Las medallas Fields

Sección a cargo de

Adolfo Quirós Gracián

Paul J. Cohen y la técnica del *forcing*

por

Joan Bagaria

Paul J. Cohen recibió la medalla Fields en el Congreso Internacional de Matemáticos del año 1966, celebrado en Moscú, por la solución del problema de Cantor de la cardinalidad del continuo, también conocido como el problema número uno de Hilbert. En el segundo Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en París el año 1900, David Hilbert, probablemente el matemático más influyente de su tiempo, presentó una lista de los problemas futuros de las matemáticas, que habría de incidir notablemente en el desarrollo de la matemática del siglo que iba a comenzar. El primer problema de la lista era el siguiente [1]:

> Dos sistemas, es decir dos conjuntos, de números reales ordinarios (o de puntos) son llamados, según Cantor, *equivalentes* o *de la misma potencia*, cuando se puede establecer entre ellos una relación tal que a cada número de uno de los conjuntos le corresponde un número determinado y sólo uno del otro. Las investigaciones de Cantor sobre tales conjuntos hacen muy probable la exactitud de un teorema el cual, hasta este momento, y a pesar de los más grandes esfuerzos, no ha podido ser demostrado por nadie. Este teorema es el siguiente: Todo sistema de números reales en número infinito, es decir todo conjunto infinito de números (o de puntos), o bien es equivalente al conjunto de todos los números enteros naturales 1, 2, 3,..., o bien es equivalente al conjunto de todos los números reales, y por consiguiente al continuo, es decir a los puntos de un segmento; *desde el punto de vista de la equivalencia, no habría pues más que dos conjuntos de números: el conjunto enumerable y el continuo.*

El *teorema* descrito por Hilbert es la *Hipótesis del Continuo*, formulada por Cantor en 1878 y que puede enunciarse, de manera equivalente, como:

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1$$

Eso es, la cardinalidad del conjunto de los números reales es el primer cardinal no numerable y, por tanto, no hay conjuntos no numerables de números reales de cardinalidad menor que la de $\mathbb{R}$.

Esta reformulación de la hipótesis del continuo hace un uso implícito del axioma de elección, pues afirma que el conjunto de los números reales es biyectable con $\aleph_1$ y, por tanto, que existe un buen orden de los números reales. Recordemos que el axioma de elección afirma que todo conjunto posee un buen orden de sus elementos, esto es, sus elementos pueden ordenarse totalmente de tal manera que todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo. La primera formulación de la hipótesis del continuo, a diferencia de la segunda, no afirma implícitamente que existe un buen orden del continuo. Hilbert enuncia el problema de la buena ordenación del continuo separadamente como parte del primer problema de su lista [1]:

> ¿...puede concebirse el continuo como un conjunto bien ordenado? A esta cuestión Cantor cree que puede responderse afirmativamente. Me parece extremadamente deseable *obtener una demostración directa de esta notable afirmación de Cantor*, por ejemplo, asignando efectivamente un orden a los números tal que en todo subconjunto se pueda designar un número que preceda a todos los demás.

Hilbert quiere encontrar, por tanto, una buena ordenación *efectiva* del conjunto de los números reales. Aunque no explica qué entiende por ordenar *efectivamente*, suponemos que lo que Hilbert quiere es que la demostración de que existe un buen orden de $\mathbb{R}$ no sea simplemente una pura demostración de existencia, sino que el buen orden se dé de manera explícita mediante una definición.

GÖDEL

El primer paso realmente importante hacia la solución de estos problemas lo dió Kurt Gödel en 1938 [2] al demostrar la consistencia de la hipótesis del continuo y del axioma de elección. Esto es, Gödel demostró que si los axiomas usuales de la teoría de conjuntos son consistentes, es decir, no contradictorios, entonces también es consistente aceptar junto a estos axiomas la hipótesis del continuo y el axioma de elección.

