Rigidez de curvatura e incompletitud geodésica temporal en la geometría del espacio-tiempo

por

Paul Ehrlich

ANTECEDENTES RIEMANNIANOS

Siguiendo un trabajo pionero de H. Rauch [30], M. Berger y W. Klingenberg obtuvieron independientemente, al final de los años cincuenta y principios de los sesenta, una serie de resultados que culminaron en el siguiente importante teorema de *pinzamiento:*

Teorema topológico de la esfera. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana, n-dimensional, simplemente conexa, completa y con curvatura seccional que satisface la desigualdad*

$$\frac{1}{4} < K(\sigma) \leq 1 \tag{1}$$

para todos los 2-planos σ. Entonces M es homeomorfa a la n-esfera S^n.

Por lo tanto, una información local sobre la geometría de una métrica Riemanniana completa (la desigualdad de curvatura (1)) en combinación con el requisito topológico global de que la variedad sea simplemente conexa, nos lleva a la conclusión topológica de que la variedad dada es homeomorfa a la n-esfera. Si se elimina la condición de conexión simple, los espacios proyectivos reales nos proporcionan ejemplos de variedades, que sin ser simplemente conexas, admiten métricas Riemannianas completas de curvatura constante 1, y que por consiguiente satisfacen la condición de pinzamiento (1), sin ser homeomorfas a esferas.

Resulta interesante observar que si la desigualdad de curvatura (1) se debilita permitiendo $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$, entonces nos encontramos a los espacios proyectivos complejos, $\mathbb{C}P(n)$, que con la métrica clásica de Fubini-Study son variedades Riemannianas completas, simplemente conexas, de dimensión $2n$, y con la propiedad añadida de que la curvatura seccional varía en cada punto entre $\frac{1}{4}$ y 1. Desde el punto de vista de la geometría diferencial, estos espacios dotados de esa métrica clásica, son ejemplos de *espacios simétricos*. Tienen la propiedad de que $\nabla R = 0$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita y R es el tensor de curvatura, una rigidez que no poseen las métricas Riemannianas generales en la n-esfera con curvatura seccional variable próxima a uno.

Esta última clase de ejemplos de variedades Riemannianas encajan en un resultado más general e interesante obtenido por Berger [6] en el que la desigualdad de curvatura (1) se substituye por la desigualdad de curvatura (2):

Teorema de rigidez de curvatura de Berger. *Sea (M,g) una variedad Riemanniana, n-dimensional, simplemente conexa, completa y que satisface la desigualdad de curvatura*

$$\frac{1}{4} \le K \le 1 \tag{2}$$

Entonces, o bien

$$M \text{ es homeomorfa a } S^n \tag{3}$$

o bien

$$M \text{ es isométrica a un espacio simétrico de rango 1.} \tag{4}$$

La razón de llamar a este resultado "teorema de rigidez de curvatura" es la siguiente. Hemos comenzado con un resultado en el que la conclusión topológica (3) se obtenía a partir de la desigualdad de curvatura estricta (1). Luego, hemos supuesto una desigualdad más débil en lugar de la desigualdad estricta en la condición de curvatura (2) y hemos obtenido que o bien se sigue verificando la anterior conclusión topológica (3), o si ésta conclusión (3) falla, no sólo obtenemos la nueva alternativa de que M es HOMEOMORFA a un nuevo espacio, sino además la conclusión más RÍGIDA de que M es ISOMÉTRICA a una nueva posibilidad. Estas dos alternativas diferentes, presentes en este resultado de 1960 de Marcel Berger, nos dan la idea fundamental del fenómeno de la rigidez de curvatura en la geometría diferencial global de variedades Riemannianas completas.

Ha sido ésta un área de la geometría Riemanniana en la que ha habido una ingente actividad investigadora. Unas versiones más recientes de los Teoremas de la Esfera se pueden encontrar en el artículo [1].

La noción de rigidez de curvatura que estamos discutiendo atrajo la atención de la comunidad de geómetras Riemannianos tras la aparición del influyente libro de J. Cheeger y D. Ebin, [7], publicado en 1975. Desde entonces esta noción desempeña un papel estelar y aparece en multitud de trabajos de investigación. Por eso no podemos resistirnos a la tentación de copiar directamente una parte del prefacio de este importante libro en el que el concepto de rigidez de curvatura es piedra angular.

