El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

Los números poligonales.

Una caja de sorpresas con mucha historia.

Antonio Pérez Sanz

El 30 de marzo de 1796 un joven alemán de 18 años hacía su primera anotación en un modesto cuaderno. Se trata de **Carl Freidrich Gauss**, uno de los matemáticos más geniales de todos los tiempos.

Esa anotación hace referencia a la construcción geométrica usando sólo regla y compás del polígono regular de 17 lados. Desde los tiempos de **Euclides**, la lista de polígonos regulares que se pueden construir, de forma exacta, usando estas dos simples herramientas, permanecía inamovible. El joven Gauss no sólo incorporó un nuevo polígono a la lista sino que la cerró definitivamente al afirmar que los únicos polígonos que se pueden construir de esta forma son aquellos cuyo número de lados es de la forma 2^n $(n = 2, 3...)$ o bien un producto de primos distintos, de la forma $2^{2^n} + 1$ (primos de Fermat de los cuales sólo se conocen $3, 5, \mathbf{17}, 257, 65.537$), multiplicado por 2^n $(n = 0, 1, 2, 3...)$

Pero de ese maravilloso cuaderno de sólo 19 páginas vamos a fijar hoy nuestra atención en otra de las casi 150 anotaciones que Gauss apuntó en él a lo largo de su vida. Se trata de una nota llena de júbilo, realizada sólo tres meses después de la primera, exactamente el 10 de julio de 1796.

Es una nota escueta, aunque no tan enigmática como otras muchas que le sucederían:

$$\text{¡¡}\textbf{Eureka!!}\qquad \mathbf{N} = \Delta + \Delta + \Delta$$

En ella Gauss, recién cumplidos los 19 años, celebra haber descubierto que todo número natural es la suma de, a lo sumo, tres números triangulares.

Un magnífico homenaje a **Pitágoras**, de alguna manera, el padre de la Teoría de Números. Sin duda a los pitagóricos les debemos el nacimiento mismo de las Matemáticas, al introducir la idea de que los objetos matemáticos, los números y las figuras geométricas son abstracciones, ideas de la mente con existencia independiente del objeto al que representan.

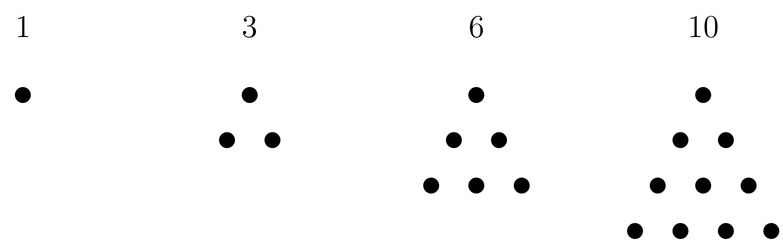
Con cierta frecuencia se habla de misticismo de la escuela pitagórica sobre los números enteros. Gran culpa de ello puede ser debido a la famosa frase atribuida al pitagórico **Filolao**, interpretada en un sentido más figurado que real: *"Todas las cosas que pueden ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido"*.

Sin embargo, en su *Metafísica*, Aristóteles afirma que los pitagóricos consideraban a los números como los componentes últimos de los objetos materiales. Más o menos como nuestros átomos. Seguramente a esta concepción más materialista debamos la existencia de los números triangulares y de los números poligonales desde los albores de la Matemática.

En efecto, al considerar los números como puntos materiales, como guijarros, se pueden realizar con ellos configuraciones geométricas claras.

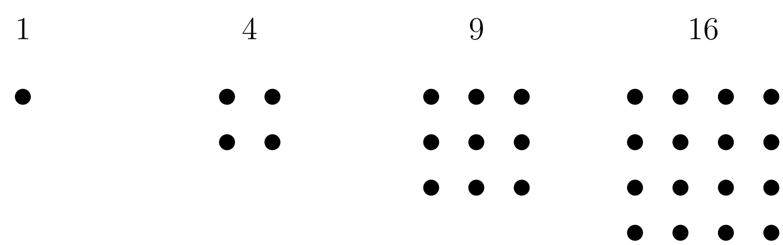
Así tres puntos formarán un triángulo. Si a estos tres puntos les añadimos otros tres seguimos teniendo un triángulo, y lo mismo ocurre si a éste le añadimos cuatro puntos.