Las contradiciones aparecidas a principios de siglo debido a un uso puramente intuitivo de la noción de conjunto, llevaron a la formulación por parte de Zermelo [3] de una lista de axiomas que tratan de capturar de manera precisa las propiedades básicas de los conjuntos. Estos axiomas, junto con ulteriores precisiones y adiciones por parte de Skolem y Fraenkel, son conocidos como la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección, abreviadamente ZFC. Estos axiomas no sólo permiten obtener toda la teoría de conjuntos desarrollada por Cantor, sino que constituyen también una fundamentación de las matemáticas, en el sentido de que contienen los principios fundamentales, los cuales, junto con los principios de la lógica, permiten demostrar todos los teoremas matemáticos conocidos. ZFC es la teoría estándar de la matemática actual, la teoría que incorpora todos los axiomas normalmente usados, de manera más o menos consciente, en todas las áreas de la matemática.

Como toda teoría que incluya la aritmética elemental, ZFC está sujeta a las restricciones impuestas por los teoremas de incompletitud de Gödel, una de cuyas consecuencias es que si ZFC es consistente, entonces hay enunciados matemáticos que no son demostrables ni refutables en ZFC. En particular no se puede demostrar que ZFC sea consistente. Dado que ZFC puede formularse en el lenguaje de la lógica de primer orden, ser consistente es lo mismo que tener un *modelo*. En general, un modelo de (una parte de) ZFC no es más que un conjunto M con una relación binaria E tal que (una parte de) los axiomas de ZFC, una vez formulados en el lenguaje formal de la teoría de conjuntos, esto es, la lógica de primer orden con un símbolo relacional binario $\in$, son verdaderos en M interpretando el símbolo $\in$ como la relación E. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ con la relación E definida por: mEn si y sólo si el dígito m de la expansión binaria de n es 1, es un modelo de ZFC excepto el axioma de infinitud, que afirma la existencia de un conjunto infinito. Así pues, aunque es relativamente fácil encontrar modelos de una buena parte de ZFC, no se puede demostrar en ZFC, suponiendo que ZFC sea consistente, que exista un modelo de todos los axiomas de ZFC. Las mismas consideraciones se aplican a ZF, es decir, a los axiomas de ZFC menos el axioma de elección.

Supongamos por un momento que ZF es consistente y que por tanto posee un modelo, llamémoslo M. Consideremos ahora un enunciado matemático φ cualquiera, por ejemplo, la hipótesis del continuo o el axioma de elección. Si φ es verdadero en M, no podemos demostrar en ZF que φ es falso, ya que si así fuera sería falso en todos los modelos de ZF, y por tanto en M, lo cual es absurdo.

Suponiendo que ZF es consistente, Gödel construyó un modelo de ZF donde también son verdaderos el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Es decir, demostró que si ZF es consistente, entonces también lo es ZFC junto con la hipótesis del continuo. En el modelo construido por Gödel, conocido como L o universo construible, no sólo vale el axioma de elección, sino que existe un buen orden definible de todo el modelo, y en particular existe un buen orden definible de los números reales. Además, L es un modelo estándar, lo que significa que la relación E es simplemente la relación usual de pertenencia.

La construcción de L se realiza por inducción transfinita en los ordinales. Esto es, para cada ordinal α, y suponiendo que ya esté definido L_β para todo β menor que α, se define L_α. El modelo L es entonces la unión de todos los L_α. La idea de Gödel es que pertenezcan a L_α sólo aquellos conjuntos estrictamente necesarios, es decir, aquellos que sean definibles a partir de conjuntos que ya han sido construídos en un estadio anterior. Más precisamente:

- L_0 es el conjunto vacío.

- Si $\alpha = \beta + 1$, L_α es el conjunto de todos los subconjuntos definibles en L_β con parámetros. Esto es, todos los subconjuntos X de L_β tales que $X = \{x : \varphi(x, a_1, ..., a_n)$ es verdadera en $L_\beta\}$, donde $\varphi(x, a_1, .., a_n)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con parámetros $a_1, .., a_n \in L_\beta$.

- Si α es un ordinal límite, L_α es la unión de todos los L_β, con β menor que α.

- L es la unión de todos los L_α, con α un ordinal.

