Construyendo Modelos y Resolviendo Problemas con Ecuaciones Funcionales

por

Enrique Castillo

1 Introducción y motivación

Las ecuaciones funcionales fueron para mí un descubrimiento casual, y constituyen una de las ramas más bellas de las Matemáticas, aunque paradójicamente una de las más desconocidas, a pesar de que grandes matemáticos, como D'Alembert, Euler, Gauss, Cauchy, Abel, Weierstrass, Darboux o Hilbert, y otros muchos, trabajaron por algún tiempo con ecuaciones funcionales. Especial mención merecen Aczél [1, 2, 3] y Eichhorn [33, 34, 35], a los que yo debo personalmente mi interés por estos temas.

En este trabajo se pretende motivar al lector y mostrarle la belleza y potencia de esta herramienta para plantear y resolver problemas. Para ello, se utilizan algunos ejemplos clásicos y otros varios, que son el resultado de mi trabajo de investigación y de varias conferencias que he pronunciado en España y en varios países de Europa y América.

1.1 Área de un trapecio[1]

Considérese un trapecio y supóngase que se desconoce cuál es la fórmula de su área, pero que se sabe que es una función de la longitud de sus bases, b_1 y b_2, y de su altura, h, es decir,

$$\textit{Area trapecio} = f(b_1, b_2, h). \tag{1}$$

A alguno de los lectores quizás le parezca difícil imaginar que alguien no conozca esta fórmula, pero más tarde comprobará que éste es el caso de la inmensa mayoría de las personas, pues piensan que el área del trapecio es el producto de la semisuma de las bases por la altura. Las ecuaciones funcionales nos permitirán descubrir una expresión más general. En consecuencia, supondremos que la función f es desconocida y, por tanto, nuestra incógnita.

Para obtener la forma de f se consideran los trapecios de la Figura 1. En el caso del trapecio superior, se divide éste en dos trapecios y se establece que el área del trapecio inicial es la suma de las áreas de los dos trapecios, resultando la ecuación funcional

$$f(b_1 + b_1', b_2 + b_2', h) = f(b_1, b_2, h) + f(b_1', b_2', h). \tag{2}$$

[1] El caso del área de un rectángulo puede verse en Aczél [1]

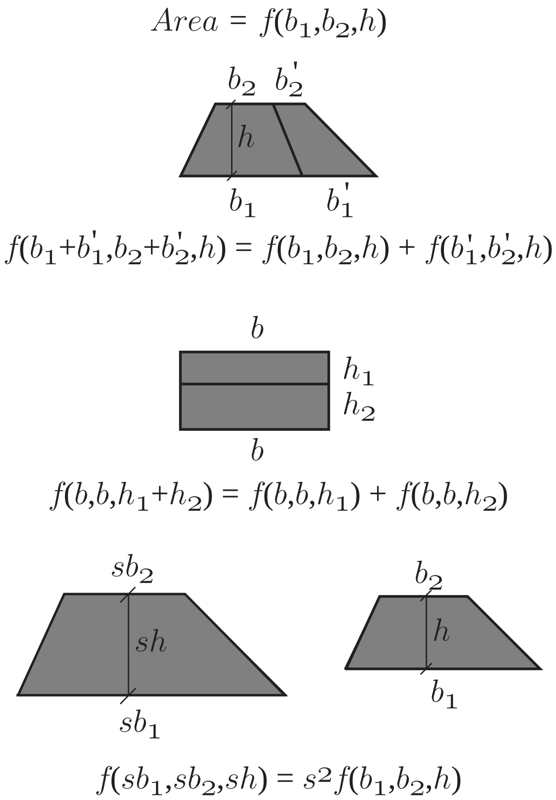

Figura 1: Illustración de cómo obtener el área de un trapecio.

En la parte intermedia de la Figura 1 se muestra un rectángulo, un caso particular de trapecio, que se divide en dos, y se establece la misma condición

$$f(b, b, h_1 + h_2) = f(b, b, h_1) + f(b, b, h_2). \tag{3}$$

Por último, en la parte baja de la Figura 1, se muestra un trapecio y una trapecio homotético de razón s. Puesto que se sabe que las áreas de ambas están ligadas por el cuadrado de s, resulta

$$f(sb_1, sb_2, sh) = s^2 f(b_1, b_2, h), \tag{4}$$

con lo que finalmente, se obtiene el sistema de tres ecuaciones funcionales (2), (3) y (4), cuya única solución es

$$\boxed{Area\ trapecio = f(b_1, b_2, h) = \alpha(b_1 + \beta b_2)h,} \tag{5}$$

donde α y β son constantes arbitrarias positivas.

De entrada, pudiera sorprender la aparición de las constantes α y β. Sin embargo, un análisis más cuidadoso indica que esas constantes están asociadas a las unidades elegidas para medir las bases, la altura y el área resultante. En otras palabras, pudiera darse el caso de que una base nos la dieran en metros, la otra en pulgadas, la altura en centímetros y pidieran el área en piés cuadrados, por lo que dichas constantes jugarían el papel de correctoras de unidades de medida. No deja de ser interesante que ha tenido que recurrirse a las ecuaciones funcionales para descubrir esta fórmula del área del trapecio, que incluye las dimensiones de sus argumentos, bases y altura, y del resultado, el área.

Nótese que la constante α incluye no sólo el conocido factor $1/2$, de la fórmula usual del área del trapecio, sino también las unidades de medida de h, b_1 y del área. Similarmente, β tiene en cuenta posibles unidades de medida diferentes de las dos bases b_1 y b_2.

1.2 Fórmula del interés compuesto

Sea $f(x,t)$ la cantidad total que devuelve el banco si se deposita un capital x en una cuenta durante un periodo de tiempo t. Para el caso del interés compuesto[2], la función $f(x,t)$ debe satisfacer las siguientes condiciones (ver Figura 2):

Hipótesis 1: Se recibe lo mismo al final del periodo t, tanto si se deposita todo el capital $x+y$ en una única cuenta como si se deposita el capital x en una cuenta y el y, en otra.

$$f(x+y,t) = f(x,t) + f(y,t). \tag{6}$$

Hipótesis 2**:** Al final de un periodo de duración $t+u$, se recibe la misma cantidad independientemente de si se deposita un capital x durante todo el periodo, o si tras el periodo de duración t se deposita la cantidad total recibida $f(x,t)$ durante un periodo adicional de duración u.

$$f(x,t+u) = f(f(x,t),u). \tag{7}$$

Pueden criticarse estas hipótesis como poco válidas en la actualidad, pero se trata de las correspondientes al caso del interés compuesto.

Es interesante observar los siguientes hechos, que justifican las hipótesis anteriores:

- Si $f(x+y,t) < f(x,t) + f(y,t)$ el banco invita al cliente a dividir el depósito en cantidades muy pequeñas y a depositarlas en diferentes cuentas para conseguir un interés mayor.
- Si $f(x,t+u) < f(f(x,t),u)$ el banco invita al cliente a cancelar el depósito en cada instante e iniciar otro nuevo, para conseguir un interés mayor.

[2]El caso del interés simple puede verse en Aczél [1]

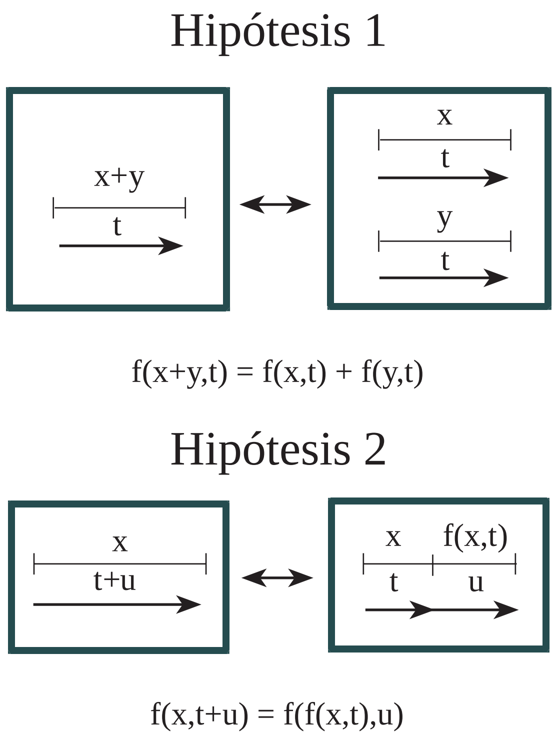

Figura 2: Ilustración de las hipótesis del interés compuesto.

- Si alguna de las desigualdades anteriores se invierte, el banco está ofreciendo más de lo necesario.

Desde este punto de vista, el banco está consiguiendo lo máximo que puede del cliente.

Las hipótesis 1 y 2 conducen al sistema de ecuaciones funcionales:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x+y,t) = f(x,t) + f(y,t) \\ f(x,t+u) = f(f(x,t),u) \end{array}\right\} \quad x, y, t, u \geq 0,} \tag{8}$$

cuya solución general continua es la bien conocida fórmula del interés compuesto

$$\boxed{f(x,t) = x(1+r)^t,} \tag{9}$$

donde r es el rédito.

Afortunadamente para los clientes, la política actual de los bancos no es la del interés compuesto, pues éstos tienen en cuenta la cantidad depositada y la duración del depósito. De hecho, cuanto mayor sea la cantidad depositada

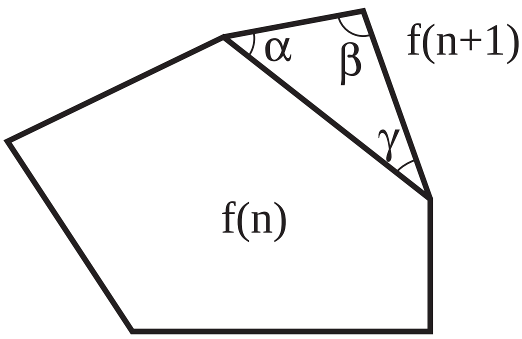

Figura 3: Ilustración de la obtención de la fórmula de la suma de los ángulos internos de un polígono.

mayor será el interés ofrecido (rédito). Similarmente, para periodos de depósito intermedios, los bancos ofrecen un mayor interés. Por ello, se pueden hacer hipótesis alternativas para derivar la fórmula del interés en las condiciones actuales[3].

1.3 Suma de los ángulos internos de un polígono

Sea $f(n)$ la función que da la suma de los ángulos internos de un polígono de n lados. Con objeto de obtener esta función, se considera la propiedad siguiente (ver Figura 3): Sea un polígono de n lados, si se transforma un lado en dos, la suma de los ángulos internos del nuevo polígono, que tendrá $n+1$ lados, se puede obtener como la suma de los ángulos del polígono inicial más la suma de los ángulos de un triángulo. Por tanto, resulta la ecuación

$$f(n+1) = f(n) + \alpha + \beta + \gamma = f(n) + f(3),$$

que es una ecuación funcional (en diferencias) cuya solución general es la conocida expresión

$$\boxed{f(x) = \pi(x-2).} \tag{10}$$

2 Definición de ecuación funcional

Tras los ejemplos anteriores, el lector ya se habrá dado cuenta de que una ecuación funcional no es otra cosa que una ecuación en la que la incógnita o las incógnitas son funciones. Este tipo de ecuaciones ya resulta familiar el lector, puesto que las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones integrales tienen a funciones como incógnitas. Sin embargo, en nuestra definición de ecuación

[3]El lector interesado puede consultar algunas en Castillo [14]

funcional se excluirá este tipo de ecuaciones. Dicho de otra forma, sólo se admitirán ecuaciones en las que la función o funciones aparecen tal cual, o sea, sin derivar ni integrar.