> En este libro estudiamos variedades Riemannianas completas desarrollando técnicas para comparar la geometría de una variedad general M con la de un modelo de espacio M_H, simplemente conexo, de curvatura constante H. Una primera conclusión es que M mantiene las propiedades geométricas particulares del modelo de espacio si se verifica la hipótesis de que su curvatura seccional K_M, está acotada entre determinadas constantes. Una vez que esto se ha establecido, se puede llegar a la conclusión de que M conserva también las propiedades topológicas de M_H.

La distinción entre cotas de K_M estrictas y débiles es importante, ya que puede reflejar la diferencia entre la geometría de la esfera y la del espacio euclídeo. Sin embargo, a menudo se da el caso de que una conclusión que resulta falsa cuando se relaja la condición de desigualdad estricta a desigualdad débil, puede demostrarse que falla sólo en determinadas circunstancias muy especiales. Resultados de este tipo, conocidos como teoremas de rigidez, requieren generalmente un argumento global delicado.

Consideremos ahora un segundo ejemplo de rigidez de curvatura de mayor relevancia en Relatividad General, en la que las variedades consideradas en general no son compactas. En el camino hacia descubrimientos más profundos D. Gromoll y W. Meyer [24] obtuvieron el siguiente resultado:

Teorema de los finales de Gromoll-Meyer. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana, no compacta, completa y que satisface la condición de curvatura*

$$\mathrm{Ric}\,(v, v) > 0 \quad \textit{para todo } v \neq 0 \textit{ en } TM \tag{5}$$

Entonces M tiene exactamente un final topológico.

¿Cómo podríamos invocar aquí la rigidez de curvatura? Basta substituir la desigualdad estricta (5) por la desigualdad débil (6) en el siguiente resultado.

Teorema del final rígido. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana, no compacta, completa y que satisface la condición de curvatura*

$$\mathrm{Ric}\,(v, v) \geq 0 \quad \textit{para todo } v \textit{ en } TM \tag{6}$$

Entonces, o bien

$$M \textit{ tiene exactamente un final topológico} \tag{7}$$

o bien

$$(M, g) \textit{ es isométrica a una variedad producto } \left(\mathbb{R} \times H, dt^2 \oplus h\right) \tag{8}$$

De nuevo, si la conclusión topológica anterior no se verifica, entonces falla de manera rígida en el sentido de que (M, g) es isométrica a una variedad diferenciable[1] con una métrica Riemanniana producto.

Las ideas principales de esta demostración constituyen el tipo de argumentos matemáticos presentes en las secciones de este artículo que están dedicadas al espacio-tiempo y las presentamos a continuación como ilustración.

Sea $d : M \times M \to [0, \infty)$ la función distancia Riemanniana asociada a la métrica Riemanniana g.

[1] A lo largo de este artículo *diferenciable* significará diferenciable de clase C^∞.

Supongamos que (M, g) no es conexa en el infinito. Entonces existe un conjunto compacto K y dos sucesiones infinitas $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ contenidas en $M \setminus K$ tales que $d(p_n, q_n)$ tiende a $+\infty$ cuando $n \to \infty$, y tal que cualquier curva de p_n a q_n corta a K, para cada n. Por el teorema de Hopf-Rinow para variedades Riemannianas completas, para cada n existe una geodésica minimal (parametrizada por la longitud de arco) $c_n : [a_n, b_n] \longrightarrow (M, g)$ con $a_n < 0 < b_n$ y tal que $c_n(a_n) = p_n$, $c_n(b_n) = q_n$. (En el transfondo, y como consecuencia de la hipótesis de la distancia entre las dos sucesiones, tenemos que a_n tiende a $-\infty$ y que b_n tiende a $+\infty$, cuando $n \to \infty$.) Por la hipótesis del final topológico, reparametrizando las curvas si fuese necesario, podemos suponer que $c_n(0)$ está en K para cada n. Como K es compacto, una subsucesión $\{c_{n(j)}(0)\}$ debe converger a un punto m de K. Pero como el conjunto de vectores tangentes unitarios sobre cualquier subconjunto compacto de M es un compacto, podemos encontrar entonces un vector tangente unitario v en $T_m M$ que es el límite de otra subsucesión del conjunto de vectores unitarios $\left\{c'_{n(j)}(0)\right\}$. Sea $c : \mathbb{R} \longrightarrow (M, g)$ la geodésica $c(t) = \exp_m(tv)$ con $c(0) = m$ y $c'(0) = v$. Como v es el límite de una subsucesión de $\left\{c'_{n(j)}(0)\right\}$ y cada uno de los segmentos geodésicos c_n es minimal en $[a_n, b_n]$ (en el sentido de que la longitud del tramo de curva entre cualesquiera dos de sus puntos es justamente la distancia entre ellos) se puede establecer que la geodésica límite c es también (globalmente) minimal. Estas geodésicas se llaman "líneas" en geometría Riemanniana. En suma, si la variedad Riemanniana no compacta (M, g) contiene más de un final topológico, entonces M contiene una línea geodésica. Pero ahora el famoso teorema de escición Riemanniana de Cheeger y Gromoll [8], demuestra que se cumple la alternativa (8) de arriba:

Teorema de escisión de Cheeger-Gromoll. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana completa, no compacta, de dimensión $n \geq 2$ y que satisface la condición de curvatura*

$$\operatorname{Ric}(v, v) \geq 0 \qquad \text{para todo } v \text{ en } TM\,.$$

Supongamos además que (M, g) contiene una línea geodésica completa $c : \mathbb{R} \longrightarrow (M, g)$. Entonces (M, g) es isométrica a una variedad producto $\left(N_1 \times \mathbb{R}^k, h \oplus g_{can}\right)$ donde (N_1, h) no contiene ninguna línea y $\left(\mathbb{R}^k, g_{can}\right)$ está dotado de la métrica canónica llana g_{can}.

En la demostración se utiliza la función de Busemann asociada a la línea dada y sus conjuntos de nivel ("horosferas" H) para obtener una escisión preliminar como $\left(\mathbb{R} \times H, dt^2 \oplus h\right)$ donde a H se le ha dotado de la métrica inducida h que tiene como subvariedad de M. En el caso en que (H, h) contuviera aún líneas, repetimos la escisión de nuevo, de manera inductiva.

En el mismo libro de geometría de comparación que se ha mencionado antes, hay un interesante estudio sobre extensiones de este teorema de escisión y de las ideas de la rigidez de curvatura al contexto de los espacios límite de Gromov-Hausdorff, cf. [9].

EL MARCO DEL ESPACIO-TIEMPO Y LAS SINGULARIDADES GEODÉSICAS

En la teoría de Relatividad Especial, A. Einstein describió aspectos de la física basándose en el espacio de Minkowski, M, que como variedad diferenciable es $\mathbb{R}^4$ y está dotado del tensor métrico $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. En esta formulación se considera como postulado fundamental que la luz viaja a velocidad c y nada, en esta sencilla versión del espacio-tiempo, puede viajar a mayor velocidad. En la teoría de Einstein de la Relatividad General, formulada en 1912 (cf. [11], [12]), el espacio y el tiempo se unifican como una variedad 4-dimensional (M, g) equipada con un tensor métrico diferenciable no degenerado g de signatura $(-,+,+,+)$. De manera que podemos apelar al aparato usual de la geometría diferencial, para calcular, primero, la conexión de Levi-Civita ∇ asociada a (M,g) y, después, partiendo de g y ∇, el tensor de Ricci, Ric y la curvatura escalar R. Dado un campo tensorial 2-covariante simétrico T sobre M que sea "físicamente razonable", Einstein postuló una relación entre T, el tensor métrico g, su conexión y su curvatura asociadas. A saber, que tienen que satisfacer el sistema de ecuaciones en derivadas parciales

A. EINSTEIN

$$\boxed{\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = 8\pi T} \tag{9}$$

donde Λ es una constante a la que se conoce como la *constante cosmológica*. A T se le llama el *tensor energía-momento*.

Por este motivo, los geómetras diferenciales y los físicos matemáticos han investigado de manera exhaustiva los espacio-tiempos generales.