Es decir los números $1, 3, 6, 10, 15...$ son números triangulares.



Números triangulares

De forma mucho más clara con los números $4, 9, 16, 25...$ podemos formar cuadrados. Junto al 1 constituyen los números cuadrados.



Números cuadrados

Esta visión geométrica les permitió obtener los primeros resultados generales sobre propiedades de los números naturales.

Algunos evidentes, al fin y al cabo eso es lo que significa la palabra griega "teorema", lo que se contempla, lo que se ve; aunque nada simples si los miramos con ojos exclusivamente aritméticos:

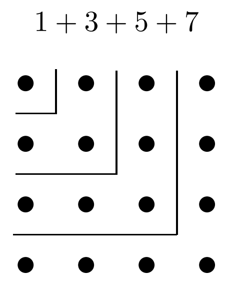
$$
\begin{aligned}
T_1 &= 1 \\
T_2 &= 1 + 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_3 &= 1+2+3 \\
&\cdots \\
T_n &= 1+2+3+\ldots+n.
\end{aligned}
$$

Enunciado en forma de teorema: "*La suma de los n primeros números naturales es un número triangular*".

O bien:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 1 \\
C_2 &= 1+3 \\
C_3 &= 1+3+5 \\
&\cdots \\
C_n &= 1+3+5+\ldots+n.
\end{aligned}
$$

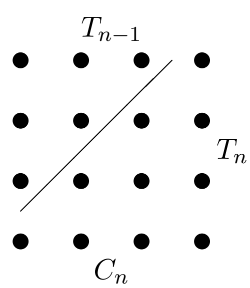


"*La suma de los n primeros números impares es un número cuadrado*".

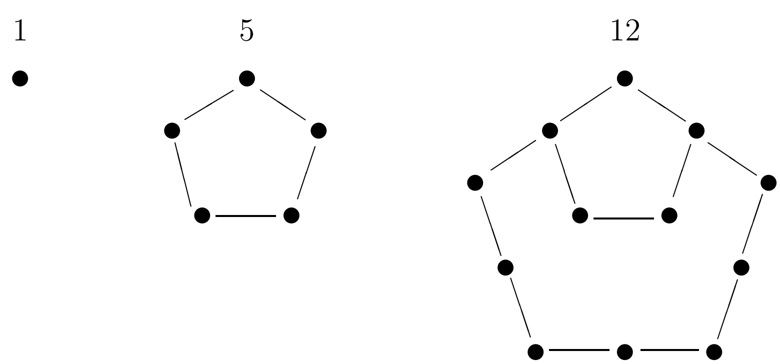
O este otro:

$$C_n = T_n + T_{n-1}.$$

"*Todo número cuadrado es suma de dos números triangulares consecutivos*".



Siguiendo con esta visión geométrica, es inmediato descubrir los números pentagonales: $1, 5, 12, 22\ldots$



Números pentagonales

O los hexagonales: 1, 6, 15, 28...

En todos los casos las series numéricas son sumas parciales de los primeros términos de progresiones aritméticas cuyo primer término es siempre 1 y cuya diferencia es d. Siendo d el número de lados del polígono asociado a la serie menos dos unidades, es decir, $d = 1$ para números triangulares, $d = 2$ para cuadrados, $d = 3$ para los pentagonales...

Lo que viene a demostrar, que sin ningún apoyo algebraico, y utilizando exclusivamente modelos geométricos, los pitagóricos dominaban los métodos para sumar progresiones aritméticas simples del tipo $\sum_{k=1}^{n} k$; $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$; y seguramente del tipo $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Aunque no llegaran a efectuar demostraciones generales de las relaciones entre los distintos tipos de números poligonales, sembraron la semilla de la curiosidad en un campo abonado. Un campo que va reclamar la atención de matemáticos de todas las épocas.

Diofanto de Alejandría (s. III d. de C) además de su famosa Aritmética, escribió otro libro, del que por desgracia sólo se conservan fragmentos, sobre los números poligonales, en el que la idea de su construcción se extiende al espacio, haciendo su aparición los números piramidales, que se obtienen apilando en capas los sucesivos números poligonales de un mismo orden.

