# EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

**Javier Cilleruelo Mateo**

En esta ocasión, debido al gran interés que parecen haber suscitado los cuadrados mágicos, dedicamos la sección a las colaboraciones presentadas por los lectores sobre este tema.

Nuevas colaboraciones y sugerencias sobre cualquier tema que os parezca de interés pueden ser enviadas a la dirección *franciscojavier.cilleruelo@uam.es*

## Cuadrados grecolatinos

**Cristóbal Sánchez-Rubio**

Dado un conjunto de $n$ símbolos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, llamaremos cuadrado *latino* a una disposición de ellos en $n$ filas y $n$ columnas de modo que en cada fila y en cada columna haya uno y sólo uno de ellos. Por ejemplo si $n = 4$, el cuadrado de la izquierda es un ejemplo de cuadrado latino con los símbolos $\{a, b, c, d\}$, el del centro es otro ejemplo de cuadrado latino con los símbolos $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ y el cuadrado de la derecha es la superposición de los otros dos.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $a$ | $d$ | $c$ |
| $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $d$ | $c$ | $b$ | $a$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ |
| $\gamma$ | $\delta$ | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\delta$ | $\gamma$ | $\beta$ | $\alpha$ |
| $\beta$ | $\alpha$ | $\delta$ | $\gamma$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a\alpha$ | $b\beta$ | $c\gamma$ | $d\delta$ |
| $b\gamma$ | $a\delta$ | $d\alpha$ | $c\beta$ |
| $c\delta$ | $d\gamma$ | $a\beta$ | $b\alpha$ |
| $d\beta$ | $c\alpha$ | $b\delta$ | $a\gamma$ |

En él se observa que cada pareja de símbolos aparece una sola vez. Cuando al superponer dos cuadrados latinos ocurre esto, decimos que ambos cuadrados son ortogonales y al cuadrado resultante se le denomina *grecolatino*.

La existencia de cuadrados grecolatinos para un orden $n$ dado se mantuvo en principio en el contexto de las curiosidades matemáticas. A mediados del siglo XX, Fisher demostró su utilidad para el control de experimentos estadísticos, más concretamente en experiencias agronómicas. La configuración del cuadrado grecolatino de la derecha sería un modelo para experimentar cuatro tipos de cereal $(a, b, c, d)$ con cuatro tipos de abono $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ en una parcela rectangular que en sentido norte-sur presenta una variación continua de humedad y en sentido este-oeste otra variación del terreno, como por ejemplo la concentración de arcilla. Dividiendo en 16 subparcelas pueden experimentarse diferentes combinaciones de cereal, abono, grados de humedad y concentración de arcilla.

A nosotros nos interesan por su relación con los cuadrados mágicos, como veremos a continuación. Se llama cuadrado *mágico* de orden $n$ a una disposición de $n^2$ números naturales consecutivos (ordinariamente desde el 1 hasta el $n^2$) en las $n^2$ posiciones de un encasillado de $n$ filas y $n$ columnas de modo que los números de cada fila y cada columna sumen lo mismo. Veamos primero que la existencia de un cuadrado grecolatino de orden $n$ permite construir un cuadrado mágico del mismo orden.

En efecto, si interpretamos los $n$ símbolos del primer conjunto como cifras en base $n$ (desde 0 hasta $n-1$) y lo mismo para las del segundo, el cuadrado grecolatino representa $n^2$ números diferentes de dos cifras expresados en base $n$. Podemos entonces cambiar ambos conjuntos de símbolos por el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. El cuadrado grecolatino de la página anterior escrito de este modo está colocado a la izquierda:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 00 | 11 | 22 | 33 |
| 12 | 03 | 30 | 21 |
| 23 | 32 | 01 | 10 |
| 31 | 20 | 13 | 02 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 10 | 15 |
| 6 | 3 | 12 | 9 |
| 11 | 14 | 1 | 4 |
| 13 | 8 | 7 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 |
| 7 | 4 | 13 | 10 |
| 12 | 15 | 2 | 5 |
| 14 | 9 | 8 | 3 |