Definición. *Un espacio-tiempo (M,g) es una variedad diferenciable, paracompacta, n-dimensional, equipada con una tensor métrico g de signatura $(-,+,\dots,+)$ que también admite un campo vectorial diferenciable X que cumple que $g(X,X) < 0$ en todos los puntos de M (y por tanto no se anula en ningún punto).*

Este campo vectorial X permite asegurar que se puede hacer una elección consistente del tiempo futuro, tanto global como localmente. Con este convenio de signatura, un vector tangente v se dice que es *nulo* si $g(v,v)=0$ y $v \neq 0$, *temporal* si $g(v,v)<0$, y *espacial* si $g(v,v)>0$ o $v=0$ (es costumbre considerar al vector cero como espacial). Al pasar de la Relatividad Especial a la General, se postula que los rayos de luz viajan a lo largo de geodésicas nulas y el hecho de que ninguna cantidad física pueda viajar a velocidad mayor que la de la luz en la Relatividad Especial, se traduce en la afirmación de que si $c(t)$ es una curva diferenciable que representa un suceso físico, entonces $g(c'(t),c'(t)) \leq 0$ para todo t en el dominio de definición de c.

La esfera n-dimensional S^n constituye un modelo natural para la geometría diferencial de las variedades Riemannianas. Por la compacidad de esta variedad y como consecuencia del teorema de Hopf-Rinow, todas las métricas Riemannianas sobre esta variedad son de forma automática geodésicamente completas. Es decir, si tomamos un punto cualquiera p en la variedad y cualquier dirección tangente $v \in T_pM$, entonces la geodésica maximalmente extendida $c:(a,b) \longrightarrow (S^n,g)$ con $c(0)=p$ y $c'(0)=v$ debe verificar que $a=-\infty$ y $b=+\infty$. Consideremos ahora espacio-tiempos. En primer lugar, todo espacio-tiempo compacto adolece del defecto de la rotura de causalidad, al contener curvas temporales cerradas. Es, por lo tanto, habitual en física matemática que los espacio-tiempos se tomen no compactos. En segundo lugar, muchos de los modelos estándar para el universo, como, por ejemplo, los modelos cosmológios del Big-Bang, tienen la propiedad de ser temporalmente geodésicamente incompletos, es decir, existen geodésicas temporales maximalmente extendidas $c:(a,b) \longrightarrow (M,g)$ con a finito o b finito. Y no sólo eso, sino que además los famosos Teoremas de Singularidad de Geroch, Penrose, Hawking y otros implican que perturbar la métrica dada no eliminará está incompletitud geodésica. En resumen, la incompletitud geodésica es un fenómeno natural que debe esperarse cuando se estudia la geometría del espacio-tiempo.

Cómo definir adecuadamente un espacio-tiempo singular ha sido objeto de intenso debate entre los relativistas generales. Muchas son las definiciones no equivalentes que se han postulado, cada una de ellas con sus propias ventajas e inconvenientes. En este artículo emplearemos una definición relativamente simple aunque no muy general.

Definición. *Un espacio-tiempo (M,g) se dice que es geodésicamente singular si existe una geodésica inextendible nula o temporal $c:(a,b) \longrightarrow (M,g)$ tal que o bien $a>-\infty$ o bien $b<\infty$ o bien ambos.*

En un trabajo del principio de su carrera, Geroch [23] expresaba la idea de que los universos cerrados inextendibles que satisfacen las ecuaciones de Einstein han de ser, genéricamente, al considerarlos como espacio-tiempos, temporalmente geodésicamente incompletos. Galloway y Horta resumieron en [19], p. 288, el punto de vista que había sido conjeturado por Geroch y el problema correspondiente en la forma siguiente:

> Sólo en circunstancias muy especiales, los espacio-tiempos espacialmente cerrados no son singulares.

Puesto que, generalmente, no es sensato suponer completitud geodésica para los espacio-tiempos, se suelen postular para ellos condiciones de otro tipo, sugeridas a menudo por consideraciones físicas subyacentes, y que se conocen como "condiciones de causalidad". Una noción débil que se suele imponer con frecuencia es que el espacio-tiempo sea *cronológico*, es decir, que no contenga curvas temporales cerradas. (Esto deja fuera los espacio-tiempos compactos.) Una condición mucho más restrictiva, que desempeña el papel de substituto de la completitud Riemanniana, es la de *hiperbolicidad global*. Definimos aquí un espacio-tiempo (M, g) como globalmente hiperbólico si (M, g) contiene un subconjunto S tal que cada curva causal inextendible hacia el pasado y hacia el futuro corta a S exactamente una vez. A este conjunto S se le denomina *superficie de Cauchy* en la literatura física, aunque al conjunto S, que se obtiene a partir de construcciones teóricas usuales, no se le exija que sea diferenciable.