Gödel demostró que L es un modelo de ZF y que además en L valen tanto la hipótesis del continuo como el axioma de elección. Esto es, los axiomas de ZF formalizados en el lenguaje de la teoría de conjuntos, así como las sentencias de este mismo lenguaje que dicen: *todo conjunto infinito de números reales es, o bien biyectable con el conjunto de los números naturales, o bien biyectable con el conjunto de todos los números reales* y *todo conjunto posee un buen orden* son verdaderas en L.

El resultado de Gödel no da una solución definitiva al problema de la hipótesis del continuo y de la existencia de un buen orden de los números reales. Simplemente nos dice que no podemos demostrar en ZFC, y por tanto con los medios usualmente disponibles en matemáticas, que no exista un buen orden de los números reales o que la hipótesis del continuo sea falsa.

Pero ¿qué pasaría si se pudiera construir otro modelo de ZFC donde, a diferencia de L, la hipótesis del continuo fuera falsa, o un modelo de ZF donde no existiera un buen orden de $\mathbb{R}$? Entonces la hipótesis del continuo seria *independiente* de ZFC, es decir, ni la hipótesis del continuo ni su negación podrían ser demostradas a partir de los axiomas de ZFC, y ni el axioma de elección ni su negación podrían demostrarse a partir de ZF. Eso fue precisamente lo que hizo Cohen.

COHEN

El menor de cuatro hermanos de una familia de inmigrantes judíos, Paul Joseph Cohen nació el 2 de Abril de 1934 en Long Branch, New Jersey. Su infancia transcurrió en el barrio neoyorquino de Brooklyn, donde a la edad de 9 años empezó a leer ávidamente los libros de matemáticas que encontraba en la biblioteca pública del barrio y los que le proporcionaba Sylvia, su hermana mayor. Cuando ésta empezó a asistir a la universidad, pedía ayuda a su hermano Paul, de 10 años, para resolver los problemas de trigonometría. A los 12 años Cohen sabía ya bastante de álgebra y geometría y poseía conocimientos básicos de cálculo y de teoría de números.

En el equipo de matemáticas de la Stuyvesant High School, instituto de secundaria situado en Manhattan y famoso por su alto nivel en matemáticas y en ciencias en general, Cohen pudo desarrollar sus capacidades matemáticas y ampliar notablemente sus conocimientos, de modo que al finalizar brillantemente sus estudios a la temprana edad de 16 años, y después de ser uno de los 40 ganadores de la Westinghouse Science Talent Search con un trabajo sobre relatividad, le fueron ofrecidas varias becas para poder continuar sus estudios en la universidad. A pesar de haber recibido ofertas mejores, y por no obligar a su familia, económicamente humilde, a pagar los gastos de viajes, decidió permanecer en New York, en el Brooklyn College. Allí estuvo tres años, estudiando seriamente, pero aburriéndose cada vez más, hasta que a los 19 años decidió solicitar la admisión en el programa de doctorado de la Universidad de Chicago, donde se encontraban algunos de sus antiguos compañeros de instituto. Después de dos años en Chicago, su interés inicial por la teoría de números se había ido desplazando hacia el análisis, y dada la poca teoría de números que se hacía en Chicago por entonces, Cohen decidió ponerse a trabajar bajo la dirección de Antoni Zygmund en análisis clásico. En esta época tenía ya un cierto interés en la lógica, sobre todo por cuestiones relacionadas con la existencia de procedimientos de decisión para identidades algebraicas. Estimulado por Kleene, quien acababa de dar una conferencia en Chicago, Cohen leyó la prueba del teorema de incompletitud de Gödel, aunque su interés por la lógica era todavía menor. En esta época ya conocía el problema de la hipótesis del continuo, y se preguntaba *¿qué significaría resolverlo?* [4], pero todavía no estaba interesado en él.

