

$$\operatorname{tg}[\varphi(s)] = \frac{\operatorname{sen}(2s)}{\frac{a-b}{a+b} + \cos(2s)}.$$

Pues bien, aquí parece radicar el punto de partida para concebir la transformación de Landen con otros significados para el parámetro p. La relación anterior tiene un origen geométrico el cual Jacobi menciona en una carta a M. Hermite. Esta cita la hemos encontrado en un artículo de M. C. Kupper en el *Journal Fur Matematik* [Kupper, M. C., 1857] , en donde el autor utiliza este significado geométrico de la transformación de Landen para otros propósitos.

El origen geométrico de la función φ es el siguiente:

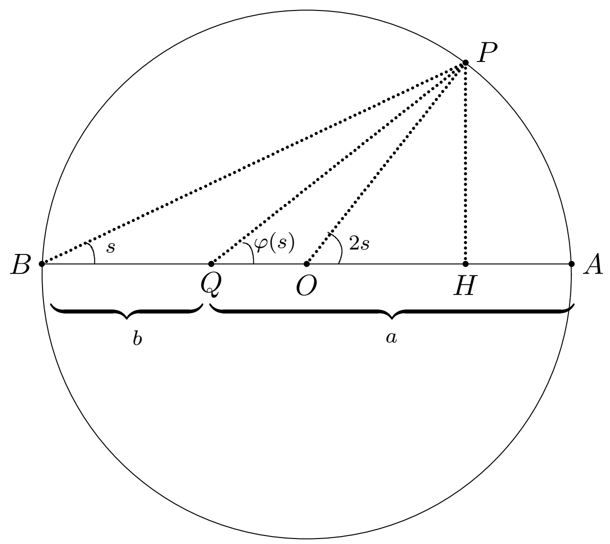


Figura 3: Interpretación geométrica de la transformación de Landen

Consideremos un círculo de centro O y diámetro $a+b$. Fijemos un diamétro BA del mismo y el punto Q de éste tal que el segmento BQ tiene longitud b y el segmento QA tiene longitud a. Sea P un punto variable sobre el círculo. (Para expresar más fácilmente el razonamiento que sigue vamos a suponer que P está por encima del diámetro BA y se proyecta ortogonalmente sobre el diámetro BA en un punto H del segmento OA. Naturalmente, para otras posiciones de P se puede hacer un razonamiento análogo). Sea s el ángulo ABP, y sea $\varphi(s)$ el ángulo AQP. Es claro entonces que el ángulo AOP es $2s$, y que el segmento QO tiene longitud $\frac{1}{2}(a-b)$. Resulta

$$\operatorname{sen}(2s) = \frac{2\,PH}{a+b}\,, \qquad \cos(2s) = \frac{2\,OH}{a+b}\,,$$

y

$$\frac{\operatorname{sen}(2s)}{\dfrac{a-b}{a+b}+\cos(2s)}=\frac{2\,PH}{a-b+2\,OH}=\frac{PH}{\dfrac{a-b}{2}+OH}=\frac{PH}{QH}=\operatorname{tg}[\varphi(s)],$$

que es la relación que queríamos obtener.

Podemos observar también que el punto especial s_1 al que hacíamos referencia en la sección 2 corresponde al punto P que se proyecta sobre el punto Q; entonces es $\varphi(s)=\pi/2$, y el denominador de la fórmula es 0.

La construcción anterior sugiere asimismo el significado geométrico de la fórmula

$$\operatorname{tg}[\varphi(s)]=\frac{\operatorname{sen}(2s)}{p+\cos(2s)}\,,\quad 0<p<1.$$

Sólo es preciso repetir el proceso indicado anteriormente cuando el diámetro BA del círculo considerado de centro O tiene longitud 2, y el punto Q de tal diámetro se fija de manera que el segmento QO tiene longitud p.