Para ilustrar más claramente el concepto anterior se dan algunos ejemplos a continuación.

Ejemplo 1 (La ecuación de Cauchy) *La solución más general continua al menos en un punto de la ecuación de Cauchy*

$$\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y); \quad x, y \in \mathbb{R},} \tag{11}$$

es

$$\boxed{f(x) = cx, \quad x \in \mathbb{R},}$$

donde c es una constante arbitraria. En otras palabras, entre las funciones continuas al menos en un punto sólo las de esta forma satisfacen (11).

Ejemplo 2 (La ecuación de Pexider) *En la ecuación de Pexider*

$$\boxed{f(x+y) = g(x) + h(y); \quad x, y \in \mathbb{R},} \tag{12}$$

aparecen tres funciones incógnitas f, g y h.

Las soluciones más generales continuas en al menos un punto de las tres funciones que aparecen en (12) son

$$\boxed{f(x) = Ax + B + C; \quad g(x) = Ax + B; \quad h(x) = Ax + C}$$

donde A, B y C son constantes arbitrarias.

Resulta curioso comprobar que de una sola ecuación pueden obtenerse las formas de las tres funciones incógnitas, pues se está acostumbrado a que cada incógnita requiera una ecuación. En el caso de las ecuaciones funcionales, una sola ecuación basta para determinar la estructura de todas las funciones incógnitas. Esta es una característica interesante de las ecuaciones funcionales, que no poseen otro tipo de ecuaciones.

3 LA ECUACIÓN DE LA ASOCIATIVIDAD[4]

Considérese una operación $\oplus$ en el conjunto de los números reales. La propiedad asociativa de $\oplus$ establece que

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z), \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

[4] Esta ecuación ha sido tratada por muchos autores (Véase Aczél [1] y sus citas).

es decir, que da lo mismo operar primero x con y, y el resultado operarlo con z, que operar x con el resultado de operar y con z.

Si se define la función $F(x,y) = x \oplus y$, la ecuación (13) resulta

$$\boxed{F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z)),} \tag{14}$$

que no es otra que la llamada ecuación de la asociatividad, pues si se resuelve se obtienen todas las operaciones asociativas.

La solución más general continua e invertible en ambas variables definida en un rectángulo real de esta ecuación funcional es

$$\boxed{F(x,y) = f^{-1}[f(x) + f(y)],} \tag{15}$$

donde f es una función continua y estrictamente monótona arbitraria. Nótese que si se reemplaza $f(x)$ por $cf(x)$, siendo c una constante arbitraria, la función $F(x,y)$ no se altera.

Es interesante observar que esta solución caracteriza todas las operaciones asociativas en las condiciones indicadas. De hecho, basta elegir una función arbitraria continua y estrictamente monótona f para obtener una operación asociativa. Por ejemplo, eligiendo $f(x) = \log x$ la ecuación (15) resulta

$$F(x,y) = f^{-1}[f(x)+f(y)] = \exp[\log x + \log y] = \exp[\log(x \times y)] = x \times y \tag{16}$$

con lo que se obtiene el producto, que es, evidentemente, una operación asociativa.

Es también interesante observar que en (15) se puede reemplazar la suma por cualquier otra operación asociativa, por lo que cualquier operación asociativa puede expresarse en la forma

$$\boxed{F(x,y) = f^{-1}[f(x) \odot f(y)]} \tag{17}$$

donde $\odot$ es una operación asociativa cualquiera.

4 Ecuaciones de la forma $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(y) = 0$

En este caso se considera la ecuación

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(y) = 0,} \tag{18}$$

donde algunas de las funciones $f_k(x)$ y $g_k(y)$ pueden ser conocidas y el resto, las incógnitas. Su solución la da el teorema siguiente.

Teorema 1 *Todas las soluciones de la ecuación (18) pueden ser escritas en la forma*[5]

$$\boxed{\begin{array}{l}\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_r(x) \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} g_1(y) \\ g_2(y) \\ \dots \\ g_n(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1r+1} & b_{1r+2} & \dots & b_{1n} \\ b_{2r+1} & b_{2r+2} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{nr+1} & b_{nr+2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{r+1}(y) \\ \psi_{r+2}(y) \\ \dots \\ \psi_n(y) \end{bmatrix}\end{array}} \qquad (19)$$

donde r es un número entero entre 0 y n, y $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x)\}$, por un lado, y $\{\psi_{r+1}(x), \psi_{r+2}(x), \dots, \psi_n(x)\}$, por otro, son sistemas arbitrarios de funciones mútua y linealmente independientes, y las constantes a_{ij} y b_{ij} satisfacen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & a_{2r} & \dots & a_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1r+1} & b_{1r+2} & \dots & b_{1n} \\ b_{2r+1} & b_{2r+2} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{nr+1} & b_{nr+2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (20)$$

Nótese que en este caso también puede haber muchas funciones incógnitas aunque sólo se tiene una ecuación. Nótese también que, además de constantes arbitrarias, pueden aparecer funciones arbitrarias (algunas de las funciones φ y/o ψ) en la solución general.

Puesto que este teorema va a ser utilizado para resolver algunas de las ecuaciones funcionales posteriores, es importante entender cómo se usa. Se procede como sigue:

Paso 1: En primer lugar se escriben en forma de matrices columna los diferentes factores que aparecen en (18). Las n funciones de x en una de las matrices, y las n de y en la otra (véase (19)).

Paso 2: Se buscan dos conjuntos de funciones básicas, una para las funciones de x, y otra para las de y, de forma tal que, en total, tengan n funciones (r la base asociada a las funciones de x, y $n-r$ la asociada a las de y). Esto puede dar lugar a varias alternativas, aunque en muchos casos sólo hay una posible.

Paso 3: Se escriben las matrices A y B de coeficientes constantes, según las bases elegidas. Algunos de los coeficientes serán números conocidos, pero el resto serán constantes arbitrarias.

[5]Véase Aczél [1] y Castillo y Ruiz Cobo [28, 29]

Paso 4: Se impone la condición (20).

Paso 5: Se eliminan los coeficientes redundantes, usando (20). Una posibilidad consiste en expresar las constantes b en función de las a, o viceversa.

Paso 6: Se sustituyen éstas en (19) y se obtiene la solución.

4.1 CUBIERTAS CON SECCIONES POLINOMIALES[6]

Cuando se trabaja con estructuras espaciales es interesante elegir superficies cuyas secciones sean funciones sencillas, es decir, fáciles de replantear en la obra. Supóngase que trata de construirse una cubierta para el cubrimiento de una superficie de planta rectangular. Para conseguir el objetivo de sencillez de replanteamiento, se trata de encontrar la cubierta más general de la forma $Z = z(x, y)$ tal que todas sus secciones con planos paralelos a los coordenados sean polinomios de segundo grado, es decir, que pueda expresarse de las dos formas siguientes

$$\begin{aligned} z(x, y) &= a(y)x^2 + b(y)x + c(y) \\ z(x, y) &= d(x)y^2 + e(x)y + f(x), \end{aligned} \tag{21}$$

donde $a(y), b(y)$ y $c(y)$, por un lado, y $d(x), e(x)$ y $f(x)$, por otro, son los coeficientes de los dos polinomios resultantes al cortar por $Y = y$ y $X = x$, respectivamente.

Las ecuaciones (21) expresan que al cortar la cubierta por valores $X =$ *constante* e $Y =$ *constante* se obtienen secciones polinomiales de segundo grado, cuyos coeficientes son funciones de los valores constantes que tomen x o y.

De igualar las dos expresiones para $z(x, y)$ en (21) se obtiene la ecuación funcional

$$\boxed{a(y)x^2 + b(y)x + c(y) - d(x)y^2 - e(x)y - f(x) = 0}$$

que es de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)g_k(y) = 0,$$

y, por tanto, puede utilizarse el Teorema 1 y los pasos anteriormente indicados para resolverla.

En el paso 2, y puesto que los conjuntos de funciones $\{x^2, x, 1\}$ y $\{y^2, y, 1\}$ son linealmente independientes, se tiene que r debe ser al menos 3 y $n - r$

[6]Una generalización del problema aquí tratado puede verse en Castillo e Iglesias [26]

también, lo que conduce a que ambos deben ser iguales a 3, ya que deben sumar 6. Por tanto, (19) queda

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \\ d(x) \\ e(x) \\ f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} a(y) \\ b(y) \\ c(y) \\ -y^2 \\ -y \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

y de (20) resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{41} & a_{51} & a_{61} \\ 0 & 1 & 0 & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ 0 & 0 & 1 & a_{43} & a_{53} & a_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{24}$$

Despejando ahora las constantes b en función de las a se obtiene (Paso 5):

$$\begin{array}{l} b_{14} = a_{41}; \quad b_{15} = a_{51}; \quad b_{16} = a_{61}; \quad b_{24} = a_{42}; \quad b_{25} = a_{52}; \\ b_{26} = a_{62}; \quad b_{34} = a_{43}; \quad b_{35} = a_{53}; \quad b_{36} = a_{63}. \end{array} \tag{25}$$

Sustituyendo (25) en (22)-(23) y cambiando de nombre a las constantes $\{a_{ij}\}$ y $\{b_{ij}\}$, resulta

$$\boxed{\begin{array}{ll} a(y) = a + by + cy^2; & b(y) = d + ey + fy^2; \\ c(y) = g + hy + jy^2; & d(x) = j + fx + cx^2; \\ e(x) = h + ex + bx^2; & f(x) = g + dx + ax^2. \end{array}}$$

con lo que finalmente se obtiene la forma más general de la cubierta buscada

$$\boxed{z(x, y) = cx^2y^2 + bx^2y + fxy^2 + ax^2 + exy + jy^2 + dx + hy + g,}$$

donde a, b, c, d, e, f, g, h y j son constantes arbitrarias.

Una elección cuidadosa y estética de estas constantes conduce, por ejemplo, a la cubierta de la Figura 4.

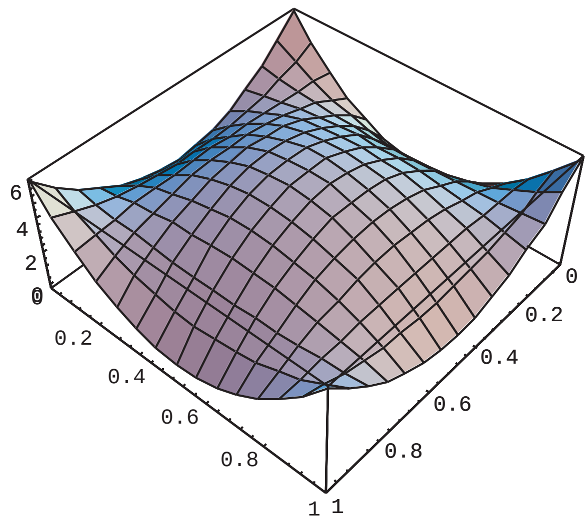

Figura 4: Cubierta elegida mostrando sus secciones transversales polinómicas.