P. J. Cohen en 1966

En Chicago trabajó en el problema de Littlewood, un problema de análisis armónico por cuya solución parcial recibiría más tarde el prestigioso premio Bôcher. Cohen se doctoró en 1958 con una tesis titulada *Topics in the Theory of Uniqueness of Trigonometric Series*, realizada bajo la dirección de A. Zygmund. Un año antes había sido contratado como profesor en la Universidad de Rochester y, tras recibir el doctorado, pasó el curso 1958-59 en el MIT. Allí discutió con Solomon Feferman sobre pruebas de consistencia, y fue Feferman precisamente quién le sugirió que pusiera a prueba sus intuiciones sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos investigando el problema de la hipótesis del continuo. El curso siguiente lo pasó en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton y en 1961 fue nombrado profesor de la Universidad de Stanford. Durante este período Cohen intentó demostrar la independencia del axioma de elección, problema que encontraba interesante dado el importante papel que juega este axioma en el trabajo de la mayoría de matemáticos. La independencia de la hipótesis del continuo le parecía todavía un problema *más bien filosófico* [4], aunque de hecho por esta época tenía ya ideas muy cercanas a su solución. Fue a finales de 1962 cuando, durante un viaje en automóvil con su futura esposa por el sudoeste de los Estados Unidos, y sentado al volante durante horas, se convenció a sí mismo de que el problema podía resolverse. Pero la solución habría que esperar todavía unos meses. En abril de 1963, descubrió una *nueva noción de verdad* [4]. Eran los orígenes del *forcing*. A finales de abril, Cohen estaba convencido de que había resuelto el problema. Dos meses más tarde Gödel le *daba su sello de aprobación* [4].

LA SOLUCIÓN

No es fácil explicar los detalles del trabajo de Cohen en pocas palabras y a no especialistas en lógica. Pero aunque los aspectos técnicos sean realmente complejos, la idea básica de Cohen es más bien simple. Nos mantendremos, por tanto, en un nivel intuitivo, dejando para el lector interesado los detalles técnicos, que pueden encontrarse en algunas de las referencias bibliográficas del final del artículo (véanse [5] y [6]).

Recordemos el problema de la hipótesis del continuo. Se trata de construir un modelo de ZFC donde la hipótesis del continuo sea falsa, pues ello implicaría, dado que Gödel había ya construido un modelo donde era verdadera, que la hipótesis del continuo es independiente, esto es, no puede demostrarse ni refutarse con los medios de que disponemos habitualmente en matemáticas.

Supongamos pues que ZFC es consistente y que, por tanto, tiene un modelo. Entonces L es un modelo de ZFC y no podemos demostrar en ZFC que exista algun número real que no sea construible, esto es, la fórmula *Existe un número real x tal que para todo ordinal α, x no pertenece a L_α* no es demostrable en ZFC . Si queremos un modelo donde no valga la hipótesis del continuo, en él debe haber muchos números reales no construibles. Pero, ¿de dónde los sacamos? Esta primera dificultad puede solucionarse apelando al teorema de Löwenheim-Skolem, el cual nos dice que si una teoría formulada en un lenguaje numerable de primer orden tiene un modelo, entonces tiene un modelo numerable. ZFC es una teoría de este tipo y tendremos, por tanto, un modelo numerable de ZFC. Llamémosle M. Dado que existe una cantidad no numerable de números reales, habrá muchos números reales que no estarán en M. Podemos entonces intentar añadir números reales a M de tal manera en que se obtenga otro modelo de ZFC donde no valga la hipótesis del continuo.

Escogiendo M con cuidado, podemos suponer que es de la forma L_α, donde α es un ordinal infinito y numerable. Es claro que todos los números naturales, así como todas las sucesiones finitas de números naturales pertenecen a M. Además, todos los números racionales están también en M. Por tanto, si queremos añadir un nuevo número real a M, éste debe ser forzosamente un irracional. Podemos suponer, entonces, que lo que queremos añadir a M es una sucesión infinita de números naturales, ya que, como es bien sabido, el espacio de Baire de todas las sucesiones infinitas de números naturales es homeomorfo al espacio de los irracionales.