Para concluir esta sección, vamos a ver un sencillo ejemplo de un teorema de singularidad, (sin excedernos en detalles técnicos en lo que concierne al caso de la geodésica nula de la condición (11)).

Teorema Modelo de Singularidad. *Sea (M, g) un espacio-tiempo, de dimensión $n \geq 3$ que contiene una superficie de Cauchy compacta y satisface las dos condiciones de curvatura siguientes:*

$$\mathrm{Ric}\,(v, v) \geq 0 \text{ para todo vector temporal } v \tag{10}$$

y

cada geodésica no espacial inextendible $c : (a, b) \longrightarrow (M, g)$ satisface la llamada condición genérica: para algún t en (a, b) la curvatura seccional de algún 2-plano que contenga al vector tangente $c'(t)$ es distinta de cero. (11)

Entonces (M, g) contiene una geodésica incompleta nula o temporal, y por lo tanto es geodésicamente singular.

En el texto [4], pp. 33-39, el lector puede encontrar una discusión más precisa de la condición genérica para geodésicas nulas y temporales desde el punto de vista de la geometría diferencial. La siguiente discusión acerca del significado físico de esta condición se encuentra en el texto de Relatividad General de Hawking y Ellis [25], pp. 99-101.

> En una solución físicamente realista (aunque no necesariamente en una exacta con un alto grado de simetría) se debe esperar que cada geodésica temporal encuentre algo de materia o algo de radiación gravitatoria y por lo tanto contenga algún punto en el que $R_{abcd}v^b v^c$ sea no nula. Sería razonable suponer que en dicha solución, cada geodésica temporal contuviese pares de puntos conjugados, siempre que pueda ser extendida suficientemente lejos en ambas direcciones ...

> Como en el caso temporal, esta condición tendrá que ser satisfecha por una geodésica nula que pase a través de cierta materia, siempre que la materia no sea radiación pura ... y que se mueva en la dirección del vector tangente de la geodésica K.

La condición genérica se cumplirá en $c(t)$ si se satisface la condición mucho más restrictiva de que $\mathrm{Ric}\,(c'(t)\,, c'(t)) \neq 0$.

De igual manera a como las geodésicas minimales aparecen en la demostración del Teorema del final rígido, los segmentos geodésicos no espaciales maximales, y por lo tanto, la función distancia Lorentziana (o "tiempo propio"como se la llama en la Relatividad General) aparecen en la demostración del Teorema Modelo de Singularidad. Recordemos las diferencias entre la función distancia Riemanniana y la función distancia espacio-tiempo. En una variedad diferenciable H dotada de una métrica Riemanniana h arbitraria, la distancia $d\,(p,q)$ entre p,q en H se calcula como el ínfimo de las longitudes de todas las curvas diferenciables a trozos que unen p con q. Conviene señalar que, independientemente de que la métrica Riemanniana sea o no completa, este procedimiento nos da una verdadera función distancia que dota a H de una estructura de espacio métrico y que la función distancia Riemanniana toma, automáticamente, sólo valores finitos y es continua. Además, la topología métrica coincide con la topología de variedad dada. Y todo esto se verifica SIN la hipótesis de completitud Riemanniana. Pero si ahora además añadimos la condición adicional de completitud, se tendrá la existencia de segmentos geodésicos minimales, es decir, que dados dos puntos cualesquiera p,q en (H,h) existe un segmento geodésico $c:[0,1] \longrightarrow (H,h)$ con $c\,(0) = p, \quad c\,(1) = q$ y $L\,(c) = d\,(p,q)$. Otra consecuencia del teorema de Hopf-Rinow para variedades Riemannianas es la completitud de todas las métricas Riemannianas de una variedad diferenciable compacta cualquiera.

Consideremos ahora un espacio-tiempo (M,g). El *futuro cronológico* $I^+\,(p)$ se define como el conjunto de puntos $q \in M$ para los que existe una curva temporal diferenciable a trozos y dirigida hacia el futuro desde p hasta q. El *futuro causal* $J^+\,(p)$ se define como el conjunto de puntos $q \in M$ para los que existe una curva no espacial diferenciable a trozos y dirigida hacia el futuro desde p hasta q; es decir, una curva c que cumple que $g(c'(t), c'(t)) \leq 0$, en todos los t en los que c es diferenciable. El concepto de dirigido hacia el futuro se puede expresar como la condición de que $g\,(c'(t), X(c(t))) < 0$ donde X es el campo vectorial temporal en (M,g) (que no se anula en ningún punto) y cuya existencia se postula como parte de la estructura de espacio-tiempo. Ahora podemos definir la función distancia espacio-tiempo $d = d\,(g) : M \times M \longrightarrow [0,\infty]$ de la siguiente manera. Si q no está en $J^+\,(p)$, póngase $d\,(p,q) = 0$. Si q está en $J^+\,(p)$ calcúlese $d\,(p,q)$ como