5. Extensión de la transformación de Landen

En la sección 2 hemos definido la función t creciente que transforma el intervalo $[0,\pi]$ en el intervalo $[0,2\pi]$ y cuya derivada es

$$t'(s)=2\frac{1+p\cos(2s)}{1+2p\cos(2s)+p^2}\,.$$

Ahora vamos a extender la definición de t al intervalo $[0,+\infty)$ de manera que siga siendo una función creciente y con la misma derivada indicada anteriormente. Ello es posible por ser $t'(0)=t'(\pi)$ y porque t' tiene periodo π. La definición de $t(s)$ cuando s está en el intervalo $(\pi,2\pi]$ se obtiene sumando 2π a la expresión que la define en $(0,\pi]$; en el intervalo $(2\pi,3\pi]$, sumando 4π a la citada expresión, etc. Es fácil observar, asimismo, que t tiene una inversa $s=t^{-1}$ también diferenciable. (Fig 4). Es claro que $t(s)>s$ y que $s(t)<t$.

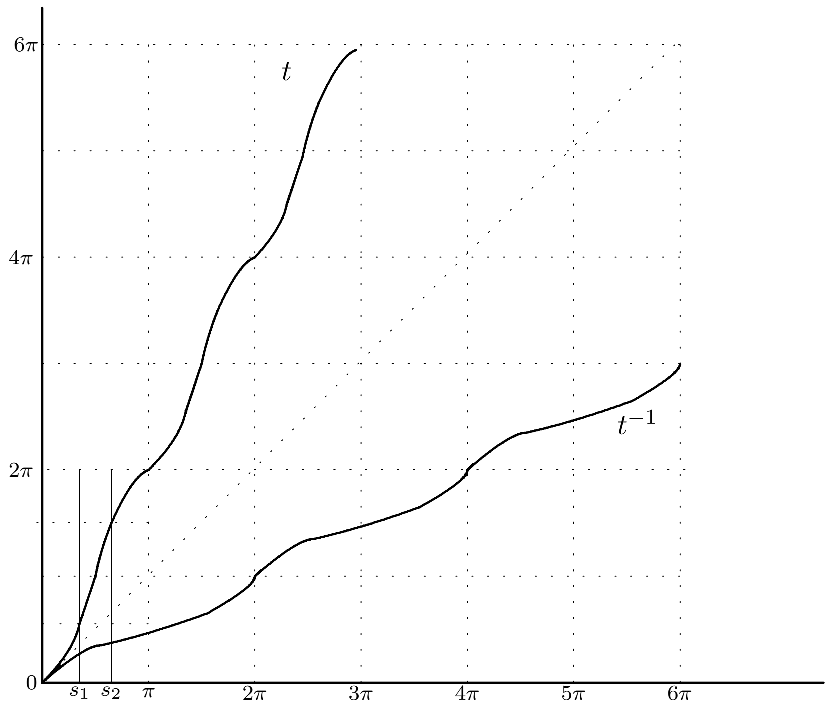


Figura 4: La función t y su inversa extendidas

Extendido a $[0,+\infty)$ el cambio de variable t como hemos indicado, ahora podemos considerar, de forma análoga a la expresada en la sección 2, una transformación de la integral elíptica arbitraria de primera especie de amplitud T y de módulo p:

$$E\,(p,T)=\int_0^T \frac{dt}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2 t}}\,, \qquad T>0, \quad 0<p<1.$$

El citado cambio de variable proporciona otra integral elíptica con amplitud S menor que T y módulo q mayor que p. Designamos $S=s\,(T)$. Resulta

$$E\,(p,T)=\int_0^S \frac{t'\,(s)\,ds}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2 t}},$$

y de aquí, como en la sección 2, se obtiene

$$(1+p)\;\;E\,(p,T)=2\;E\,(q,S)\,,$$

siendo

$$q=\frac{2\sqrt{p}}{(1+p)}, \qquad \text{o bien} \qquad p=\frac{1-\sqrt{1-q^2}}{1+\sqrt{1-q^2}},$$

y

$$\operatorname{tg}(T) = \frac{\operatorname{sen}(2S)}{p + \cos(2S)}, \qquad \text{o bien} \qquad \operatorname{sen}(2S - T) = p \operatorname{sen}(T).$$