Los números piramidales de base triangular se obtienen a través de las sumas parciales de los números triangulares, también se les conoce como números tetragonales.

Son: $1, 4, 10, 20$...

Los piramidales cuadrados son: $1, 5, 14, 30$...

Los de base pentagonal: $1, 6, 18, 40$...

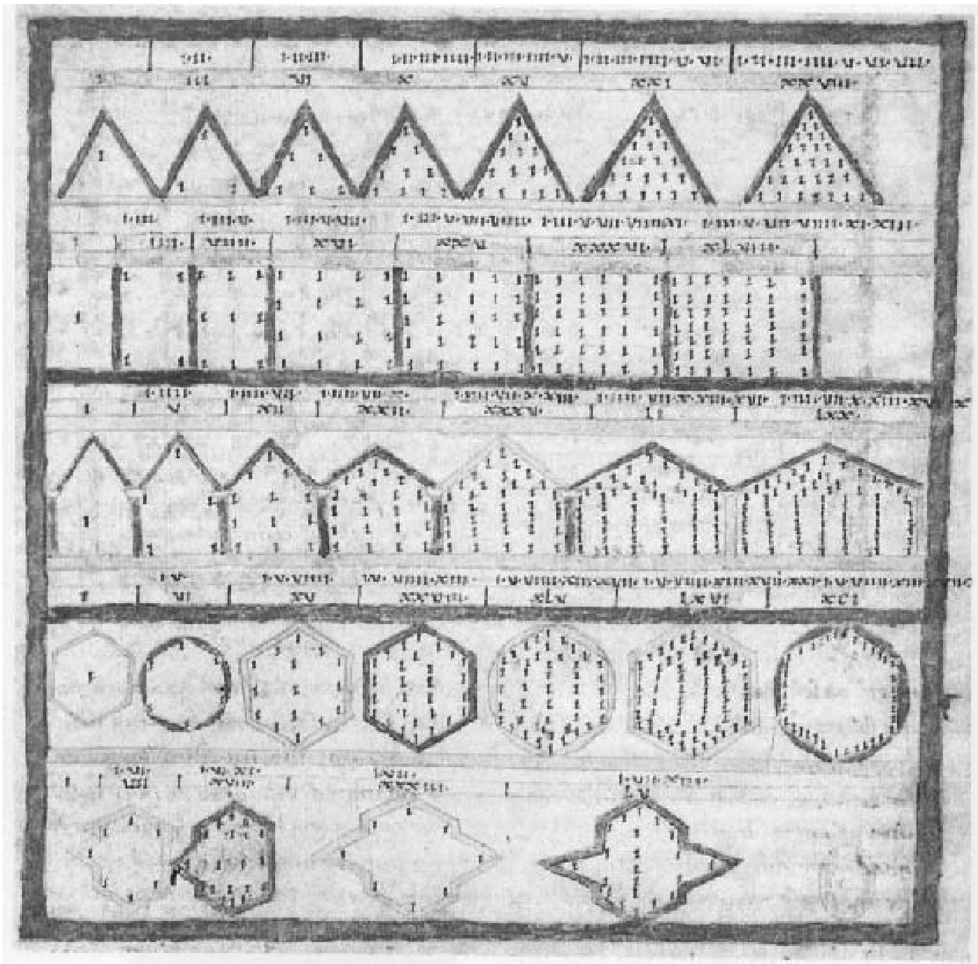
A pesar de contar con un modelo geométrico claro, la obtención de fórmulas algebraicas generales para obtener directamente estos números ya no es tarea tan simple.

La curiosidad sobre estos números va a llegar a la Edad Media gracias a las obras de **Nicómaco de Gerasa** (s. I d. de C.) que llegó a descubrir resultados generales de interés como el hecho de que el cubo de todo número entero n, es la suma de n números impares consecutivos:

$$1^3 = 1;\ 2^3 = 3 + 5;\ 3^3 = 7 + 9 + 11; ...$$

Y sobre todo de **Boecio**, cuya principal obra matemática, la *Aritmética*, va a constituir una de las escasas fuentes de alimentación de las matemáticas hasta la llegada de las traducciones de las obras griegas realizadas por los sabios islámicos.