El carácter grecolatino asegura la no repetición de números. Comienza en 0 (escrito $00_{(4)}$) y termina en $n^2-1$ (escrito $33_{(4)}$). Por tanto hay $n^2$ números consecutivos. En el cuadrado central se han colocado los mismos números en base 10 (desde el 0 hasta el 15) y en el de la derecha se ha sumado 1 a cada celda, con lo que se sitúan en el rango $1, \ldots, n^2$, como suele ser habitual. Nuevamente el carácter grecolatino del cuadrado de la izquierda asegura el carácter mágico del de la derecha. En efecto, sumando "unidades"y "decenas"por separado en el cuadrado de la izquierda, los resultados serán iguales ya que hay una y sólo una cifra de cada clase y están todas. Estas sumas valdrán $0+1+2+3=6$ en el caso de $n=4$. En general la suma de las unidades o decenas de cualquier fila o columna en el correspondiente cuadrado grecolatino vale $\frac{1}{2}(n^2-n)$, que una vez traducido a base $n$ tiene el valor

$$S = \frac{n^2-n}{2}(n+1) = \frac{n^3-n}{2}$$

para la suma de los números de cada fila o columna en el cuadrado central. Si añadimos una unidad a cada casilla para que los números queden en el rango $1, \ldots, n^2$, como muestra el cuadrado de la derecha, bastará sumar $n$ a la fórmula anterior para obtener finalmente la suma de los términos de cada fila y cada columna en un cuadrado mágico de orden $n$:

$$S_n = \frac{n^3+n}{2}.$$

Hemos visto que la existencia de un cuadrado grecolatino nos permite asegurar la existencia de un cuadrado mágico del mismo orden. A continuación vamos a dar un método para construir cuadrados grecolatinos de orden primo

$p$, basado en la estructura de cuerpo de $K = \mathbb{Z}/p$, que tiene una curiosa representación geométrica sobre un toro. Para fijar ideas tomaremos $p = 5$, aunque el método es válido para cualquier primo $p$.

Sea $V = K \times K = \{(a,b) : a,b \in K\}$. Como $K$ tiene 5 elementos, $V$ tiene 25, que interpretados como coordenadas de puntos constituyen lo que llamamos una geometría finita. Podemos definir "rectas"como los subconjuntos de $V$ que son soluciones de ecuaciones del tipo $ax + by = c$, en las cuales todos los coeficientes y las operaciones indicadas se refieren a los de $K$.

Por ejemplo, $y = 3x + 2$ es una recta que contiene los puntos $(0,2); (1,0); (2,3); (3,1)$ y $(4,4)$. Puestas las ecuaciones en forma explícita, hay 5 valores para la pendiente y otros 5 para la ordenada en el origen. En esta clasificación no están las rectas del tipo $x = b$, de las que existen otras cinco. En total disponemos de 30 rectas, cada una con cinco puntos. Al ser $K$ un cuerpo, las propiedades esperadas entre rectas y puntos son de inmediata comprobación.

**a)** Dos puntos distintos definen una única recta.

**b)** Dos "rectas" son paralelas (no tienen puntos comunes) si y sólo si tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.

**c)** Dos rectas no paralelas se cortan en un único punto.

La representación gráfica de esta geometría la haremos inicialmente en unos ejes clásicos que nos proporcionan una retícula de 25 puntos aislados. Asociaremos cada valor de la abscisa a una columna y cada valor de la ordenada a una fila, de modo que los 25 puntos de $V$ se corresponden con las 25 celdas de un cuadrado de orden 5.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | * | | | | |
| 3 | | | * | | |
| 2 | | | | | * |
| 1 | | * | | | |
| 0 | | | | * | |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

La figura de la izquierda muestra la representación gráfica que utilizaremos para nuestra geometría. Si usamos el símbolo $*$ para señalar un punto, la recta $y = 2x + 4$ es el conjunto representado en ella correspondiente a los puntos: $\{(0,4); (1,1); (2,3); (3,0); (4,2)\}$.

A primera vista se observa que hay un asterisco y sólo uno en cada línea (fila o columna). Por supuesto no es casualidad: expresa gráficamente el hecho de que la recta dada, $y = 2x + 4$, corta en un único punto a cada una de las rectas $y = b$, $b = 0,1,2,3,4$, que son las ecuaciones de las filas (rectas paralelas al eje $X$). De modo análogo ocurre con las columnas.