¿Qué significa *añadir a M*? Supongamos que x es un conjunto cualquiera que no está en M. Entonces podemos construir el menor modelo $M[x]$ que contiene todos los elementos de M y además x esencialmente de la misma manera que construimos L, pero ahora la construcción es por inducción transfinita en los ordinales de M y x puede usarse como parámetro adicional en la construcción. Entonces, ¿por qué no podemos escoger sucesiones de números naturales que no estén en M y las vamos añadiendo de esta manera a M hasta que en el modelo resultante haya como mínimo $\aleph_2$, obteniendo así un modelo donde no valga la hipótesis del continuo? Un problema es que $M[x]$ no tiene por qué ser necesariamente un modelo de ZFC. Pero aunque lo fuera, podría ser otra vez de la forma L_β, para algún ordinal β, y no habríamos avanzado nada, ya que en todos estos modelos vale la hipótesis del continuo. El principal problema es, por tanto, añadir una sucesión x a M de tal manera que $M[x]$ continúe siendo un modelo de ZFC y que, en $M[x]$, x no sea construible. La dificultad del problema es ahora evidente si recordamos que no podemos demostrar que exista alguna sucesión no construible. Pero nada impide en principio obtener un modelo $M[x]$ de ZFC donde x no sea construible, es decir, la sentencia que dice *x no pertenece a L_α, para todo ordinal α* sea verdadera en $M[x]$, aunque falsa en L. Como veremos, esto es posible, pero para ello x debe escogerse con mucho cuidado. No basta simplemente con tomar cualquier x que no pertenezca a M.

La idea de Cohen consiste en ver las sucesiones finitas de números naturales como aproximaciones a la sucesión infinita que queremos añadir. Consideramos entonces el orden parcial $\mathbb{P}$ de todas las sucesiones finitas de números naturales ordenadas por extensión, es decir, si p y q son sucesiones finitas, $p \leq q$ si y sólo si q extiende a p. Observemos que $\mathbb{P}$ es un árbol, eso es, para cada q, el conjunto de todos los p menores que q está linealmente ordenado. Podemos ver entonces las sucesiones infinitas de números naturales como ramas infinitas de este árbol. Puesto que M es un modelo de ZFC, todas las ramas del árbol definibles en M con parámetros pertenecen ya a M. En efecto, si $\varphi(x, y)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos con parámetros en M, y para todo número natural n, la sentencia que dice:

Existe un único número natural m_n tal que $\varphi(n, m_n)$

es verdadera en M, entonces, por el axioma de substitución, la sucesión $(m_n)_n$ pertenece a M. Por tanto, si queremos añadir una rama nueva a M debemos evitar que posea alguna propiedad que la defina en M.

Debemos, pues, considerar primero todas aquellas propiedades que pudieran definir una sucesión infinita de números naturales en M, y seguidamente debemos escoger la sucesión de tal manera que las evite todas. Diremos que una propiedad de los elementos de $\mathbb{P}$ es *evitable* si, dada una p cualquiera, siempre podemos encontrar una q que la extiende tal que toda r que extiende a q no tiene la propiedad en cuestión. Por ejemplo, la propiedad *todos los términos de la sucesión son cero* es evitable, mientras que la propiedad *hay diez unos seguidos en la sucesión* no es evitable. Si dotamos a $\mathbb{P}$ de la topología del orden, esto es, la topología generada por los conos $\{q : p \leq q\}$, es fácil comprobar que si una propiedad es evitable, entonces el conjunto de todas las q tales que toda r que extiende a q no tiene la propiedad en cuestión es un conjunto abierto y denso.

Supongamos, por tanto, que c es una rama de $\mathbb{P}$ que interseca todos los subconjuntos densos y abiertos de $\mathbb{P}$ que pertenecen a M, esto es, en cada subconjunto denso y abierto de $\mathbb{P}$ que pertenece a M hay una p que es un segmento inicial de c. Cuando esto ocurre decimos que c es *genérica* o *Cohen* sobre M. Podemos ver que c no pertenece a M. En efecto, si c perteneciera a M, el conjunto $\{p : p \text{ no es un segmento inicial de } c\}$ sería a su vez denso y abierto, y además pertenecería a M. Por tanto c tendría que intersecarlo, y eso es imposible.

La cuestión es ahora saber si existe alguna rama genérica sobre M. Como M es numerable, sea $\langle D_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ una enumeración de todos los subconjuntos de $\mathbb{P}$ densos y abiertos que pertenecen a M. Sea p_0 un elemento cualquiera de D_0. Dado p_n en D_n, podemos escoger p_{n+1} en D_{n+1} tal que $p_n \leq p_{n+1}$. Sea c la unión de todos los p_n. Claramente, c es genérica sobre M.