4.2 DISTRIBUCIONES BIVARIADAS CON CONDICIONALES NORMALES[7].

Es bien sabido que la distribución normal bivariada tiene todas sus condicionales normales unidimensionales. La pregunta que uno puede hacerse es si habrá otras familias con esta propiedad. Este problema fue resuelto por Castillo y Galambos [22]. Supóngase una variable aleatoria bidimensional (X, Y) absolutamente continua, cuyas funciones de densidad conjunta, marginales y condicionales se denotan por $f_{(X,Y)}(x, y), g(x), h(y), f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$, respectivamente. Es sabido que

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)h(y) = f_{Y|X}(y|x)g(x), \tag{26}$$

y como se desea que las distribuciones condicionales sean normales, debe ser

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &\div \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-a(x)}{b(x)}\right]^2\right\}}{b(x)} \\ f_{X|Y}(x|y) &\div \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-d(y)}{c(y)}\right]^2\right\}}{c(y)} \end{aligned} \tag{27}$$

donde $a(x)$ y $d(y)$, y $b(x) > 0$ y $c(y) > 0$ representan las medias y las desviaciones típicas condicionadas a los valores x e y, respectivamente. Sustituyendo

[7] Para un tratamiento del problema de la especificación condicional de distribuciones el lector puede consultar los trabajos de Arnold, Castillo y Sarabia [7, 8, 10]

en (26), tomando logaritmos, haciendo

$$u(x) = \log[g(x)/b(x)] \; ; \; v(y) = \log[h(y)/c(y)] \tag{28}$$

y reagrupando términos se obtiene

$$\begin{array}{c} [2u(x)b^2(x) - a^2(x)]c^2(y) + b^2(x)[d^2(y) - 2v(y)c^2(y)] \\ -y^2c^2(y) + x^2b^2(x) + 2a(x)yc^2(y) - 2xb^2(x)d(y) = 0, \end{array} \tag{29}$$

que es una ecuación de la forma (18).

Según la expresión (19), la solución debe satisfacer

$$\begin{bmatrix} 2u(x)b^2(x) - a^2(x) \\ b^2(x) \\ 1 \\ x^2b^2(x) \\ 2a(x) \\ xb^2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 1 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^2(x) \\ xb^2(x) \\ x^2b^2(x) \end{bmatrix} \tag{30}$$

y

$$\begin{bmatrix} c^2(y) \\ d^2(y) - 2v(y)c^2(y) \\ -y^2c^2(y) \\ 1 \\ yc^2(y) \\ -2d(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ 0 & 0 & -1 \\ b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^2(y) \\ yc^2(y) \\ y^2c^2(y) \end{bmatrix} \tag{31}$$

donde, según (20) debe ser

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 1 & a_{31} & 0 & a_{51} & 0 \\ a_{12} & 0 & a_{32} & 0 & a_{52} & 1 \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 1 & a_{53} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ 0 & 0 & -1 \\ b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Así, la solución general de la ecuación (29) resulta

$$a(x) = \frac{-(A + Bx + Cx^2)}{(D + 2Ex + Fx^2)} \quad ; \quad d(y) = \frac{-(H + By + Ey^2)}{(J + 2Cy + Fy^2)}$$

$$b^2(x) = \frac{1}{(D + 2Ex + Fx^2)} \quad ; \quad c^2(y) = \frac{1}{(J + 2Cy + Fy^2)}$$

$$u(x) = -\frac{1}{2}\left[G + 2Hx + Jx^2 - \frac{(A + Bx + Cx^2)^2}{(D + 2Ex + Fx^2)}\right]$$

$$v(y) = -\frac{1}{2}\left[G + 2Ay + Dy^2 - \frac{(H + By + Ey^2)^2}{(J + 2Cy + Fy^2)}\right]$$

$$g(x) = (D + 2Ex + Fx^2)^{-1/2} \exp\{-\frac{G + 2Hx + Jx^2 - \frac{(A+Bx+Cx^2)^2}{(D+2Ex+Fx^2)}}{2}\}$$

$$h(y) = (J + 2Cy + Fy^2)^{-1/2} \exp\{-\frac{G + 2Ay + Dy^2 - \frac{(H+By+Ey^2)^2}{(J+2Cy+Fy^2)}}{2}\}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{G}{2}-\frac{1}{2}K(x, y)\right\} \tag{32}$$

donde A, B, C, D, E, F, G, H y J son constantes arbitrarias, y

$$K(x, y) = 2Hx + 2Ay + Jx^2 + Dy^2 + 2Bxy + 2Cx^2y + 2Exy^2 + Fx^2y^2.$$

Para que la función $f(x, y)$ obtenida pueda ser una función de densidad, el conjunto de constantes arbitrarias $\{A, B, C, D, E, F, G, H, J\}$ debe satisfacer una de las condiciones siguientes:

(i) $F = E = C = 0;\ \ D > 0;\ \ J > 0;\ \ B^2 < DJ.$

(ii) $F > 0;\ \ FD > E^2;\ \ JF > C^2.$

El modelo (i) es el modelo clásico de las distribuciones normales bivariadas y el modelo (ii) es un modelo no estándar que tiene las siguientes propiedades:

- Las líneas de regresión no son necesariamente líneas rectas
- Las distribuciones marginales no son normales
- La moda está en la intersección de las líneas de regresión.

La Figura 5 muestra el modelo clásico de una distribución normal bivariada con las líneas de regresión y las funciones de densidad marginales correspondientes.

La Figura 6 muestra el modelo de una distribución no normal bivariada pero con condicionales normales y sus líneas de regresión y funciones de densidad marginales.

La Figura 7 muestra un modelo de distribución bivariada con condicionales normales y dos modas junto con las líneas de regresión y las funciones de densidad marginales correspondientes (véase Gelman y Meng [36]). Arnold, Castillo, Sarabia y González-Vega [11] han demostrado que también existen familias con tres modas.

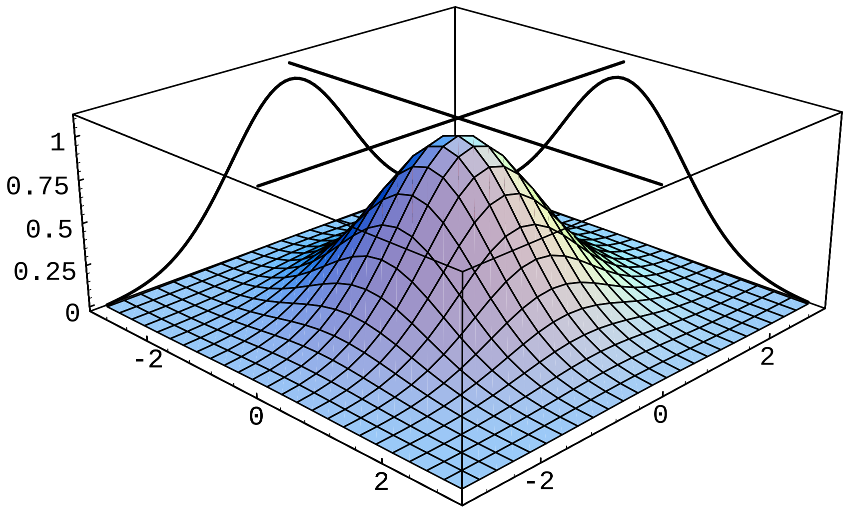

Figura 5: Ejemplo de distribución normal bivariada mostrando las líneas de regresión y las funciones de densidad marginales.

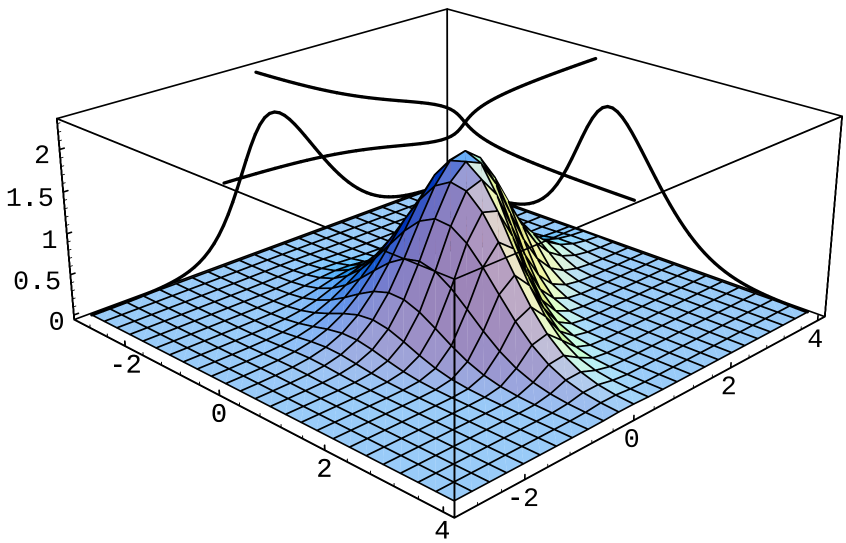

Figura 6: Ejemplo de distribución no normal bivariada con condicionales normales mostrando las líneas de regresión y las funciones de densidad marginales.

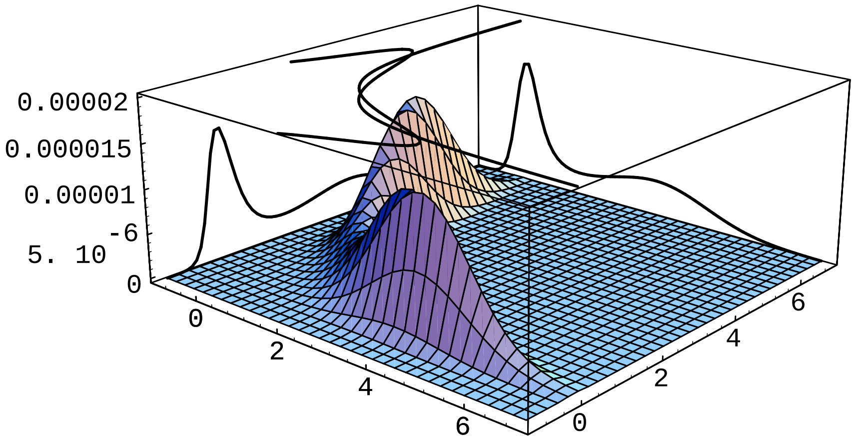

Figura 7: Ejemplo de distribución bivariada con condicionales normales y dos modas.

5 otros tipos de ecuaciones funcionales

El Teorema 1 resuelve las ecuaciones de la forma (18). Sin embargo, el lector puede preguntarse cómo se resuelven el resto de las ecuaciones funcionales. Una simple lectura de la bibliografía existente sobre ecuaciones funcionales revela que los métodos de resolución son métodos *ad hoc*, es decir, cada ecuación requiere una técnica especial que se aprovecha de las condiciones que se dan en cada caso particular. Sin embargo, hay muchos aspectos comunes. Una clasificación de estos métodos puede verse en Castillo [14], que considera los siguientes:

- Sustitución de variables por valores concretos
- Transformación de una o varias variables
- Transformación de una o varias funciones
- Uso de una ecuación funcional más general
- Tratamiento de variables como constantes
- Métodos inductivos
- Métodos iterativos
- Separación de variables

- Reducción mediante técnicas analíticas (diferenciación, integración, etc.)
- Métodos mixtos

Una descripción completa de estos métodos puede verse en dicha referencia, así como ejemplos de cada una de ellas. Seguidamente se dan algunos ejemplos interesantes de otras ecuaciones funcionales.

5.1 SÍNTESIS DE JUICIOS[8]

En muchas ocasiones surge el problema de resumir la opinión de un grupo de personas en una sola, que refleje la opinión del grupo. Más concretamente, supóngase que n jueces emiten n juicios cuantificables mediante $x_1, \ldots, x_n$ y que se desea sintetizarlos en un único "juicio consensuado".

El problema consiste en determinar cuál es la forma de la función

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

que da ese juicio final, en función de los n juicios $x_1, \ldots, x_n$ emitidos.