En muchos de los manuscritos medievales inspirados en las obras de Boecio podemos encontrar referencias gráficas de los números poligonales como la de la figura adjunta, en la que aparecen los números poligonales distribuidos en forma de tabla.



Esta disposición en forma de tabla de doble entrada sugiere la búsqueda de relaciones más generales que las encontradas por los pitagóricos entre los números cuadrados y los triangulares.

De hecho, si traducimos la tabla a una tabla numérica será fácil obtener alguna de estas relaciones

Números	**D \ N**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Triangul.	**1**	1	3	6	10	15
Cuadrad.	**2**	1	4	9	16	25
Pentag.	**3**	1	5	12	22	35
Hexag.	**4**	1	6	15	28	45
Heptag.	**5**	1	7	18	34	55

Ahora es fácil comprobar que la relación de los números cuadrados con los triangulares, $C_n = T_n + T_{n-1}$, es un caso particular de una ley más general:

"*Todo número poligonal es la suma del poligonal del mismo orden y de una dimensión inferior más el n triangular de orden inferior*".

Es decir, $P_5 = C_5 + T_4$.

Y en general $N_{d,n} = N_{d-1,n} + N_{1,n-1}$.

Por recurrencia es fácil obtener una regla algebraica para obtener un número poligonal de dimensión d y orden n utilizando sólo números triangulares:

$$N_{d,n} = T_n + (d-1)T_{n-1}.$$

De donde es elemental obtener la fórmula algebraica general:

$$N_{d,n} = n + \frac{d \cdot n \cdot (n-1)}{2}.$$

Sin embargo en ningún manuscrito medieval, ni tan siquiera en el famoso Liber Abaci de **Leonardo de Pisa**, que también dedica un capítulo a estos números se obtiene un resultado general de este tipo.

En el siglo XVII, **Pierre de Fermat**, es otro de los grandes matemáticos que va a dirigir su atención sobre los números poligonales, pero esta vez para lanzar uno de sus retos en forma de conjetura:

"*Todo número entero puede expresarse mediante suma de, a lo sumo, n números n-gonales*".

¡Y ya sabemos el poderoso influjo que las conjeturas de Fermat ejercieron sobre los matemáticos posteriores!

Lagrange y Gauss aceptaron el reto. Precisamente la anotación de Gauss en su diario responde a la alegría de haber encontrado una demostración para el caso particular de números triangulares:

$$\mathbf{N} = \Delta + \Delta + \Delta.$$

"*Todo número entero es suma de, a lo sumo, tres números triangulares*".

No se quedó ahí; en sus Disquisiciones Aritméticas, publicadas cinco años después de esta anotación, Gauss, nos brinda la demostración no sólo para números triangulares sino también nos demuestra que todo número entero es suma de, a lo sumo, cuatro números cuadrados [1].

No habrá que esperar mucho tiempo para ver demostrada la conjetura general. Sería en 1815 en una de las dos memorias que Augustin-Louis Cauchy presentó a la Academia de Ciencias de París.

[1] La demostración se encuentra en la Sección Quinta "de las formas y ecuaciones indeterminadas de segundo grado", artículo 293, como un simple corolario de artículos anteriores. Lamentablemente no existe traducción al castellano de las Disquisiciones, aunque si hay una traducción al catalán, de Griselda Pascual Xufré, Disquisicions Aritmètiques (Barcelona 1996) editada por la Societat Catalana de Matèmatiques.

Tras más de dos milenios, los, en apariencia ingenuos, números poligonales de la escuela pitagórica contribuían a consagrar de manera definitiva a dos de los grandes matemáticos del Siglo XIX.

Hoy como siempre siguen constituyendo uno de los ejemplos más bellos de utilización de modelos geométricos para abordar problemas de la teoría de números. Y, por supuesto, un excelente material para fomentar investigaciones autónomas de los alumnos en las aulas de la enseñanza secundaria.

Antonio Pérez Sanz
I.E.S. Salvador Dalí.
C/ Verdaguer y García s/n. Madrid. 28027
e-mail: aperez4@platea.pntic.mec.es
http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/