Si c es genérica sobre M y construimos el modelo $M[c]$, entonces, como por arte de magia, no sólo $M[c]$ es un modelo de ZFC sino que tiene los mismos ordinales que M y por tanto no es de la forma L_β; además en $M[c]$ la fórmula que dice que *c no es construible* es verdadera. La demostración de que $M[c]$ tiene estas propiedades no es nada trivial y se basa en que c es genérica sobre M. Para demostrarlo Cohen introduce la relación *p fuerza φ*, entre elementos de $\mathbb{P}$ y fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos ampliado con *nombres* para los elementos de $M[c]$. Cohen demuestra entonces el *Teorema de Forcing*, según el cual un enunciado φ es verdadero en $M[c]$ si y sólo si existe un segmento inicial p de c que fuerza φ. De este modo es posible determinar qué enunciados van a ser verdaderos en $M[c]$ *antes de construirlo*, pues sólo hay que comprobar que p fuerza φ en M para concluir que φ va a ser verdadera en $M[c]$, siempre y cuando p sea un segmento inicial de c y c sea genérica sobre M.

Pero si queremos un modelo en el que no valga la hipótesis del continuo tenemos que añadir a M al menos $\aleph_2$ ramas genéricas sobre M, todas distintas. Esto puede hacerse tomando en M el orden parcial consistente en la suma directa de $\aleph_2$ copias de $\mathbb{P}$. Razonando como antes, podemos encontrar una sucesión $\langle c_\beta : \beta < \aleph_2\rangle$ de ramas genéricas, una para cada copia de $\mathbb{P}$ y todas diferentes. En el modelo resultante $M[\langle c_\beta : \beta < \aleph_2\rangle]$ la cardinalidad de $\mathbb{R}$ es $\aleph_2$ y por tanto la hipótesis del continuo es falsa.

Hay un detalle importante que debemos mencionar. Como M es numerable, hay un ordinal numerable γ que en M hace las funciones de $\aleph_2$, esto es, la fórmula que dice *γ es el segundo cardinal no numerable* es verdadera en M. Así pues, γ es el $\aleph_2$ de M y, siendo numerable, es mucho más pequeño que el cardinal $\aleph_2$ *de verdad*. Debemos por tanto asegurarnos que al añadir la sucesión $\langle c_\beta : \beta < \gamma\rangle$ a M, el nuevo $\aleph_2$, esto es, el ordinal que en $M[\langle c_\beta : \beta < \gamma\rangle]$ hace las funciones de $\aleph_2$, continúa siendo el mismo γ. De no ser así, en $M[\langle c_\beta : \beta < \gamma\rangle]$ continuaría valiendo la hipótesis del continuo y no habríamos avanzado nada. Afortunadamente, gracias a las propiedades topológicas de $\mathbb{P}$ esto no ocurre, aunque la comprobación de este hecho requiere de nuevo el uso del *forcing*.

El mismo argumento permite construir modelos donde la cardinalidad del continuo es $\aleph_3$, o $\aleph_{27}$, o cualquier cardinal de cofinalidad no numerable. La cardinalidad del continuo queda por tanto completamente indeterminada por ZFC.

Consideremos ahora el problema de la existencia de un buen orden del continuo. Añadamos a M una sucesión infinita de ramas de $\mathbb{P}$, todas genéricas sobre M, y consideremos el modelo resultante $M[\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]$. Sea N el menor submodelo de $M[\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle]$ que contiene a M y al conjunto de las ramas genéricas sin ordenar $A = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$. Puede demostrarse que N es un modelo de ZF, pero en N no hay ningún buen orden de los números reales. De hecho no hay ningún buen orden de A. La razón es que cualquier buen orden de A sería definible con un número finito de parámetros ordinales y números reales, y entonces cada uno de las c_n sería a su vez definible. Pero dado que las c_n son genéricas sobre M, si escogemos una c_n que no aparezca como parámetro en la definición del buen orden de A, cualquier definición satisfecha por c_n es satisfecha también por otros elementos de A.

