Mi Primer Problema de Plateau

por

Antonio Ros

El segmento que une dos puntos del espacio tiene menor longitud que cualquier otra curva que conecte esos dos puntos. Aunque existen en el mercado diversas *demostraciones* de esta propiedad, ésta no es mas que una consecuencia (y al mismo tiempo el origen) de la definición de longitud (como el supremo de las longitudes de las poligonales inscritas en la curva).

El hecho, análogo al anterior, de que *una región plana* $\Omega \subset \{z = 0\}$ *tenga menor área que cualquier otra superficie* S *en el espacio con su mismo borde* $\partial S = \partial\Omega$ es elemental (?) pero necesita una demostración, véase la figura 1: sea S' la proyección ortogonal de S sobre el plano $z = 0$ (aquí S' representa no sólo al subconjunto imagen de S sino a toda la aplicación proyección $S \to \{z = 0\}$). Entonces $\partial S' =$ proyección de $\partial S = \partial S$ y Area $(S') \leq$ Area (S) (ya que la proyección contrae las distancias). De las propiedades topológicas del concepto de borde y del hecho que $\partial S' = \partial\Omega$ se deduce que la superficie proyectada S' recubre todos los puntos de Ω, de donde se obtiene que Area $(\Omega) \leq$ Area (S').

Así que el área de S no es inferior a la de Ω.

Trabajando con más cuidado se podría demostrar que la igualdad sólo se da si $S = \Omega$.

El propósito de esta nota es el de introducir, estudiando una situación sencilla pero interesante, el problema de las superficies de área mínima. La propiedad minimizante del área de las regiones planas contiene ya una lección importante: algún lector (impaciente) se estará preguntando si no podríamos eliminar del argumento el uso de las *propiedades topológicas del concepto de borde*. El punto de vista correcto es exactamente el contrario. Deseamos minimizar el área en el espacio de las superficies que verifican una ligadura puramente topológica: tienen borde prefijado (en otros espacios con topología más complicada podemos considerar, por ejemplo, superficies que están en una misma clase de homología).

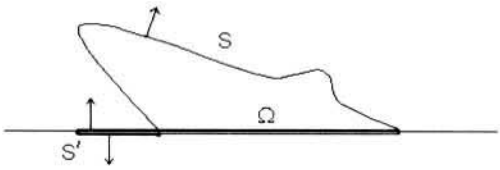

FIGURA 1. Proyección

El problema general sobre el que queremos reflexionar es el siguiente

> **Problema de Plateau.** *De entre todas las superficies que bordean una curva de Jordan dada en el espacio, encontrar una de área mínima.*

No sabría decir cuál ha sido el papel que el físico Joseph Antoine Ferdinand Plateau ha jugado en la física contemporánea: nació en Bélgica en 1801, murió en 1883 y se interesó entre otras cosas por los fenómenos de capilaridad (escribo este artículo en agosto, durante los días próximos al eclipse, y me sorprendo al releer que Plateau quedó ciego a los cuarenta y dos años por mirar fijamente al sol, sin protección). Sin embargo en matemáticas su tratado *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moleculares* ha dejado una huella importante.

Casi todos nosotros aprendimos de estudiantes que en la fórmula $e^{\pi i} + 1 = 0$ aparecen mágicamente concentrados los números y las operaciones básicas de las matemáticas. De la misma forma, el Problema de Plateau reúne en una sola cuestión varias de las ideas fundamentales de la geometría: curva, superficie, borde y área. Todo en su enunciado es a un tiempo intuitivamente claro y conceptualmente profundo. Detrás de cada palabra hay una teoría matemática completa.

Figura 2. J. A. F. Plateau

Tomemos una superficie de área mínima, la cual supondremos completamente lisa y regular (teoremas fundamentales en esta teoría aseguran que éste es siempre el caso). En particular nuestra superficie es un punto crítico del funcional área y de ésto se deduce, después de algunos cálculos, que su curvatura media se anula (es lo que se conoce como una *superficie minimal*).

Sin embargo, es fácil comprobar que no toda superficie minimal minimiza el área: en efecto, sea H el Helicoide generado por el movimiento lineal y rotacionalmente uniforme del eje x a lo largo del eje z, ver figura 3. Ésta es una superficie minimal (de curvatura media nula) conocida por todos que, vista desde muy lejos, aparenta ser una familia de planos horizontales igualmente espaciados. Por tanto la parte $H(r)$ de H encerrada por una (gran) esfera $S(r)$ de radio r tiene un área del orden de r^3. Sin embargo el área de la región de $S(r)$ que tiene el mismo borde que $H(r)$ crece como r^2. Así que $H(r)$ no minimiza el área cuando r es grande.

Figura 3. El Helicoide: superficie minimal (es decir, de curvatura media nula) de ecuación $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$.