Si representamos las cinco rectas de una misma pendiente en la misma gráfica tendremos un cuadro como el que se muestra en la figura de la página siguiente para las rectas de la forma $y = x + n$ usando como símbolos $a, b, c, d$ y $e$ para los puntos de las rectas correspondientes a los valores $n = 0,1,2,3$ y 4 respectivamente.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | $e$ | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ |
| 3 | $d$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |
| 2 | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ | $d$ |
| 1 | $b$ | $a$ | $e$ | $d$ | $c$ |
| 0 | $a$ | $e$ | $d$ | $c$ | $b$ |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Evidentemente se obtiene un cuadrado latino ya que cada letra aparece una y sólo una vez en cada fila y en cada columna. No puede haber dos letras distintas en la misma celda ya que dos rectas paralelas no tienen puntos comunes. El razonamiento se completa observando que tenemos 5 rectas distintas con cinco puntos distintos cada una de ellas llenando el cuadrado de orden 5.

Cada valor de la pendiente distinto de 0 (fallaría el razonamiento para las filas) nos proporciona un cuadrado latino. Disponemos entonces de 4 cuadrados latinos, el ya expuesto y los tres restantes correspondientes a las pendientes $2, 3$ y 4.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $c$ | $a$ | $d$ | $b$ |
| $d$ | $b$ | $e$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $d$ | $b$ | $e$ |
| $b$ | $e$ | $c$ | $a$ | $d$ |
| $a$ | $d$ | $b$ | $e$ | $c$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $b$ | $d$ | $a$ | $c$ |
| $d$ | $a$ | $c$ | $e$ | $b$ |
| $c$ | $e$ | $b$ | $d$ | $a$ |
| $b$ | $d$ | $a$ | $c$ | $e$ |
| $a$ | $c$ | $e$ | $b$ | $d$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $d$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $d$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $a$ |
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |

Además, eligiendo dos cualesquiera de entre los cuatro anteriores resultan ortogonales, dado que al representar cada cuadrado latino un haz de rectas paralelas resulta que cada recta de un haz corta a cada recta de otro haz en un punto y sólo en uno, lo que garantiza la ortogonalidad. Comprobamos así un hecho general: para un orden $n$ dado, existen a lo sumo $n-1$ cuadrados latinos mutuamente ortogonales. Para que las diagonales también sean mágicas hay que elegir los cuadrados latinos entre los que tengan pendientes distintas de 1 y 4 ya que estos valores son precisamente las pendientes de ambas diagonales. Con este método sólo disponemos, en este caso, de un cuadrado grecolatino que proporcione uno mágico incluyendo ambas diagonales, que corresponde a la superposición de los dos latinos asociados a las pendientes 2 y 3.

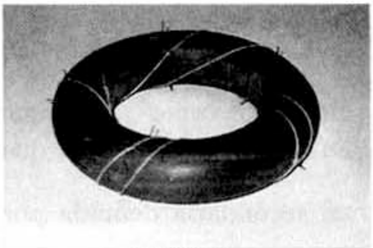
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 12 | 4 | 16 | 8 |
| 19 | 6 | 23 | 15 | 2 |
| 13 | 5 | 17 | 9 | 21 |
| 7 | 24 | 11 | 3 | 20 |
| 1 | 18 | 10 | 22 | 14 |

Superponiéndolos, interpretando las letras como cifras en base 5, pasando a base 10 y sumando a todos una unidad se obtiene el cuadrado mágico que se muestra en la figura de la izquierda en el que las filas, columnas, diagonales y paralelas a las diagonales suman 65.

Este método está basado en que $K = \mathbb{Z}/5$ es cuerpo y le podemos adaptar también a $\mathbb{Z}/p$, siendo $p$ primo. También puede extenderse para órdenes potencia de un primo ya que todos los cuerpos finitos deben tener un orden $p^a$ con $p$ primo.

La representación gráfica más interesante se obtiene dando a ambos ejes el carácter cíclico que tienen los elementos de $K$. Ello se consigue colocando el eje $X$ sobre una circunferencia dividida en 5 partes, lo que nos daría un cilindro. Haciendo lo mismo con el eje $Y$ vamos a parar a 25 puntos situados sobre la superficie de un toro.

Es curioso observar que la pendiente de una recta tiene un significado muy claro en la representación sobre el toro, indica el número de vueltas que da la recta da sobre el círculo menor mientras se recorre una vuelta sobre el círculo mayor.



Si se dispone de un modelo material, todo lo dicho es clarísimo. La fotografía de la izquierda muestra un modelo en madera. Se han colocado clavos en los puntos de la geometría finita y con un cordón blanco se representan dos rectas "paralelas", concretamente las de las ecuaciones $y = 4x$ y $y = 4x + 1$.