Estas dos últimas relaciones admiten aún otra expresión interesante. Se obtiene a partir de la identidad

$$\operatorname{tg}(T - S) = \frac{\operatorname{tg}(T) - \operatorname{tg}(S)}{1 + \operatorname{tg}(T)\operatorname{tg}(S)}$$

y sustituyendo en ella la expresión de tg$T$ en función de S. Después de unos pocos cálculos resulta

$$\operatorname{tg}(T - S) = \sqrt{1 - q^2}\,\operatorname{tg}(S).$$

Sin embargo, la conexión entre S y T se establece con más precisión mediante las funciones t y s que antes hemos descrito. No obstante, estas relaciones trigonométricas nos serán de utilidad.

6. Aplicaciones

La relación

$$(1 + p)\ E(p, T) = 2\, E(q, S)$$

que hemos obtenido en la sección anterior, relaciona dos integrales de primera especie a través del cambio de variable t y de su inverso s. De ella resultan dos transformaciones posibles,

$$E(p, T) \to E(q, S) \qquad y \qquad E(q, S) \to E(p, T).$$

Además, estas transformaciones pueden iterarse. Como vamos a comprobar a continuación, esto lleva a interesantes procesos de convergencia que permiten hacer buenas estimaciones de las integrales elípticas. En el tiempo en que se desarrollaban estos cálculos no se disponía de las técnicas de la computación que hoy tenemos, por lo que el interés hay que verlo desde un punto de vista histórico. En [*Schoemilch*, 1873] puede encontrarse un estudio bastante detallado de la transformación de Landen, aunque no tiene el rigor que hoy cabe exigir, por lo que ha sido necesario subsanar sus deficiencias.

Comencemos con el paso de $F(p, T)$ a $F(q, S)$. Cada iteración del mismo supone aumentar el módulo y disminuir la amplitud. Designamos los sucesivos pasos

$$(p_0, T_0) \to (p_1, T_1) \to (p_2, T_2) \ldots$$

siendo

$$p_{n+1} = \frac{2\sqrt{p_n}}{1+p_n} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(2T_{n+1} - T_n) = p_n \operatorname{sen}(T_n)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Designamos también t_n y su inversa s_n las funciones que rigen los sucesivos pasos, por lo que $T_{n+1} = s_n(T_n) < T_n$. Para las integrales correspondientes resulta

$$E(p_0, T_0) = \frac{2}{1+p_0} \cdot \frac{2}{1+p_1} \cdots \frac{2}{1+p_{n+1}} \cdot E(p_n, T_n),$$

lo cual puede expresarse también así

$$E(p_0, T_0) = E(p_n, T_n) \cdot \frac{p_1}{\sqrt{p_0}} \cdot \frac{p_2}{\sqrt{p_1}} \cdots \frac{p_n}{\sqrt{p_{n-1}}},$$

o bien,

$$E(p_0, T_0) = E(p_n, T_n) \frac{p_n}{\sqrt{p_0}} \sqrt{p_1 p_2 ... p_{n-1}}.$$

Por la construción efectuada, los módulos crecen pero todos son menores que 1, por lo cual p_n converge a un número positivo menor o igual que 1. La relación que liga a p_{n+1} con p_n asegura que p_n converge a un número positivo p que verifica

$$p = \frac{2\sqrt{p}}{1+p}$$

por lo que sólo el número 1 cumple la condición exigida a p.

En cuanto a las amplitudes T_n, por decrecer y ser positivas convergen a un número no negativo T que se puede aproximar mediante las funciones s_n, es decir, T es el límite de la sucesión $s_n(T_n)$. Se verifica asimismo

$$\operatorname{sen}(2T_{n+1} - T_n) = p_n \operatorname{sen}(T_n),$$

lo cual expresa la estabilización de T_n cuando p es próximo a 1.