Puede parecer una tarea ardua el intentar demostrar que ciertas regiones del Helicoide (o de la Catenoide, otra superficie minimal famosa obtenida al revolucionar una catenaria) tienen menor área que cualquier otra superficie con el mismo borde. Afortunadamente existe una situación interesante en la ésto se puede comprobar de manera sencilla: cuando la superficie minimal dada se expresa como el grafo de una función definida sobre un dominio convexo como en la figura 4 (puede ser instructivo para el lector el buscar regiones grandes en el Helicoide y la Catenoide que cumplan la propiedad anterior).

Para establecer y demostrar este criterio consideramos una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ sobre un dominio plano, acotado, convexo y regular $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, que verifique la ecuación de superficie minimal

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0. \quad (1)$$

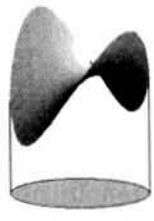

FIGURA 4. Superficie de área mínima.

Esta ecuación expresa en lenguaje analítico que la superficie

$$S = \{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$$

tiene curvatura media nula. El problema de Dirichlet asociado (es decir, la construcción de una solución de (1) que tome valores regulares prefijados a lo largo de $\partial\Omega$) es uno de los modelos básicos de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales y bajo nuestras hipótesis siempre tiene solución. Vamos a mostrar que u proporciona una superficie que tiene menor área que cualquier otra con su mismo borde y, por tanto, es una solución del Problema de Plateau para ese contorno.

Es habitual escribir la ecuación (1) en forma de divergencia como

$$\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = 0, \tag{2}$$

donde $\nabla u = (u_x, u_y)$ y $\operatorname{div} Z = Z_x^1 + Z_y^2$ para todo campo de vectores $Z = (Z^1, Z^2)$ en el plano.

Consideramos sobre el cilindro convexo $\Omega \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$ el campo de vectores X definido por

$$X(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}(u_x, u_y, -1).$$

Este campo no depende de la coordenada z y para un par $(x, y) \in \Omega$ el vector $X(x, y, z)$ es exactamente el vector normal unitario a la superficie S definida por el grafo de la función u. Además, de la ecuación (2) se sigue que X tiene divergencia nula (como campo en $\mathbf{R}^3$).

Teorema *La superficie S tiene menor área que cualquier otra superficie (orientable) con su mismo borde.*

Prueba. La aplicación $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ que proyecta ortogonalmente el exterior del cilindro convexo $\Omega \times \mathbf{R}$ sobre su frontera $\partial\Omega \times \mathbf{R}$ y fija todos los puntos de $\Omega \times \mathbf{R}$ es Lipschitziana de razón 1. Por tanto, puesto que $\partial S \subset \partial\Omega \times \mathbf{R}$, si tomamos una superfice S' en $\mathbf{R}^3$ con $\partial S' = \partial S$, se tiene que la nueva superficie $S'' = f(S')$ verifica $S'' \subset \Omega \times \mathbf{R}$, $\partial S'' = \partial S$ y

$$\text{Area}(S'') \leq \text{Area}(S'). \tag{3}$$

Como $S'' - S$ es un 2-ciclo en el convexo $\Omega \times \mathbf{R}$, se deduce que $S'' - S$ es un borde (esta propiedad expresa que la homología de un convexo es trivial). Puesto que X es un campo con divergencia nula, el teorema de Stokes nos dice que

$$\int_{S''} \langle N'', X \rangle = \int_S \langle N, X \rangle, \tag{4}$$

donde N y N'' son los campos de vectores unitarios normales a S y S'' respectivamente. Por último, usando que X es unitario y coincide con N a lo largo de S, obtenemos

$$\int_{S''} \langle N'', X \rangle \leq \text{Area}(S'') \qquad \text{y} \qquad \int_S \langle N, X \rangle = \text{Area}(S). \tag{5}$$

Combinando (3), (4) y (5) concluimos que $\text{Area}(S) \leq \text{Area}(S')$.

Se podría razonar sin mucho trabajo que $\text{Area}(S) = \text{Area}(S') \Rightarrow S = S'$.

La utilización del teorema de Stokes en nuestro argumento nos impone la restricción de trabajar con superficies orientables, aunque la propiedad enunciada es cierta tambien sin esa limitación.

Un comentario final para que no crear falsas expectativas. El hecho de que una superficie minimal dada sea de área mínima solo es comprobable en casos muy particulares. El único método razonablemente flexible que se conoce es el de construir una *calibración* (es decir, un campo unitario X con divergencia nula, como el utilizado en la demostración anterior) adaptada al problema y ésto solo se consigue en casos restringidos como el considerado aquí.

Bibliografía

[1] STEFAN HILDEBRANDT, ANTHONY TROMBA:, "Matemática y formas óptimas", *Biblioteca Scientific American*, 1990.

[2] FRANK MORGAN, "Geometric measure theory, a beginner's guide", *2nd ed.*, *Academic Press*, 1995.

Antonio Ros,
Departamento de Geometría,
Universidad de Granada. 18071 Granada,
email:aros@goliat.ugr.es