El interés del método expuesto estriba en la relación entre temas aparentemente tan dispares como el álgebra, la geometría, las estructuras finitas, los cuadrados mágicos y la representación sobre superficies topológicamente distintas al plano. Vamos a dar ahora una fórmula para conseguir cuadrados grecolatinos de orden $n$ impar. Una vez conseguido esto, sólo faltará asegurarnos de que las diagonales también dan la misma suma y tendremos la fórmula para generar cuadrados mágicos de orden impar.

Pongamos $d$ para indicar las "decenas", $u$ para las "unidades", $x$ la fila e $y$ la columna (numeradas ambas de 0 a $n - 1$). Interpretemos las expresiones

$$\begin{aligned} d &= ax + by + r \\ u &= px + qy + s \end{aligned} \qquad (1)$$

en el anillo $\mathbb{Z}_n$ de las clases de restos módulo $n$ con las operaciones usuales. Supongamos que $a$ es primo con $n$. Entonces, manteniendo fijos $b, y, r$; cuando $x$ recorre el conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, $d$ toma todos los valores del mismo conjunto y una vez cada uno; es decir, en la columna $y$ aparecen todos los valores de $d$ sin repetir ninguno. Lo mismo sucede si fijamos $x$ y variamos $y$, siendo $b$ primo con $n$: saldrán en cada fila todos los valores de $d$ sin repetir ninguno. De modo análogo se comporta $u$ suponiendo que $p$ y $q$ son primos con $n$. En otras palabras, las hipótesis $a, b, p, q$ primos con $n$ garantiza que los conjuntos de los $n^2$ valores de $d$ y $u$ obtenidos de (1) al dar a $x$ y a $y$ los $n^2$ valores del cuadro forman dos cuadrados latinos. Para asegurar que el cuadrado superpuesto es grecolatino necesitamos que el sistema (1) en las incógnitas $x$, $y$ tenga solución única para $d, u$ dado, lo cual ocurre cuando $aq - bp$ es primo con $n$.

Tomando $a = n - 1$; $b = 1$; $p = n - 1$; $q = n - 1$ se cumplen todas las condiciones anteriores y el cuadrado resultante es casi-mágico. Para estos valores, (1) queda en la forma

$$\begin{aligned} d &= -x + y + r \\ u &= -x - y + s \end{aligned} \qquad (2)$$

Nos quedan libres los parámetros $r$ y $s$ para asegurar la suma de las diagonales. La diagonal principal está definida por la condición $x = y$. Sustituyendo en (2), resulta:

$$d = r, \qquad u = (n-2)x + s.$$

Como $n - 2$ es primo con $n$, la cifra $u$ de las unidades recorre el rango $\{0, 1, \dots, n-1\}$ a lo largo de la diagonal principal para cualquier valor de $s$ y su suma es $\frac{1}{2}n(n-1)$. Al ser constante la cifra de las "decenas", para que sume lo mismo se debe cumplir $nr = \frac{1}{2}n(n-1)$. Es decir, $r = \frac{1}{2}(n-1)$, que es entero al ser $n$ impar.

Procediendo de modo análogo para la diagonal secundaria definida por $x + y = n + 1$ tenemos:

$$d = (n-2)x + 1 + r, \qquad u = -1 + s.$$

Como $n - 2$ es primo con $n$, la cifra $d$ de las decenas recorre también el rango $\{0, 1, \dots, n-1\}$ a lo largo de la diagonal secundaria para cualquier valor de $r$ y su suma es $\frac{1}{2}n(n-1)$ . Al ser constante la cifra de las "unidades", para que sume lo mismo se debe cumplir:

$$n(-1+s) = \frac{n(n-1)}{2} \Longleftrightarrow s = \frac{n+1}{2},$$

que es entero al ser $n$ impar. La expresión final para "decenas" y "unidades" queda:

$$d = -x + y + \frac{n-1}{2}, \qquad u = -(x+y) + \frac{n+1}{2}.$$

Si pasamos el número $du$ a base 10 y sumamos 1 para situarnos en el rango correcto queda probada la fórmula de la página 450 del número 3 de la Gaceta.

Cristobal Sánchez-Rubio, I.E.S. Penyagolosa, Castellón
e-mail: `csanchez@platea.pntic.mec.es`