EL FORCING

Aunque Cohen recibió la medalla Fields por su demostración de la independencia de la hipótesis del continuo y del axioma de elección, su contribución va mucho más allá de estos problemas. Su nuevo método, el *forcing*, no sólo ha permitido resolver un sinfín de problemas importantes en prácticamente todas las áreas de la matemática, sino que ha cambiado para siempre nuestra concepción de la matemática como ciencia.

El *forcing* es un método de construcción de modelos de (una parte de) ZFC. Pero este método es mucho más general de lo que los ejemplos anteriores podrían hacernos pensar. En efecto, mediante forcing es posible añadir a un modelo no sólo una, o muchas, sucesiones infinitas de números naturales, sino cualquier otro tipo de objeto. Para ello hay que diseñar un orden parcial $\mathbb{P}$ apropiado, de manera que si G es un subconjunto genérico de $\mathbb{P}$, esto es, un filtro que interseca a todos los subconjuntos densos y abiertos de $\mathbb{P}$ y que pertenecen al modelo M del cual partimos, el modelo $M[G]$ que resulta de añadir G a M contiene el objeto que queríamos. Las propiedades del modelo $M[G]$ vienen *forzadas* por los elementos de $\mathbb{P}$. La noción crucial es la relación p *fuerza* $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$, donde p es un elemento de $\mathbb{P}$ y $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos ampliado con *nombres* $\tau_1, ..., \tau_n$ para elementos de $M[G]$. Un *nombre* no es más que un elemento de M, que una vez *interpretado* o *decodificado* por G, da lugar a un elemento de $M[G]$. Para cada fórmula φ, la relación $\{\langle p, \tau_1, ..., \tau_n\rangle : p \in \mathbb{P},\ \tau_1, ..., \tau_n$ son nombres y p fuerza $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)\}$ es definible en M, y el teorema de *forcing* dice que un enunciado vale en $M[G]$ si y sólo si existe un elemento p de $\mathbb{P}$ que pertenece a G y que *fuerza* el enunciado. La relación de forcing permite de esta manera demostrar que $M[G]$ satisface ciertas propiedades, simplemente comprobando en M que algún p de G las fuerza.

Inmediatamente después del resultado de Cohen un gran número de lógicos empezaron a aplicar la técnica del forcing a muchos otros problemas matemáticos. R. Solovay [7] resolvió el problema de la medida de Lebesgue, que Cohen mismo había intentado resolver; D. Martin y R. Solovay [8] demostraron la consistencia de la Hipótesis de Souslin, A.R.D. Mathias [9] demostró la consistencia del teorema infinitario de Ramsey, S. Shelah (cf. [10]) resolvió el problema de Whitehead en teoría de grupos, R. Laver [11] demostró la consistencia de la conjetura de Borel, etc., por citar sólo algunos ejemplos de las décadas de los 60 y 70.

El *forcing* continúa siendo un área de investigación de gran interés, de extremada sofisticación técnica y de singular belleza, y que sigue produciendo importantes resultados, con aplicaciones en prácticamente todos los ámbitos de la matemática (véanse por ejemplo [10] y [12]).

La relevancia de un resultado matemático debe juzgarse no sólo por la dificultad del problema resuelto, sino también, y muy especialmente, por las nuevas ideas que aporta y por la fecundidad de estas nuevas ideas en la solución de otros problemas aparentemente no relacionados. Es desde esta perspectiva que debe valorarse el trabajo de Cohen, que es sin duda uno de los más importantes de la matemática de este siglo y, de hecho, de todos los tiempos.

EPÍLOGO

Después de la medalla Fields, Cohen recibió en 1967 la National Medal of Science, y fue más tarde elegido miembro de la American Academy of Arts and Sciences y de la National Academy of Sciences. Su trabajo apareció publicado en dos cortos artículos en los Proceedings of the National Academy of Science (1963 y 1964) [13], y más tarde (1966) y de forma expandida en el libro *Set Theory and the Continuum Hypothesis* [5]. Desde entonces Cohen dejó prácticamente de trabajar en teoría de conjuntos, si exceptuamos algunos intentos infructuosos de resolver el problema de la medida de Lebesgue, que sería resuelto por Solovay mediante forcing en 1964 [7]. Cohen se define a sí mismo como un *problem solver* [4], cuyo interés por un problema se desvanece una vez conocida la solución. Su interés se ha centrado siempre en los grandes problemas, como la hipótesis del continuo, que logró resolver, o la hipótesis de Riemann, en la que trabajó intensamente durante mucho tiempo, aunque sin éxito. Desde 1964 es profesor de matemáticas de la universidad de Stanford.