Para obtener esta función se hacen las siguientes hipótesis:

1. **Separabilidad**: Se supone que la función f es separable, es decir que satisface la condición

$$f(x_1, \ldots,\ x_n) = g_1(x_1)\Delta g_2(x_2)\Delta \ldots \Delta g_n(x_n), \tag{33}$$

donde Δ es una operación asociativa, conmutativa y cancelativa. Cancelativa significa que

$$t_1\Delta z = t_2\Delta z \text{ ó } z\Delta t_1 = z\Delta t_2 \Rightarrow t_1 = t_2, \forall z$$

Estas hipótesis son naturales si se desea una fórmula que no pueda manipularse alterando el orden de los miembros del comité o el orden de cálculo. Además, la cancelatividad implica que todos los miembros deben influir en el resultado final.

2. **Igualdad**: Todos los miembros del jurado tiene el mismo peso, es decir, no hay miembros de calidad.

3. **Unanimidad**: Cuando todos los jueces coinciden en el mismo juicio x, el juicio consensuado debe coincidir con x:

$$f(x, \ldots, x) = x \tag{34}$$

[8]Problemas de este tipo pueden verse en Aczél [3], y Aczél y Alsina [4, 5].

Las hipótesis de asociatividad y cancelatividad de Δ implican que ésta puede escribirse como (véase (15)):

$$y_1 \Delta y_2 = \varphi^{-1}[\varphi(y_1) + \varphi(y_2)]$$

con lo que se tiene

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}\{\sum_{i=1}^{n} \varphi[g_i(x_i)]\}.$$

La hipótesis de igualdad conduce a que todas las funciones g_i deben ser iguales, es decir, $g_i(x) = g(x)$ para $i = 1, \ldots, n$, con lo que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}\{\sum_{i=1}^{n} \varphi[g(x_i)]\}. \tag{35}$$

De la unanimidad resulta

$$f(x, \ldots, x) = x \;\Rightarrow\; \varphi^{-1}\{n\varphi[g(x)]\} = x \;\Rightarrow\; g(x) = \varphi^{-1}[\frac{\varphi(x)}{n}] \tag{36}$$

y, finalmente, de (36), se obtiene

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(x_i)}{n}\right\},}$$

donde φ es una función invertible arbitraria.

Algunos casos particulares son:

- La media aritmética, que corresponde al caso $\varphi(x) = x$.
- La media geométrica, que corresponde al caso $\varphi(x) = \log x$.
- La media L_p, que corresponde al caso $\varphi(x) = x^p$.

5.2 Política de publicidad y precios[9]

Supóngase una firma comercial tal que las ventas S de un producto dependen de su precio unitario p y de los gastos de publicidad w, es decir, $S = S(p, w)$.

Para deducir la forma de $S(p, w)$ se pueden establecer las hipótesis siguientes:

[9] Otras versiones de éste y otros problemas de Economía pueden verse en Eichhorn [33, 34, 35] y en Castillo, Sarabia-Alegría, Sarabia-Alzaga y González-Vega [30]

1. Para cualquier valor fijo de w, la función S, considerada como una función de p, debe ser decreciente, pues las ventas deben disminuir con el precio.

2. Para cualquier valor de p, la función S, considerada como una función de w, debe ser creciente, pues las ventas deben aumentar con la publicidad.

3. Las ventas tras un incremento Δp en el precio son iguales a las previas multiplicadas por un número real (menor que la unidad), que depende de Δp y p, es decir,

$$S(p + \Delta p, w) = S(p, w)R(\Delta p, p) \tag{37}$$

   con $p \geq 0, \;\; p + \Delta p \geq 0, \;\; w \geq 0 \;$ y $\; R(0, p) = 1$.

4. Las ventas tras un cambio multiplicativo (λ veces) en la publicidad son iguales a las previas aumentadas en un número, que depende de p y λ, es decir,

$$S(p, \lambda w) = S(p, w) \; + T(p, \lambda) \tag{38}$$

   con $p \geq 0$, $w \geq 0$, $\lambda \geq 0$ y $T(p, 1) = 0$.

La solución general de la ecuación (37) es

$$S(p, w) = C(p)\, D(w); \;\; R(\Delta p, p) = \frac{C(p + \Delta p)}{C(p)} \tag{39}$$

y la solución general de (38) es

$$S(p, w) = A(p)\, \log w + B(p); \;\; T(p, \lambda) = A(p)\, \log \lambda, \tag{40}$$

donde $C(p)$ y $D(w)$ son funciones arbitrarias.

La solución del sistema (37)-(38) puede obtenerse resolviendo la ecuación funcional

$$S(p, w) = C(p)\, D(w) = A(p) \log w + B(p), \tag{41}$$

que resulta de forzar la coincidencia de las soluciones de las formas (40) y (39), resultando finalmente el modelo

$$\boxed{S(p, w) = A(p)\, (\log w + B),} \tag{42}$$

donde la función $A(p)$ y la constante B son arbitrarias.

Para que (42) satisfaga las condiciones de crecimiento anteriores, $A(p)$ y B deben ser positivas y $A(p)$ debe ser decreciente. Nótese que $(\log w + B)$ ya es creciente, tal como se exige.

5.3 problemas de fatiga de materiales[10]

En esta sección se desarrollan algunos modelos para el estudio del problema de fatiga de elementos longitudinales. Se comienza por el caso de independencia y luego se analizan algunos modelos de dependencia.

Sea $S(t,s)$ la función de supervivencia a fatiga de un elemento longitudinal de longitud s, es decir

$$P[T > t] = S(t,s), \tag{43}$$

donde P se refiere a probabilidad, y T es el tiempo de vida del elemento sometido a fatiga.

Uno de los problemas más importantes en el análisis de la resistencia a la fatiga de elementos longitudinales es el efecto de escala, es decir, la influencia de la longitud en la función de supervivencia.

Se entenderá por elemento longitudinal aquél que satisface las dos condiciones siguientes:

- Sólo influye una dimensión, y, del elemento.
- Si el elemento se divide longitudinalmente en piezas imaginarias (ver Figura 8) todas las piezas están sometidas a la misma acción externa (tensión, fuerza, etc.)

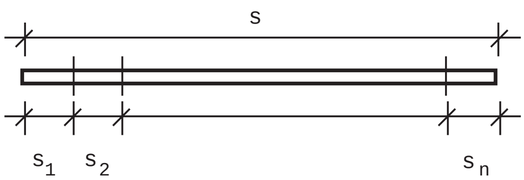

Figura 8: Elemento longitudinal dividido en piezas elementales.

Debido al principio del elemento más débil, el tiempo de vida bajo fatiga de un elemento de longitud ks es el mínimo de los tiempos de vida de las k piezas de longitud s que lo componen.

En el pasado se han dado varios modelos para resolver este problema, pero, desgraciadamente, la mayoría de ellos se basan en la hipótesis de independencia de los tiempos de vida de las diferentes piezas no solapadas. Esta hipótesis establece que si un elemento de longitud s, como el mostrado en la Figura 8, se divide en varias piezas de longitudes $s_1, \ldots, s_n$, entonces la función de supervivencia del elemento $S(t,s)$ debe satisfacer la ecuación

$$S(t,s) = \prod_{i=1}^{n} S(t,s_i), \tag{44}$$

[10]El lector interesado en modelos de fatiga basados en ecuaciones funcionales puede consultar los trabajos de Arnold, Castillo y Sarabia [9], Castillo y Fernández-Canteli [20], Castillo, Fernández-Canteli y Hadi [21], y Castillo y Hadi [24].

que para $s_i = s_0$ resulta

$$S(t, ks_0) = S(t, s_0)^k \quad \Rightarrow \quad H(t, ks_0) = kH(t, s_0), \tag{45}$$

siendo $H(t, s) = \log[S(t, s)]$ y donde k puede generalizarse permitiendo que sea cualquier número real positivo.

Ahora, para cada t fijo, la ecuación de la derecha en (45) tiene como solución general

$$H(t, s) = C(t)s, \tag{46}$$

que implica

$$\boxed{S(t, s) = [g(t)]^s,} \tag{47}$$

donde $g(t)$ es una función arbitraria positiva.

Para que $S(t, s)$ sea una función de supervivencia, $g(t)$ debe ser no creciente y verificar que $g(0) = 1$ y $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$

Seguidamente, se deja de lado la hipótesis de independencia y se hace uso de la teoría de las ecuaciones funcionales, para plantear el problema de una forma muy diferente.

Supóngase que se ha encargado a un equipo de tres miembros el diseño de un modelo estadístico consensuado para el análisis de fatiga de elementos longitudinales. Sin embargo, se requiere de ellos inicialmente propuestas separadas y luego una solución consensuada. Las tres propuestas, correspondientes a cada uno de los miembros del equipo, se denotarán por modelos 1, 2 y 3, respectivamente.

Modelo 1

Con objeto de simplificar, el primer miembro del equipo supone que un elemento de longitud $x + y$ se divide en dos piezas no solapadas de longitudes x e y, y que la función de supervivencia de la pieza inicial puede ser calculada a partir de las funciones de supervivencia de las dos piezas que lo forman. En otras palabras, $S(t, x)$ debe satisfacer la siguiente ecuación funcional

$$\boxed{S(t, x + y) = H[S(t, x), S(t, y)],} \tag{48}$$

donde la función H indica cómo se relacionan las funciones de supervivencia de las piezas con la función de supervivencia del conjunto.

Es interesante mencionar que la ecuación (48) induce la asociatividad y la conmutatividad de la operación asociada a la función H y la dependencia de S de la longitud total del elemento. De hecho, se puede escribir

$$\begin{aligned} S(t, (x + y) + z) &= H[S(t, x + y), S(t, z)] = H[H[S(t, x), S(t, y)], S(t, z)] \\ S(t, x + (y + z)) &= H[S(t, x), S(t, y + z)] = H[S(t, x), H[S(t, y), S(t, z)]] \end{aligned}$$

y
$$S(t, x + y) = H[S(t, x), S(t, y)] = S(t, y + x) = H[S(t, y), S(t, x)]$$
Esto muestra que la función de supervivencia del elemento de longitud s es independiente del número, del tamaño, y del orden de los subelementos que se tomen para calcularla por medio de (48).

La solución general de (48) es

$$\boxed{\textbf{Modelo 1}: S(t,x) = w[f(t)x]; \;\; H(x,y) = w[w^{-1}(x) + w^{-1}(y)]}$$

Si $w(x) = \exp(Dx)$ se tiene el modelo de independencia. La estructura de la función H revela ahora claramente el carácter asociativo y conmutativo antes mencionado.

Modelo 2

El miembro 2 del equipo basa su modelo en el siguiente resultado: Bogdanoff y Kozin [12], basándose en resultados experimentales de Picciotto [38] (véase la Figura 9) observan que se puede pasar de la función de supervivencia asociada a una longitud a la asociada a otra longitud sin más que elevar a una potencia. Por tanto, sugiere el siguiente modelo

$$\boxed{S(t,x) = S(t,y)^{N(y,x)},} \tag{49}$$

donde $S(t, x)$ y $S(t, y)$ son las funciones de supervivencia asociadas a los elementos de longitudes x e y, respectivamente, y $N(y, x)$ es una función desconocida.

Obsérvese que (49) es una ecuación funcional, cuya solución general es

$$\boxed{\textbf{Modelo 2}: \;\; S(t,x) = p(t)^{q(x)}; \;\; N(y,x) = \frac{q(x)}{q(y)}.} \tag{50}$$

Para que $S(t, x)$ sea una función de supervivencia debe ser una función decreciente en t.