Observando la naturaleza de las funciones s_n, si ponemos

$$T_0 = 2^r \pi, \quad r \in N,$$

resulta que en la sucesión finita $T_1, T_2, \ldots, T_r, T_{r+1}$, cada término es la mitad del anterior, y así

$$T_{r+1} = \frac{\pi}{2} \ \text{ y } \ T_n < \frac{\pi}{2} \text{ si } n > r+1,$$

por lo que la sucesión T_n converge a un número T menor que $\pi/2$. Así sucede también para cualquier otro valor de T_0, habida cuenta de la monotonía de las funciones s_n y que T_0 será menor o igual que $2^r\pi$ para algún número natural r.

Lo anterior permite estudiar la convergencia de la sucesión T_n y de las integrales $E(p_n, T_n)$ considerando sólo los valores de n para los cuales es $T_n < \frac{\pi}{2}$. Sea s el menor valor de n que tiene esa propiedad. En el intervalo $[0, T_s]$ el integrando de $E(p_n, T_n)$, $n > s$, está acotado por la función integrable $1/\cos t$, por lo cual se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada para obtener

$$\lim_{n\to\infty} F(p_n, T_n) = \int_0^T \frac{dt}{\cos t} = \log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{T}{2}\right)\right],$$

y de aquí resulta

$$F(p_0, T_0) = \frac{1}{p_0}\log\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{T}{2}\right)\right]\sqrt{p_1 \cdot p_2 \cdots}$$

Lo anterior pone de manifiesto que T debe ser positivo, y que el producto infinito $p_1 \cdot p_2 \cdots$ es también positivo.

En tiempos en los que no se disponía de herramientas adecuadas para la evaluación de este tipo de integrales, la fórmula anterior ofrece gran interés porque el producto infinito que en ella aparece converge muy deprisa ya que los factores empiezan muy pronto a ser practicamente 1.

Experimentemos también con el paso de $F(q, S)$ a $F(p, T)$. Es decir, ahora crecen las amplitudes y decrecen los módulos. Las sucesivas iteraciones las expresaremos

$$(q_0, S_0) \to (q_1, S_1) \to (q_2, S_2) \cdots$$

en donde para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$q_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - q_n^2}}{1 + \sqrt{1 - q_n^2}},$$

y $S_{n+1} = t_n(S_n) > S_n$.

También se verifica

$$\operatorname{tg}(S_{n+1} - S_n) = \sqrt{1 - q_n^2}\,\operatorname{tg}(S_n).$$

En cuanto a q_n, converge por ser una sucesión decreciente de números positivos, y su límite q debe ser no negativo y menor que 1, y verifica además la condición

$$q = \frac{1 - \sqrt{1 - q^2}}{1 + \sqrt{1 - q^2}}.$$

De aquí resulta que $q = 0$.

En cuanto a las amplitudes, constituyen una sucesión creciente, y la relación que las liga, junto con que q_n converge a 0, muestra que para valores grandes de n es S_{n+1} aproximadamente el doble de S_n. Esta circunstancia se verifica exactamente en el caso en que S_0 es $\pi/2$, es decir,

$$S_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad S_1 = \pi, \qquad S_2 = 2\pi, \ \ldots\ , \ S_n = 2^{n-1}\pi.$$

lo cual se obtiene simplemente observando la naturaleza de las funciones t_n.

Al iterar n veces la transformación considerada se obtiene

$$E\left(q_0, S_0\right) = \left(1 + q_1\right)\left(1 + q_2\right)\cdots\left(1 + q_n\right)2^{-n}E\left(q_n, S_n\right).$$

y en particular,

$$E\left(q_0, \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + q_1\right)\left(1 + q_2\right)\cdots\left(1 + q_n\right)2^{-n}E\left(q_n, 2^{n-1}\pi\right).$$

De las relaciones anteriores resulta

$$\frac{E\left(q_0, S_0\right)}{E\left(q_0, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{E\left(q_n, S_n\right)}{E\left(q_n, 2^{n-1}\pi\right)}.$$