El método de *forcing* permite construir con asombrosa facilidad modelos de ZFC con propiedades muy diversas. Esta posibilidad, impensable antes de Cohen, ha cambiado radicalmente la concepción de la teoría de conjuntos por parte de muchos matemáticos. Se habla de teoría de conjuntos no Cantoriana de manera análoga a la geometría no Euclidiana. Cohen mismo adoptó esta postura formalista, esto es: hay muchas teorías de conjuntos posibles y todas merecen consideración, hay teorías donde vale la hipótesis del continuo y otras donde no, y esto es todo lo que podemos decir sobre el problema. Pero hay otra posición, defendida por Gödel, que afirma que la solución definitiva del problema número uno de Hilbert está todavía por llegar. Los resultados de independencia de Cohen sólo nos dicen que ZFC es insuficiente para responder a muchas preguntas, entre ellas la hipótesis del continuo, y por tanto lo que hace falta es descubrir nuevos axiomas que permitan responderlas. Una gran parte del desarrollo de la teoría de conjuntos en las últimas décadas ha consistido, precisamente, en el descubrimiento y clasificación de nuevos axiomas. Así, por ejemplo, los axiomas de grandes cardinales implican la inexistencia de un buen orden definible de $\mathbb{R}$. Por otra parte, resultados recientes apuntan a que ciertos axiomas naturales implican que la cardinalidad del continuo, tal y como había conjeturado Gödel, es exactamente $\aleph_2$.

Bibliografía

[1] HILBERT, D.: *Mathematische probleme. Vortrag, gehalten auf them internationalen Matematiker-Kongress zu Paris 1900,* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 253-297. Traducción francesa, con correcciones y adiciones, en Compte rendu du Deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900 (Gautier-Villars, Paris, 1902), 58-114.

[2] GÖDEL, K.:*The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 24 (1938), 556-557.

[3] ZERMELO, E.:*Untersuchungen ber die Grundlagen der Mengenlehre,* Math. Ann., 65 (1908), 261-281.

[4] ALBERS, D. J., ALEXANDERSON, G. L., and REID, C.: More mathematical people, Harcourt Brace Jovanovich, Boston, 1990, pp. 42-58.

[5] COHEN, P. J.: *Set Theory and the Continuum Hypothesis,* W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966.

[6] KUNEN, K. J.: *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs,* North-Holland, Amsterdam. 1980.

[7] SOLOVAY, R.: *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,* Annals of Mathematics, 92 (1970) 1-56.

[8] MARTIN, D. and SOLOVAY, R.: *Internal Cohen Extensions,* Annals of Mathematical Logic, 2 (1970), 143-178.

[9] MATHIAS, A. R. D.: *Happy families,* Annals of Mathematical Logic, 12 (1977) 59-111.

[10] SHELAH, S.: *Proper and improper forcing,* 2nd Edition. Springer-Verlag, 1998. .

[11] LAVER, R.: *On the consistency of Borel's conjecture,* Acta Mathematica, 137 (1976) 151-169.

[12] TODORCEVIC, S. and FARAH, I.: *Some applications of the method of forcing,* Yenisei Series in Pure and Applied Mathematics. Yenisei, Moscow; Lycée Troitsk, 1995.

[13] COHEN, P. J.:*The independence of the Continuum Hypothesis,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 50 (1963), 1143-1148; 51 (1964), 105-110.

[14] MOORE, G. H.: *The origins of forcing,* Logic Colloquium '86, F. R. Drake y J. K. Truss (Editores), Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1988. 143-173.

Joan Bagaria
Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència
Universitat de Barcelona
C/ Baldiri i Reixach, s/n, 08028 Barcelona.
e-mail: bagaria@trivium.gh.ub.es