Si $q(x) = x$ se tiene el modelo de independencia. La función de azar asociada a $S(t, x)$ es

$$h(t,x) = \frac{-p'(t)}{p(t)} q(x) = -[\log p(t)]' q(x) = s(t)q(x)$$

lo que muestra que el modelo 2 es el modelo de los riesgos proporcionales de Cox [32]. Así, la ecuación funcional (49) caracteriza dicho modelo de Cox.

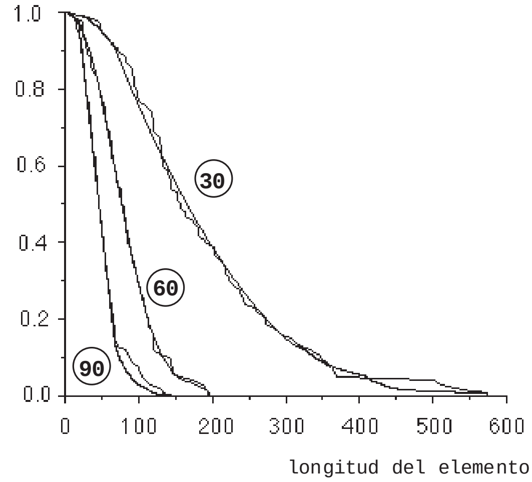

Figura 9: Funciones de supervivencia asociadas a las longitudes 30, 60 y 90 cm.

Modelo 3

El miembro 3, basándose en la expresión (49), supone que la función de supervivencia de un elemento de longitud x puede obtenerse por medio de la función de supervivencia de un elemento de longitud y y una función dada, desconocida, de x e y. En otras palabras, supone que la función de supervivencia debe satisfacer la ecuación funcional

$$\boxed{S(t,x) = K[S(t,y), N(x,y)],} \tag{51}$$

cuya solución es

$$\boxed{\textbf{Modelo 3}: \begin{array}{rcl} S(t,x) & = & l^{-1}[p(t)+r(x)] \\ K(x,y) & = & l^{-1}[l(x)+m(y)] \\ N(x,y) & = & m^{-1}[r(x)-r(y)]. \end{array}} \tag{52}$$

Por ser $S(t,x)$ una función de supervivencia debe ser decreciente en t. Si $l^{-1}(x) = \exp[D\exp(Cx)]$ se tiene el modelo de independencia.

Alcanzando un consenso

La búsqueda de un consenso entre los tres modelos obtenidos es la segunda etapa del trabajo del equipo.

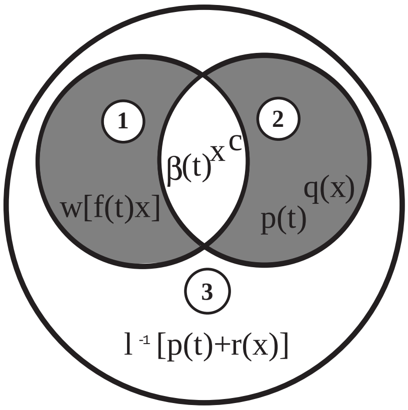

Figura 10: Propuestas separadas y consenso.

Normalmente, se entiende por solución consensuada una combinación lineal convexa de los juicios de varios individuos. Sin embargo, una solución de esa forma no satisface las propiedades que verificaban las propuestas individuales iniciales (Ecuaciones (48), (49) y 51)). Este hecho es irrelevante cuando se trata de consensuar un modelo para calcular probabilidades, pero es un serio inconveniente en la modelización de un sistema físico, pues se pierden sus propiedades fundamentales. En el caso que nos ocupa, las ecuaciones funcionales (48), (49) y (51) establecen distintas propiedades para un modelo físico que, según criterio de cada miembro, éste debe satisfacer necesariamente. Por ello, los tres expertos no estarán dispuestos a aceptar modelos que violen estas propiedades. Así, en lo que sigue, se entenderá por consenso la posible intersección de las tres familias de modelos, es decir, el modelo que satisfaga todos los requerimientos impuestos. Ello equivale a que se cumpla

$$S(t,x) = w[f(t)x] = p(t)^{q(x)} = l^{-1}[p_1(t) + r(x)],$$

que no es otra cosa que un sistema de ecuaciones funcionales, cuya solución es

$$\boxed{S(t,x) = \beta(t)^{x^C},} \tag{53}$$

donde β y c son una función decreciente y una constante, ambas arbitrarias y positivas.

Se puede concluir entonces que el modelo consensuado debe ser (53), que es el único modelo común a todas las propuestas de los miembros del equipo.

La Figura 10 muestra las propuestas individuales de los diferentes miembros, las intersecciones y el modelo común a las tres.

5.4 FUNCIONES IMPOSITIVAS[11]

Es conocido que la normativa vigente para la Declaración de la Renta de las Personas Físicas presenta muchos problemas, algunos de ellos de cierta gravedad. Entre ellos está el problema que se plantea con la declaración conjunta o separada de los matrimonios, en el sentido de que se hace necesario analizar ambas situaciones con objeto de elegir aquella más favorable para el declarante. Sin embargo, existen o han existido en el pasado problemas bastante más graves que los mencionados, como son los dos casos que se mencionan a continuación, uno de ellos ya resuelto en la normativa para el ejercicio de 1988.

El primero de ellos se refiere al concepto de impuesto progresivo. Para que un impuesto sea progresivo no basta una escala de gravamen creciente, sino que es necesario que su derivada (valor marginal) sea también creciente. En otras palabras, no es suficiente con que el que más gane pague más, sino que cada nueva peseta ganada debe ser gravada con igual o mayor intensidad que las anteriores. En la Figura 11 se muestran las curvas que dan la cuota íntegra en función de la base imponible correspondiente a los ejercicios de 1985 y 1988, respectivamente. En ellas puede verse como la primera no verifica la condición anterior, pero sí la segunda. En efecto, para el caso del ejercicio de 1985, en el tramo comprendido entre $5,5$ y $12,2$ millones de pesetas de base imponible, la escala de gravamen marginal crece desde un 46% hasta un 66%, mientras que a partir de los $12,2$ millones de pesetas de base imponible éste se mantiene constante en el 46%. Por ello, una nueva peseta puede llegar a gravarse hasta en el 66%, justo antes de los $12,2$ millones, mientras que se grava sólo el 46% por encima de este valor. Este mismo problema aparecía también en la normativa de 1987.

El problema se soluciona a partir de 1988 (ver Figura 11), pero a costa de aumentar los impuestos hasta niveles inadmisibles (ver Figura 11 en su parte derecha).

Otro de los problemas se plantea al calcular el impuesto devengado por los rendimientos irregulares (periodos superiores al año). Con objeto de clarificar este problema se pone un ejemplo ilustrativo a continuación.

Supóngase el caso de dos hermanos que han heredado y enajenado una propiedad resultando un beneficio (incremento compensado) de 30 millones de pesetas, cada uno, en un periodo de 20 años y que en el año objeto de la declaración, el hermano menor no realiza ningún trabajo remunerado. En este caso, tras aplicar la normativa vigente se llega a que el impuesto devengado es 4.599.050 *pts.* con lo que la ganancia neta (descontado el impuesto) es

$$\boxed{Ganancia\ neta = 25.400.950\ pts.}$$

[11] La técnica de las ecuaciones funcionales ya ha sido aplicada a problemas de tarifas impositivas en el pasado (Aczél [3], Young [39], etc.). Sin embargo, algunos de los problemas fueron planteados mucho antes (ver, por ejemplo Cohen Stuart [31] o Mill [37]) aunque no fueron formulados de esta forma. Una solución mucho más completa se da en Castillo, Cobo y Alsina [15]

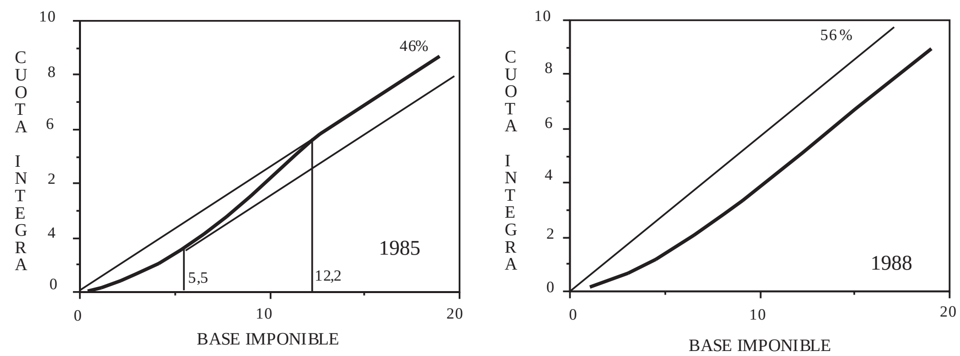

Figura 11: Tablas de cuota íntegra-base imponible correspondientes a los ejercicios de 1985 (izquierda) y 1988 (derecha).

Por el contrario, el hermano mayor, decide trabajar y percibe 8.000.000 pts. Entonces resulta un impuesto de 14.460.000 *pts.* con lo que la ganancia neta (descontado el impuesto) es

$$\boxed{Ganancia\ neta = 23.540.000\ pts.}$$

Esto implica que el hermano mayor tiene menores ingresos netos, a pesar de haber trabajado, lo cual no sólo es absurdo sino que lleva a la desesperación del sujeto pasivo, que se ve tratado injustamente.

Todo lo anterior pone de manifiesto que el proceso de selección de una tarifa impositiva debe ser realizado muy cuidadosamente si quieren evitarse sorpresas desagradables. En los párrafos que siguen se muestra cómo las ecuaciones funcionales pueden ser utilizadas satisfactoriamente para resolver este problema.

Restricciones a imponer a las tarifas impositivas

Con objeto de evitar todos los problemas comentados anteriormente, el legislador debe establecer claramente todas las condiciones que deben ser satisfechas por la tarifa impositiva. Estas condiciones resultarán como una mezcla del sentido común, para evitar situaciones absurdas o ridículas, y de decisiones políticas, que establecen posturas con respecto a ciertos conceptos relacionados con el impuesto (número de miembros de la unidad familiar, origen de los ingresos, carácter progresivo del impuesto, etc.).

La metodología para obtener funciones impositivas que se presenta a continuación consiste en las siguientes etapas:

1. Establecimiento de las propiedades que deben ser satisfechas por la tarifa impositiva.

2. Solución matemática del sistema de ecuaciones y desigualdades funcionales resultantes.

3. Establecimiento de unas tablas impositivas tales que cubran las necesidades recaudatorias.

Sea $s(x, y, m, p, q)$ la tarifa impositiva asociada a un individuo o unidad familiar cuyo ingreso por salario es x, obtenido tras p años de trabajo, y un ingreso por rentas del capital y, obtenido tras q años, suponiendo que hay en ella m miembros sujetos a impuesto ($m = 1$ ó 2, dependiendo de si sólo la esposa o el marido, o ambos perciben ingresos, respectivamente. Además, se supone aquí que m es un número real, pudiendo incluir así, como valores no enteros, el caso de niños y dependientes). Los parámetros p y q se incluyen aquí con el objeto de poder considerar casos de percepción irregular (periodos de más de un año).