Nos hemos encontrado ahora con las dos sucesiones

$$\left(1 + p_1\right)\left(1 + p_2\right)\cdots\left(1 + p_n\right) \quad \text{y} \quad 2^{-n}E\left(p_n, S_n\right)$$

cuya posible convergencia hay que analizar. Probaremos que la segunda converge, y lo mismo sucede para la primera ya que el producto de ambas es $E\left(q_0, S_0\right)$. Hay que notar que por la comparación que hemos hecho antes entre las dos integrales $E\left(q_0, S_0\right)$ y $E\left(q_0, \frac{\pi}{2}\right)$ resulta que la convergencia de $2^{-n}E\left(q_n, S_n\right)$ puede reducirse a la de $2^{-n}E\left(q_n, 2^{n-1}\pi\right)$. Para esta última se obtiene, teniendo en cuenta que los integrandos tienen período π y la simetría de éstos en los intervalos $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$, etc.

$$2^{-n}E\left(q_n, 2^{n-1}\pi\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{\sqrt{1 - q_n^2 \operatorname{sen}^2 s}},$$

Puesto que q_n converge a 0, el teorema de convergencia monótona asegura que esta última integral converge a $\dfrac{\pi}{2}$.

7. Algunas referencias sobre integrales elípticas, funciones elípticas y sus autores

Es un resultado bien conocido del cálculo elemental que, si R es una función lineal o cuadrática de una variable x, entonces la integral de una función racional de x y $\sqrt{R}$ es una función elemental. Sin embargo, la situación es completamente diferente cuando R es un polinomio de tercer o cuarto grado sin un factor repetido. Las integrales de esta naturaleza se denominaron integrales elípticas, y de ellas se ocuparon varios importantes matemáticos del siglo XVIII. Se trataba de investigar en principio qué tipo de funciones aparecían a través de tales integrales, ya que no parecía poderse hacer mediante las llamadas funciones elementales.

John Landen, que ha sido citado varias veces en este trabajo, fue un matemático inglés que vivió entre 1719 y 1790. Se hizo conocido hacia 1744, y fue elegido *fellow* de la *Royal Society of London* en 1766. Sus investigaciones sobre integrales elípticas son conocidas bajo la denominación de transformaciones de Landen. Hay también un teorema suyo en el que se expresa el arco de hipérbola en función de arcos de dos elipses. Landen escribió también sobre Astromonía y Física, y contribuyó en el estudio del movimiento de rotación. Junto con Leonhard Euler, quien hizo en 1771 una aportación que puede considerarse vinculada con las integrales elípticas, Landen es un precursor de este tipo de estudios.

Pero es Adrien-Marie Legendre quien hace un estudio sistemático de estas integrales. La denominación de integrales elípticas se debe a que surgen al calcular la longitud de la elipse. En efecto, la función

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a],$$

describe la mitad superior de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, por lo que la longitud total de la elipse viene dada por

$$L = 4\int_0^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Se obtiene

$$L = \frac{4}{a}\int_0^a \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = 4a\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - p^2t^2}}{\sqrt{1 - t^2}}dt,$$

siendo

$$p^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad \text{y} \quad x = at.$$

La última integral admite aún dos expresiones: El cambio de variable $t = \operatorname{sen}(\varphi)$ la convierte en

$$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2(\varphi)}\, d\varphi\,;$$

y también resulta, evidentemente, en términos de la variable t,

$$L = 4a\int_0^1 \frac{1 - p^2t^2}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - p^2t^2)}}dt,$$

que pone de manifiesto su carácter de integral elíptica de acuerdo con la definición que hemos dado.

Para la lemniscata de Bernoulli, que en coordenadas polares se expresa mediante

$$r^2 = 2a^2 \cos(2t)\,,$$

el cálculo de la longitud de uno de sus arcos viene dado por la integral elíptica

$$a\sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

la cual juega un papel importante en los trabajos de Gauss.

Legendre nació en París en 1752 y murió en 1833. Fue profesor de matemáticas en la Escuela Militar de París entre 1775 y 1780, y en 1795 enseñó en la Escuela Normal. En una primera época estudió la atracción de esferoides, y sobre esta materia escribió cuatro memorias. En su obra *Nouvelles méthodes pour la determination des orbites de comètes* (1806) se hace el primer tratamiento del método de mínimos cuadrados. También hizo importantes aportaciones en geodésicas, y en sus *Eléments de Géométrie* adaptó y simplificó muchas de las proposiciones de Euclides. En esta obra Legendre da una demostración simple de la irracionalidad de π, y conjetura que no puede ser raíz de una ecuación algebraica de grado finito con coeficientes racionales.