Como ejemplo, podrían imponerse a la tarifa impositiva $s(x, y, m, p, q)$ las condiciones siguientes:

1 Progresividad:

$$s(x, y, m, p, q) \text{ es creciente con respecto a } x \tag{54}$$

$$s(x, y, m, p, q) \text{ es creciente con respecto a } y \tag{55}$$

$$s(x, y, m, p, q) \text{ es cóncava con respecto a } x \tag{56}$$

$$s(x, y, m, p, q) \text{ es cóncava con respecto a } y \tag{57}$$

$$s(x, y, m, p, q) \text{ es no-creciente con respecto a } m \tag{58}$$

Estas cinco primeras condiciones se refieren a la progresividad del impuesto. Las condiciones (54) y (55) establecen que a mayor ingreso, ya sea por salario o por rentas del capital, mayor deberá ser el impuesto devengado. Las condiciones (56) y (57) implican la progresividad del impuesto, es decir, establecen que la aportación impositiva de cada nueva unidad adicional de ingreso debe ser igual o mayor que las de los anteriores. La condición (58) establece que a mayor número de miembros en la unidad familiar debe corresponder menor impuesto.

2 Independencia del tipo de declaración (conjunta o separada):

Se estudian las dos condiciones siguientes:

$$s(\sum_{i=1}^{m} x_i, \sum_{i=1}^{m} y_i, m, p, q) = \sum_{i=1}^{m} s(x_i, y_i, 1, p, q) \tag{59}$$

$$s(\sum_{i=1}^{m} x_i, \sum_{i=1}^{m} y_i, m, p, q) \leq \sum_{i=1}^{m} s(x_i, y_i, 1, p, q) \tag{60}$$

Las condiciones (59) y (60) se refieren a las declaraciones conjunta y separada de las parejas casadas. La ecuación (59) expresa la coincidencia de los impuestos para declaración conjunta y separada. En la desigualdad (60) se impone que la declaración conjunta de la pareja debe conducir a impuestos menores o iguales que la declaración separada.

3 Monotonía del ingreso neto:

$$x_1 + y_1 - s(x_1, y_1, m, p, q) > x_1 + y_2 - s(x_1, y_2, m, p, q) \quad \text{si} \quad y_1 > y_2 \tag{61}$$

$$x_1 + y_1 - s(x_1, y_1, m, p, q) > x_2 + y_1 - s(x_2, y_1, m, p, q) \quad \text{si} \quad x_1 > x_2 \tag{62}$$

Las desigualdades (61) y (62) implican la monotonía del ingreso neto respecto del bruto. Establecen que a mayor ingreso bruto le corresponde mayor ingreso neto, independientemente de si éste procede del capital o del trabajo (salario). Se trata de evitar problemas como el de los dos hermanos, descrito anteriormente.

4 Independencia del número de declaraciones:

$$\begin{aligned} s(x, 0, m, p, q) + s(0, y, m, p, q) &= s(x, y, m, p, q) && (63) \\ s(x, 0, m, p, q_1) &= ps(\frac{x}{p}, 0, m, 1, q_2), \ \ \forall q_1, q_2 && (64) \\ s(0, y, m, p_1, q) &= qs(0, \frac{y}{q}, m, p_2, 1), \ \ \forall p_1, p_2 && (65) \end{aligned}$$

La ecuación (63) se refiere a la independencia del número de declaraciones y establece que el impuesto devengado debe depender sólo del ingreso total y no de si se declara en uno o en varios años.

Las ecuaciones (64) y (65) establecen la independencia de los tiempos en que se generan los ingresos, es decir, el impuesto debe depender del ingreso total pero no del tiempo de su generación.

5 Tratamiento idéntico a ingresos salariales y de capital:

$$\begin{aligned} s(x, y, m, p, q) &= s(y, x, m, q, p) && (66) \\ s(x, y, m, p, p) &= s(z, x + y - z, m, p, p); \ \ x + y \geq z && (67) \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación (66) establece igual tratamiento para los ingresos procedentes del capital y del trabajo, y la ecuación (67) establece el mismo importe cuando el ingreso sea el mismo, sin tener en cuenta su origen.

A continuación se estudiarán dos casos diferentes:

- **Caso 1**: Tasas idénticas para las declaraciones conjunta y separada, es decir, (59).

- **Caso 2**: Tasa menor o igual para la declaración conjunta, es decir, (60).

Tasas idénticas para declaraciones conjunta y separadas

En este caso, se busca la tarifa impositiva más general que satisface el conjunto de restricciones (54) a (59) y (61) a (65) y luego se añade la condición (66) ó la condición (67). Estas tarifas se dan en el siguiente teorema y su corolario.

Teorema 2 *La tarifa impositiva continua en x e y más general que satisface las condiciones (54) a (59) y (61) a (65) es*

$$\boxed{s(x, y, m, p, q) = Ax + By; \;\; 0 < A < 1; \;\; 0 < B < 1}$$

Esto muestra que la igualdad de impuestos para declaraciones conjunta y separada implica tasas proporcionales a los ingresos procedentes del capital y del trabajo, aunque no necesariamente idénticos. Además, la fórmula resultante no es estrictamente cóncava respecto al capital y al salario, es decir, no es progresiva, ya que el crecimiento de la función respecto a x e y es constante.

Corolario 1 *Si además se impone la condición (66) ó la condición (67), se obtiene*

$$\boxed{s(x, y, m, p, q) = A(x + y)}$$

que implica tasas proporcionales idénticas para los ingresos procedentes del capital y del trabajo.

Nótese que los conocimientos matemáticos permiten concluir que la coincidencia de las tasas en las declaraciones conjunta y separada y la progresividad no son posibles.

Puesto que esta tarifa impositiva resulta insatisfactoria desde un punto de vista político o social (no es progresiva), en la sección siguiente se resuelve el caso 2.

Tasa menor o igual para la declaración conjunta

En esta sección se obtiene la tarifa impositiva más general que satisface las condiciones (54) a (58) y (61) a (65) con (60) y luego se añade la condición (66) ó la condición (67). El teorema y los corolarios que siguen dan la solución a estos problemas.

Teorema 3 *La tarifa impositiva más general que satisface las condiciones (54) a (58) y (61) a (65) con (60) es*

$$\boxed{s(x, y, m, p, q) = m\left[pu\left(\frac{x}{pm}\right) + qv\left(\frac{y}{qm}\right)\right]} \tag{68}$$

donde u y v son funciones tales que

$$\begin{array}{l} u(0) = v(0) = 0 \\ u(x) \text{ y } x - u(x) \text{ son crecientes} \\ v(y) \text{ y } y\text{-}v(y) \text{ son crecientes} \\ u(x) \text{ es cóncava} \\ v(x) \text{ es cóncava} \\ mu(x/m) \text{ y } mv(y/m) \text{ son no-crecientes en } m \end{array} \tag{69}$$

pero por otra parte son arbitrarias.

La interpretación física de la tarifa impositiva (68) es como sigue. Los ingresos debidos al capital y al trabajo deben separarse para calcular el impuesto devengado. Además, ambos conducen a funciones impositivas progresivas u y v, respectivamente. El carácter progresivo de las funciones $u(x)$ y $v(y)$ está limitado por las condiciones (69). Por otra parte, el impuesto devengado asociado con cada miembro de la unidad familiar sujeto al impuesto es el correspondiente al valor medio (ingreso bruto por individuo y año).

A la vista de todo lo anterior y de la tarifa impositiva (68), se puede decir que no es una mera coincidencia que las funciones impositivas utilizadas en otros países de la Comunidad Europea, como Alemania, tengan una consideración separada para los salarios y las rentas del capital o que utilicen valores medios (*reparto equitativo*) para las unidades familiares. Estas decisiones no son arbitrarias, sino la consecuencia de la compatibilidad impuesta por un sistema de condiciones que nace del sentido común y de decisiones políticas.

5.5 Análisis dimensional[12]

En un sistema físico existen algunas variables fundamentales, como la longitud, el tiempo y el espacio; a partir de ellas, se definen otras variables, secundarias o derivadas, mediante fórmulas más o menos complicadas. En otros casos, las fórmulas relacionan diferentes variables no necesariamente fundamentales. Sin embargo, no toda fórmula genera una variable válida, sino sólo aquellas que verifican ciertas condiciones (ver Aczél [6]). Es necesario que un cambio de origen y/o escala de las variables independientes mantengan la misma estructura de la fórmula salvo cambios de origen y/o escala de la variable derivada o dependiente. En otras palabras, la fórmula debe permanecer invariante frente a transformaciones de origen y escala. Esta condición puede ser escrita mediante la siguiente ecuación funcional

$$\begin{aligned} u(r_1x_1+p_1, r_2x_2+p_2, \ldots, r_nx_n+p_n) = & \\ R(r_1, r_2, \ldots, r_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)u(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \\ +P(r_1, r_2, \ldots, r_n; p_1, p_2, \ldots, p_n); & \\ r_i, x_i \in \mathbb{R}^{++}, (i = 1, 2, \ldots, n) & \end{aligned} \tag{70}$$

[12] Un tratamiento completo del análisis dimensional se da en Aczél [6]

donde $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la fórmula que da la variable dependiente en función de las variables fundamentales o independientes y P y R son funciones asociadas a los cambios de origen y escala de la variable derivada, respectivamente.

Cuando a una variable se le permiten cambios de origen y escala se dice que la variable es de *tipo intervalo-escala*. Si sólo se le permiten cambios de escala se dice que es de *tipo razón-escala*. Ejemplos de variables del primer tipo son el tiempo, la temperatura y la posición. Ejemplos de las segundas son la longitud, la superficie, el volumen, la velocidad y la aceleración.

La ecuación (70) muestra el caso más general, entendido éste como el que incluye variables de tipo intervalo-escala y el que corresponde a hacer cambios de origen y escala diferentes para todas las variables. Sin embargo, con mucha frecuencia ocurren otros casos más simples. Aczél [6] da la solución a 12 casos diferentes de (70). Seguidamente, se da uno de ellos.

Teorema 4 *La forma más general de variable dependiente de tipo razón-escala, continua en un punto, no constante, real y tal que todas las variables fundamentales o independientes sean de tipo razón-escala, es decir, la solución general de la ecuación funcional*

$$u(r_1x_1, \ldots, r_nx_n) = R(r_1, \ldots, r_n)u(x_1, \ldots, x_n) \quad r_i, x_i > 0; \forall i = 1, \ldots, n. \tag{71}$$

es

$$u(x_1, \ldots, x_n) = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{c_i}; \quad R(r_1, \ldots, r_n) = \prod_{i=1}^{n} r_i^{c_i} \tag{72}$$

con a y c_i constantes arbitrarias, tales que $a \neq 0$ y $c_i \neq 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

De aquí se deduce el teorema Π que es fundamental en análisis dimensional.

Teorema 5 (Teorema Π) *Si un fenómeno físico puede ser expresado, en un determinado sistema de medidas en el que existen m magnitudes fundamentales, mediante una función de otras r magnitudes, si n es el rango de la matriz A cuyos elementos son las dimensiones de las segundas con respecto a las magnitudes fundamentales, entonces existen $r - n$ monomios adimensionales mediante los cuales puede ser representado el fenómeno físico. Éstos pueden formarse mediante productos de potencias de tales magitudes.*

TEOREMA DE PITÁGORAS

Seguidamente se deduce el teorema de Pitágoras con ayuda del Teorema Π y las ecuaciones funcionales. Para ello se supone que existe una fórmula que da la hipotenusa, h, en función de los catetos, a y b. Más precisamente, haciendo uso del Teorema Π, se supone que existe una función g, inicialmente desconocida, tal que

$$\frac{a}{h} = g(\frac{b}{h}). \tag{73}$$

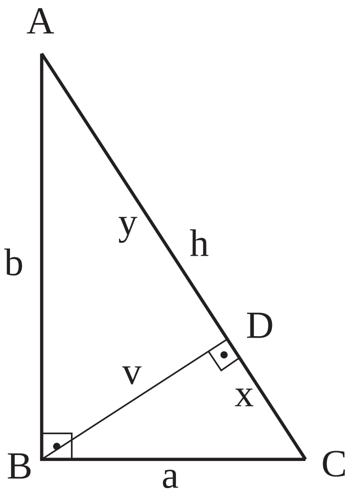

Figura 12: Triángulo rectángulo y una de sus alturas.

Considérese el triángulo rectángulo de la Figura 12. Aplicando (73) a los tres triángulos rectángulos, ABC, BDC y ADB de dicha figura 12, calculando el área del triángulo mayor de dos formas diferentes, y considerando que el lado h se ha dividido en dos partes x e y, se obtiene

$$\frac{a}{h} = g(\frac{b}{h}) \Leftrightarrow g(t) = \frac{at}{b}. \tag{74}$$

$$\frac{x}{a} = g(\frac{v}{a}) \Leftrightarrow g(t) = \frac{xt}{v}. \tag{75}$$

$$\frac{v}{b} = g(\frac{y}{b}) \Leftrightarrow g(t) = \frac{vt}{y}. \tag{76}$$

$$x + y = h \tag{77}$$

y

$$ab = hv. \tag{78}$$

De (74), (75) y (76) se llega a

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{v} = \frac{v}{y} \Leftrightarrow x = \frac{av}{b}, y = \frac{bv}{a}. \tag{79}$$

y sustituyendo en (77) y teniendo en cuenta (78) resulta

$$a^2 + b^2 = h^2, \tag{80}$$

es decir, el teorema de Pitágoras. Además, de (73) y (80) queda finalmente

$$\frac{a}{h} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{h}\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = \sqrt{1 - t^2}. \tag{81}$$

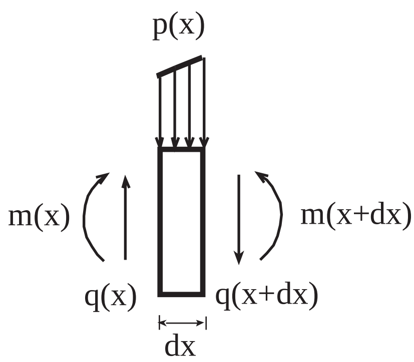

Figura 13: Ilustración del equilibrio clásico de una pieza diferencial.

6 ECUACIONES FUNCIONALES FRENTE A ECUACIONES DIFERENCIALES

En esta sección se muestra cómo las ecuaciones funcionales pueden ser una alternativa interesante a ciertas ecuaciones diferenciales o infinitesimales. Para ello se considera el problema de la viga elástica.

6.1 PLANTEAMIENTO CLÁSICO: ECUACIONES DIFERENCIALES

En el planteamiento clásico, el equilibrio se plantea para piezas diferenciales. En la Figura 13 se muestra una de estas piezas, en la que se han representado los momentos flectores y esfuerzos cortantes que las partes derecha e izquierda de la viga ejercen sobre dicha pieza elemental.

El equilibrio de fuerzas verticales conduce a la ecuación

$$q(x+dx) = q(x) + p(x)dx \Rightarrow q'(x) = p(x), \tag{82}$$

donde $q(x)$ y $p(x)$ son el esfuerzo cortante y la carga en el punto x, respectivamente, y el equilibrio de momentos da

$$m(x+dx) = m(x) + q(x)dx + p(x)dxdx/2 \Rightarrow m'(x) = q(x), \tag{83}$$

donde $m(x)$ es el momento flector en el punto x.

Utilizando ahora la conocida relación de Resistencia de Materiales

$$m(x) = EIz''(x), \tag{84}$$

donde $z(x)$ es la flecha de la viga en x, de (82), (83) y (84) se obtiene la conocida ecuación diferencial

$$\boxed{EIz^{(iv)}(x) = p(x).} \tag{85}$$

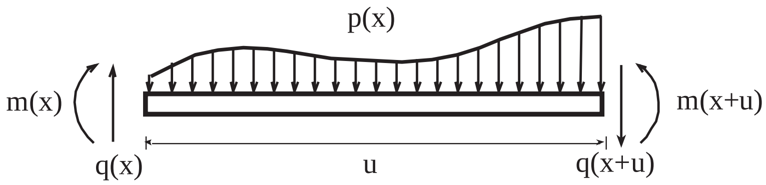

Figura 14: Ilustración del equilibrio de una pieza discreta.

Llamando $w(x) = z'(x)$ al giro de la viga en el punto x, de las ecuaciones (82), (83) y (84) se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\boxed{\begin{array}{l} q'(x) = p(x) \\ m'(x) = q(x) \\ w'(x) = \dfrac{m(x)}{EI} \\ z'(x) = w(x), \end{array}} \tag{86}$$

que es un modelo matemático equivalente al (85) y que es útil cuando se está interesado en q, m, w y z.

6.2 Nuevo planteamiento: ecuaciones funcionales

En el nuevo planteamiento, las ecuaciones de equilibrio se establecen para piezas discretas. En la Figura 14 se muestra una de estas piezas, junto con las acciones que el resto de la viga ejerce sobre ella.

El equilibrio de fuerzas verticales conduce a

$$q(x+u) = q(x) + A(x,u), \tag{87}$$

donde

$$A(x,u) = \int_x^{x+u} p(s)ds. \tag{88}$$

y el equilibrio de momentos

$$m(x+u) = m(x) + uq(x) + B(x,u), \tag{89}$$

donde

$$B(x,u) = \int_x^{x+u} (x+u-s)p(s)ds. \tag{90}$$

Usando ahora la ecuación (84) se obtiene

$$\begin{aligned} w(x+u) &= w(x) + \frac{1}{EI} \int_x^{x+u} m(s)ds \\ &= w(x) + \frac{1}{EI} \left[m(x)u + q(x)\frac{u^2}{2} + C(x,u) \right], \end{aligned} \tag{91}$$

donde

$$C(x,u) = \int_x^{x+u} B(x, s-x)ds \tag{92}$$

Además se tiene

$$\begin{aligned} z(x+u) &= z(x) + \int_x^{x+u} w(s)ds \\ &= z(x) + w(x)u + \frac{1}{EI} \left[m(x)\frac{u^2}{2} + q(x)\frac{u^3}{6} + D(x,u) \right], \end{aligned} \tag{93}$$

donde

$$D(x,u) = \int_x^{x+u} C(x, s-x)ds. \tag{94}$$

Por ello, resulta el sistema de ecuaciones funcionales

$$\boxed{\begin{aligned} q(x+u) &= q(x) + A(x,u) \\ m(x+u) &= m(x) + uq(x) + B(x,u) \\ w(x+u) &= w(x) + \frac{1}{EI} \left[m(x)u + q(x)\frac{u^2}{2} + C(x,u) \right] \\ z(x+u) &= z(x) + w(x)u + \frac{1}{EI} \left[m(x)\frac{u^2}{2} + q(x)\frac{u^3}{6} + D(x,u) \right], \end{aligned}} \tag{95}$$

donde

$$\begin{aligned} A(x,u) &= \int_x^{x+u} p(s)ds; & B(x,u) &= \int_x^{x+u} (x+u-s)p(s)ds; \\ C(x,u) &= \int_x^{x+u} B(x,s-x)ds; & D(x,u) &= \int_x^{x+u} C(x,s-x)ds, \end{aligned} \tag{96}$$

que es equivalente, en el sentido de conducir a las mismas soluciones, y la alternativa, al sistema de ecuaciones diferenciales (86).

Nótese que las funciones $A(x,u), B(x,u), C(x,u), D(x,u), E(x,u)$ y $F(x,u)$ son conocidas tan pronto como la función de carga $p(x)$ es conocida y que en algunos casos se puede resolver el problema con $1, 2, 3$ ó todas las ecuaciones en (95), dependiendo de las condiciones de contorno. Nótese también que el sistema (95) puede ser considerado como un sistema de ecuaciones en diferencias (basta hacer $u = \delta x$), que da la solución exacta en los puntos de interpolación.

Escribiendo la segunda ecuación de (95) para dos valores, u y u_1, se obtiene

$$u_1 m(x+u) + (u-u_1)m(x) - um(x+u_1) + uB(x,u_1) - u_1 B(x,u) = 0, \tag{97}$$

que es una ecuación funcional en $m(x)$.

Similarmente, se puede escribir la última ecuación de (95) para tres valores diferentes de u y eliminar $w(x), m(x)$ y $q(x)$ para obtener una ecuación funcional en $z(x)$. Por ejemplo, si se escribe esta ecuación para $u, 2u, 3u$ y $4u$, se obtiene la ecuación funcional

$$\boxed{\begin{array}{rcl} z(x+u) & = & z(x)/4 + 3z(x+2u)/2 - z(x+3u) + z(x+4u)/4 \\ & & +(4D(x,u) - 6D(x,2u) + 4D(x,3u) - D(x,4u))/EI, \end{array}} \tag{98}$$

que es equivalente, y la alternativa, a la ecuación diferencial (85).

Las ecuaciones (97) y (98) pueden ser interpretadas como ecuaciones en diferencias finitas. En este caso, dan la solución exacta en los puntos de interpolación. La ventaja del nuevo planteamiento es que desaparecen las derivadas. En consecuencia, muchos problemas pueden plantearse como ecuaciones y sistemas de ecuaciones funcionales, como alternativa a las ecuaciones diferenciales.

7 Redes funcionales[13]

Para motivar las redes funcionales se presenta a continuación un sencillo ejemplo de diagnóstico médico.

Supóngase que se desea medir la posibilidad de que un paciente tenga una cierta enfermedad basándose en tres síntomas continuos X, Y y Z, que toman valores numéricos x, y y z, respectivamente. Denótese a esta medida mediante $Q(x, y, z)$, esto es, una función de los valores numéricos de los síntomas medidos.

Además, se supone que la información contenida en una tripleta $\{X, Y, Z\}$ es acumulativa; es decir, el valor $Q(x, y, z)$ se puede obtener combinando dos de los síntomas para obtener un nuevo valor (mediante una función) y, posteriormente, combinar este nuevo valor con el valor del síntoma restante. Más precisamente, se supone que existen funciones F, G, H, K, L y M tales que

$$Q(x, y, z) \equiv F[G(x, y), z] = K[x, N(y, z)] = L[y, M(x, z)]. \tag{99}$$

De esta manera, la medida $Q(x, y, z)$ de que el paciente tenga la enfermedad puede calcularse por medio de una función F de $G(x, y)$ (un resumen de las influencias de los síntomas X e Y) y el valor z asociado al síntoma Z. En otras palabras, si en un tiempo dado, se conocen los valores asociados a los síntomas X e Y, se pueden calcular las influencias de estos dos síntomas sobre Q por medio de $G(x, y)$, y más tarde incorporar la influencia del síntoma Z

[13] El lector interesado en redes funcionales puede consultar los trabajos de Castillo y Gutiérrez [23], Castillo, Cobo, Gutiérrez y Pruneda [16, 17, 18, 19], ó Castillo, Gutiérrez, Hadi y Lacruz [25].