En 1786 Legendre continúa la investigación sobre integrales elípticas en el punto en el que la habían dejado Leonhard Euler y John Landen. Por algún tiempo fue el único matemático que se ocupó de esta materia. En su obra más importante, *Traité des fonctions elliptiques (1825-37)*, probó que cualquier integral elíptica puede expresarse como suma de una función elemental y una combinación lineal con coeficientes constantes de los tres tipos siguientes

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-p^2t^2)}}\,,$$

$$\int \frac{\sqrt{1-p^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}dt\,,$$

$$\int \frac{dt}{(1-nt^2)\,\sqrt{(1-t^2)\,(1-p^2t^2)}}dt\,,$$

que fueron denominadas formas normales de Legendre de primera, segunda y tercera especie, respectivamente, de las integrales elípticas. Nótese que el cambio de variable $t = \mathrm{sen}\varphi$ convierte las dos primeras en

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi)}}, \qquad \int \sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi)}d\varphi.$$

Legendre investigó también en Teoría de Números, y en los dos volúmenes de su obra *Theorie des nombres* (1830) hizo un estudio sistemático de su propia obra y la de sus predecesores en esta materia.

La investigación sobre integrales elípticas continúa después de Legendre con la obra de Abel y Jacobi, lo que supone un cambio esencial en la concepción del problema. Este cambio consiste esencialmente en poner el énfasis en la función $u(s)$ definida por la integral

$$u(s) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-p^2t^2)}}dt, \quad 0 < p < 1.$$

Puesto que es creciente y continua, u tiene una inversa u^{-1} . En el caso extremo $p = 0$ se observa que u es el arco seno y u^{-1} es el seno, y por esta razón la función u^{-1} obtenida para $0 < p < 1$ se puede considerar como una generalización de la función seno. Se designa sn, y es una de las llamadas funciones elípticas, que juegan un papel importante en la teoría de funciones de variable compleja, y que aparecen también en algunas aplicaciones físicas como, por ejemplo, en el movimiento de un péndulo simple.

Si en la integral anterior hacemos de nuevo el cambio de variable $t = \mathrm{sen}\varphi$, el intervalo de integración $[0, s]$ se convierte en $[0, \mathrm{arcsen}(s)]$ y resulta

$$u(s) = \int_0^{\mathrm{arcsen}(s)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi)}}.$$

Si designamos

$$\omega(x) = \int_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi)}},$$

es claro también que ω tiene inversa continua, que suele denominarse función de amplitud y se designa am. En conexión con la función elíptica sn que antes hemos descrito, de la definición de su inversa resulta, poniendo $s = \mathrm{sen}x$

$$u(\mathrm{sen}x) = \int_0^x \frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi)}} = \omega(x),$$

es decir, ω es la composición $u \circ$seno, por lo que para sus inversas resulta $am =$ arcseno $\circ\, sn$, es decir $sn =$ seno $\circ\, am$. Esta es la razón por la que la función elíptica sn se suele denominar seno amplitud. Podemos definir asimismo la función coseno amplitud, designada cn, como la composición coseno $\circ\, am$. La tercera función elíptica fundamental suele denominarse delta amplitud, se designa dn, y es la derivada de la función amplitud.

Abel y Jacobi estudiaron propiedades de estas funciones elípticas, especialmente su doble periodicidad, y obtuvieron teoremas de adición, esto es, expresiones racionales de $sn(u+v)$ en términos de los valores de las funciones elípticas para u y para v. A partir de estos resultados probaron la imposibilidad de expresar las integrales elípticas de Legendre en términos de funciones elementales.

Se puede señalar también que las funciones elípticas de Abel y Jacobi dieron lugar a un concepto más amplio de función elíptica en el marco de la variable compleja. En concreto, la doble periodicidad expresa que para una función $f(z)$ de variable compleja existen dos periodos complejos z_1 y z_2, cuyo cociente no es real, tales que

$$f(z) = f(z + z_1) = f(z + z_2).$$

En estas circunstancias, el estudio de una tal función puede reducirse a su comportamiento en un paralelogramo de vértices $a, a + z_1, a + z_2, a + z_1 + z_2$, o bien en el toro que se obtiene identificando los lados opuestos de éste. Se llamaron funciones elípticas a las funciones holomorfas con doble periodicidad que únicamente tienen singularidades que son polos. La teoría moderna de funciones complejas tiene aquí su punto de arranque.

Niels Henrik Abel fue un matemático noruego que nació en 1802 y murió a los veintisiete años. Se le considera un pionero en diversas ramas de la matemática moderna. Cuando sólo tenía trece años, su talento matemático fue advertido por uno de sus profesores, quien le dió a conocer la literatura matemática clásica del momento y le propuso varios problemas originales. Estudió la obra de matemáticos ingleses del siglo XVII y la de sus contemporáneos Euler y Gauss. En 1821 murió su padre y la familia quedó en una situación difícil, pero su profesor le facilitó medios para poder entrar en la Universidad de Christiania (Oslo), en donde se graduó en 1822. Después continuo sus estudios independientemente, con la ayuda económica del profesor que había descubierto su talento. Sus primeros escritos, publicados en 1823, fueron sobre ecuaciones funcionales e integrales. Los amigos de Abel consiguieron del gobierno noruego una beca para que pudiera estudiar en Alemania y Francia. Mientras esperaba esta oportunidad logró la demostración de la imposibilidad de resolver algebraicamente la ecuación general de quinto grado. Hacia el final de 1825 fue a Berlin en donde conoció a August Leopold Crelle, fundador de la famosa revista que se conoce con su nombre, y quien se convirtió en su gran amigo y mentor. Llegó a París en el verano de 1826 y continuó su trabajo en diversos campos. Esperando el reconocimiento a sus méritos envió una Memoria a la Academia de las Ciencias, pero no obtuvo respuesta. Volvió a Noruega y es en esa época cuando desarrolla sus trabajos sobre funciones elípticas que ya hemos reseñado. La enfermedad de tuberculosis que le habían detectado en París pronto deterioró su salud y le llevó a la muerte. Hasta 1841 la Academia de París no publicó la Memoria que Abel había enviado muchos años atrás.

Jacobi fue un matemático alemán que nació en 1804 y murió en 1851. Desde 1827 fue profesor en la universidad de Konigsberg. Sus primeros trabajos versaron sobre la teoría de números, con los cuales ganó la admiración de Gauss. De forma independiente a Abel, Jacobi elaboró una teoría de las funciones elípticas, publicada en 1829. Jacobi investigó también sobre ecuaciones en derivadas parciales de primer orden y sus aplicaciones a la dinámica. La ecuación de Hamilton-Jacobi juega un papel importante en la mecánica cuántica. Asimismo, aplicó las funciones elípticas a la teoría de números.

Queremos citar aquí también a un matemático español, Antonio Rodríguez Sanjuán, que es un gran especialista de la teoría de las integrales elípticas, a la que ha dado notables contribuciones.

Referencias

[1] Hancock, Harris. *Elliptic Integrals.* Mathematical Monographs, 18. John Wiley. New York. 1917.

[2] Landen, John. *An investigation of a general theorem for finding the length of any conic hyperbola, by means of two elliptic arcs, with some others new and useful theorems deduced therefrom.* Phil. Trans. Lond. 1775.

[3] Schloemilch, Oskar. *Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques.* (Traducido por Joseph Graindorge. Gauthiers-Villars. Paris, 1873)

Baldomero Rubio Segovia, Departamento de Análisis Matemático,
Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid,
28040 Madrid
correo electrónico: brubio@eucmax.sim.ucm.es

Jesús Rubio Segovia,
I.E.S. Isaac Newton,
c/ Joaquín Lorenzo, 2, 28035 Madrid
correo electrónico: ies.isaac.newton@centros5.pntic.mec.es