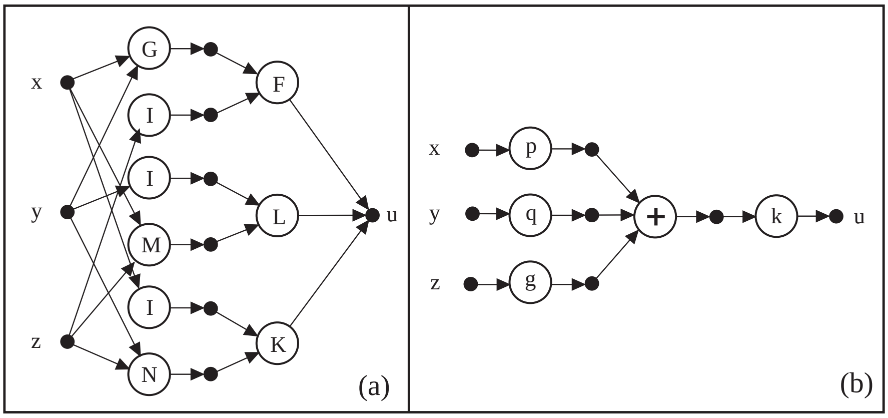

Figura 15: Redes funcionales equivalentes que resultan de un problema de diagnóstico.

por medio de una función F. Se supone que el mismo argumento es válido para cualquier permutación de los síntomas X, Y y Z.

Si los valores de las variables síntomas están directamente relacionados con la enfermedad, es razonable suponer que las funciones F, K, L, G, N y M son invertibles (estrictamente monótonas) con respecto a ambas variables. Esto significa que a mayor (menor) nivel de un síntoma mayor (menor) posibilidad de la enfermedad.

Las Ecuaciones (99) sugieren la red de la Figura 15(a), donde I se usa para hacer referencia a la función identidad $I(x) = x$ y las tres flechas convergentes en la unidad u se usan para indicar valores coincidentes, es decir, los valores que llegan de cada una de las conexiones tienen que ser iguales. Esta red no es una red neuronal porque:

1. Las funciones neuronales son arbitrarias.

2. Algunas funciones neuronales son multiargumento (en concreto, F, G, K, L, M y N).

3. Las salidas de las neuronas F, L y K son coincidentes, es decir, determinan un mismo valor u.

En consecuencia, las redes neuronales resultan inapropiadas para reproducir este modelo.

Las conexiones coincidentes en la unidad u o, equivalentemente, las Ecuaciones (99) establecen fuertes condiciones sobre las funciones neuronales F, G, K, L, M y N. Los métodos de las ecuaciones funcionales permiten trabajar con estas ecuaciones y obtener las correspondientes condiciones funcionales.

La solución general continua del sistema de ecuaciones funcionales (99) es

$$\begin{array}{rcl} F(x,y) & = & k[f(x)+g(y)], \\ G(x,y) & = & f^{-1}[p(x)+q(y)], \\ K(x,y) & = & k[p(x)+n(y)], \\ N(x,y) & = & n^{-1}[q(x)+g(y)], \\ L(x,y) & = & k[q(x)+m(y)], \\ M(x,y) & = & m^{-1}[p(x)+g(y)], \end{array} \tag{100}$$

donde k, g, p y q son funciones arbitrarias y f, m y n son funciones arbitrarios invertibles. Las cuatro primeras ecuaciones de (100) son las soluciones de la primera ecuación funcional de (99), y las cuatro últimas ecuaciones de (100) son las soluciones de la última de (99).

Reemplazando (100) en (99) se llega a

$$Q(x,y,z) = k[p(x)+q(y)+g(z)]. \tag{101}$$

La Ecuación (101) muestra que las redes funcionales de las Figuras 15(a) y (b) son equivalentes, en el sentido de que dan las mismas salidas para cada entrada. No obstante, nótese que tanto la topología de la red como su estructura, mostrada en la Figura 15(b), son mucho más sencillas que las de la Figura 15(a).

El resultado más interesante de este ejemplo es comprobar que toda ecuación o sistema de ecuaciones funcionales equivale a una red, que hemos denominado funcional y que puede ser simplificada utilizando las ecuaciones funcionales. A diferencia de las redes neuronales, en las que la topología de la red se elige por tanteos, en este caso la topología de la red queda definida de una forma natural por la ecuación o el sistema de ecuaciones funcionales. Los métodos para aprender estas neuronas, es decir, las funciones asociadas a los nodos, se describen en las referencias anteriormente indicadas, en las que se dan además muchos ejemplos de aplicaciones prácticas.

8 Agradecimientos

El autor agracede al Editor de La Gaceta Matemática, sus valiosas sugerencias que permitieron mejorar la presentación y el contenido del artículo. También expresa su agradecimiento a José Antonio Garrido, de Iberdrola, por su apoyo.

Bibliografía

[1] Aczél, J. *Lectures on functional equations and their applications.* Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, 1966.

[2] Aczél, J., editor. *Functional equations: history, applications and theory.* Mathematics and its Applications. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, 1984.

[3] Aczél, J. *A short course on functional equations.* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[4] Aczél, J. and Alsina, C. Characterization of some classes of quasilinear functions with applications to triangular norms and to synthesizing judgements. In *Contributions to production theory, natural resources, economic indices and related topics*, volumen 487 de *Methods of Operations Research.* Athenäum-Hain-Hanstein-Königstein, 1984.

[5] Aczél, J. and Alsina, C. On synthesis of judgments. *Socio-Econom. Plann. Sci.*, 20:333–339, 1986.

[6] Aczél, J., Roberts, F. S. and Rosenbaum, Z. On Scientific laws without dimensional constants. J. Math. Anal.Appl., 119:289–416,1986.

[7] Arnold, B., Castillo, E., and Sarabia, J. M.. Conjugate exponential family priors for exponential family likelihoods. *Statistics*, 25:71–77, 1993.

[8] Arnold, B., Castillo, E., and Sarabia, J. M.. A conditional characterization of the multivariate normal distribution. *Statistics and Probability Letters*, 19:313–315, 1994.

[9] Arnold, B., Castillo, E., and Sarabia, J. M.. Modelling the fatigue life of longitudinal elements. *Naval Research Logistic Quarterly*, 43:885–895, 1996.

[10] Arnold, B., Castillo, E., and Sarabia, J. M. *Conditional Specification of Statistical Models.* Springer Verlag, New York, 1999, 424 pages.

[11] Arnold, B. C., Castillo, E., Sarabia, J. M. and González-Vega, L. Multiple Modes in Densities with Normal Conditionals. *Statistics and Probability Letters*, 49(4):355–363, 2000.

[12] Bogdanoff, J. L. and Kozin, F. Effect of length on fatigue life of cables. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(6):925–940,1987.

[13] Castillo, E. *Extreme Value Theory in Engineering.* Academic Press, New York, 1988.

[14] Castillo, E. Algunas aplicaciones de las ecuaciones funcionales. Lección inaugural del curso 1996/97. Servicio de Publicaciones. Universidad de Cantabria. Santander (Spain), 1996.

[15] Castillo, E., Ruiz-Cobo, R. and Alsina, C. Una metodología para la obtención de tarifas impositivas congruentes. *Hacienda Pública Española*, 122:27–36, 1992.

[16] Castillo, E., Cobo, A., Gutiérrez, J. M. and E. Pruneda. *Introducción a las redes funcionales con aplicaciones.* Editorial Thompson-Paraninfo, Madrid, 1998.

[17] Castillo, E., Cobo, A., Gutiérrez, J. M. and E. Pruneda. *Functional Networks with Applications.* Kluwer Academic Publishers, 1998.

[18] Castillo, E., Cobo, A., Gutiérrez, J. M. and Pruneda, R. E. Working with Differential, Functional and Difference Equations Using Functional Networks. *Applied Mathematical Modeling*, 23:89–107, 1999.

[19] Castillo, E., Cobo, A., Gutiérrez, J. M. and Pruneda, R. E. Functional Networks. A New Neural Network Based Methodology. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*,15:90–106, 2000.

[20] Castillo, E. and Fernández-Canteli, A. A General Regression Model For Lifetime Evaluation and Prediction. *International Journal of Fracture*, Vol 107, 2, 117–137, 2001.

[21] Castillo, E., Fernández-Canteli, A. and Hadi, A. S. On Fitting a Fatigue Model to Data. *International Journal of Fatigue*, 21:97–106, 1999.

[22] Castillo, E. and Galambos, J. Conditional distributions and the bivariate normal distribution. *Metrika*, 36(3):209–214, 1989.

[23] Castillo, E. and Gutiérrez, J. M. Nonlinear Time Series Modeling and Prediction Using Functional Networks. Extracting Information Masked by Chaos. *Physics Letters A*, Vol. 244:71–84, 1998.

[24] Castillo, E. and A.S. Hadi. Modelling lifetime data with applications to fatigue models. *Journal of the Americal Statistical Association*, 90:1041–1054, 1995.

[25] Castillo, E., Gutiérrez, J. M., Hadi, A. S., and Lacruz, B. Some Applications of Functional Networks in Statistics and Engineering. *Technometrics*, Vol 43, No 1, 10-24, 2001.

[26] Castillo, E. and Iglesias, A. Some characterizations of families of surfaces using functional equations. *ACM Transactions on Graphics*, 16(3):296–318, 1997.

[27] Castillo, E. and Iglesias, A. A package for symbolic solution of real functional equations of real variables. *Aequationes Mathematicae*, 54:181–198, 1997.

[28] Castillo, E. and Ruiz-Cobo, R. *Functional Equations in Science and Engineering.* Marcel Dekker, 1992.

[29] Castillo, E. and Ruiz-Cobo, R. *Ecuaciones Funcionales en la Ciencia, la Economía y la Ingeniería.* Editorial Reverté, Barcelona, 1993.

[30] Castillo, E., Sarabia-Alegría, J. M. Sarabia-Alzaga, J. M. and González-Vega, A. M. Some Models for Demand Functions with Advertising. *Central European Journal for Operations Research*, 7(2), 1999.

[31] Cohen Stuart, A.J. *On progressive taxation*, págs. 48–71. 1889. The Hague, 1889. English translation in 'Classics in the theory of public finance'. Macmillan. London-New York, 1958.

[32] Cox, D. R. Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2:187–202, 1972.

[33] Eichhorn, W. *Functional equations in Economics*, volumen 11 de *Applied Mathematics and Computation Series.* Addison-Wesley Publishing Co., 1978a.

[34] Eichhorn, W. Inequalities and functional equations in the theory of the price index. En *General Inequalities 1. (Proc. First Internat. Conf. on General Inequalities, Oberwolfach, 1976)*, 23–28, Basel-Stuttgart, 1978b.

[35] Eichhorn, W. What is an economic index? an attempt of an answer. En *Theory and applications of economic indices. (Proc. Internat. Sympos., Karlsruhe,1976)*, págs. 23–28, Würzburg, 1978c.

[36] Gelman, A. and Meng, X. L. A Note on Bivariate Distributions That Are Conditionally Normal", *The American Statistician*, 45:125–126, 1991.

[37] Mill, J.S. *Principles of political economy.* J. W. Parker, West Strand, London, 1848. 2nd ed.: A. M. Kelley, Clifton, 1973.

[38] Piccioto, R. Tensile fatigue characteristics of sized polyester/viscose tarn and their effect on weaving performance. Master's thesis, North Caroline State University, 1970.

[39] Young, H.P. Distributive justice in taxation. *J. Econom. Theory*, 44:321–335, 1988.

Enrique Castillo
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Cantabria
Avda. de Los Castros s/n, 39005 Santander

Universidad de Castilla la Mancha
Paseo de la Universidad 4, 13071 Ciudad Real
correo electrónico: `castie@unican.es`