$$d\,(p,q) = \sup \left\{ \quad L(c); \quad \begin{array}{l} c:[0,1] \longrightarrow (M,g) \\ \text{es no espacial, diferenciable a trozos,} \\ \text{dirigida hacia el futuro, y} \\ \text{tal que, } c(0) = 0 \text{y } c(1) = q \end{array} \right\} \tag{12}$$

Aquí, la longitud de arco $L(c)$ en el espacio-tiempo de un subsegmento $c : [a,b] \longrightarrow (M,g)$ en el que c es diferenciable se calcula como

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{-g(c'(t), c'(t))}\, dt \tag{13}$$

Si (M,g) contuviera una curva temporal dirigida hacia el futuro y cerrada $c : [0,1] \longrightarrow (M,g)$ con $c(0) = c(1) = p$ (lo que podría ocurrir si M fuera compacta), entonces el recorrer c un número arbitrario de veces fuerza a que $d(p,p) = +\infty$. Además, ciertos modelos de espacio-tiempo, que no contienen curvas temporales cerradas, contienen pares de puntos p, q con $d(p,q) = +\infty$, cf. [4], p. 139. En estas circunstancias, al aproximarse a un punto frontera ideal, un observador podría tardar un tiempo arbitrariamente largo en ir desde p hasta q. La función distancia espacio-tiempo es semicontinua inferiormente, pero, en general, no tiene por qué ser semicontinua superiormente. El lector puede encontrar un estudio exhaustivo de las propiedades de esta función distancia y sus relaciones con la estructura causal del espacio-tiempo en [4], que está inspirado en los resultados de [25].

A la vista de la definición (12) deberíamos llamar a un segmento geodésico no espacial y dirigido hacia el futuro $c : [0,1] \longrightarrow (M,g)$ *segmento maximal* si cumple que $L(c) = d(c(0), c(1))$. Tales segmentos no tienen por qué existir entre pares de puntos relacionados causalmente en espacio-tiempos generales (ni siquiera en espacio-tiempos compactos). Pero, afortunadamente, el que (M,g) sea globalmente hiperbólico nos garantiza tres propiedades maravillosas. A saber,

1. $d(p,q)$ es finita para todo $p, q \in M$
2. $d : M \times M \longrightarrow [0, \infty)$ es continua
3. Dados p, q en M con $q \in J^+(p)$, existe un segmento geodésico maximal no espacial dirigido hacia el futuro $c : [0,1] \longrightarrow (M,g)$ con $c(0) = p$, $c(1) = q$.

Luego, a pesar de la falta de un teorema de tipo Hopf-Rinow para las variedades pseudo-Riemannianas, la hiperbolicidad global puede servir en algunos casos como un substituto de la completitud Riemanniana en el caso Lorentziano. Por analogía con la terminología Riemanniana, a una geodésica no espacial inextendible hacia el pasado y hacia el futuro, $c : (a,b) \longrightarrow (M,g)$ con $d(c(s), c(t)) = L\left(c_{|_{[s,t]}}\right)$ para todo s, t con $a < s < t < b$ se le suele denominar *línea no espacial.* (Observemos que, en constraste con el caso Riemanniano, no se exige ahora que $a = -\infty$ y que $b = +\infty$.) El artículo expositivo [32] contiene una buena discusión de los avances más recientes sobre conexión geodésica y completitud geodésica de los espacio-tiempos, incluyendo el caso compacto que, recientemente, ha suscitado renovado interés, véase además [31].

Con este bagaje de preliminares a mano, volvemos a la demostración del Teorema Modelo de Singularidad. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que el espacio-tiempo es no espacialmente geodésicamente completo. Sea K una superficie de Cauchy compacta de (M,g) y sea $\sigma:(a,b)\longrightarrow(M,g)$ una curva temporal inextendible hacia el pasado y hacia el futuro con $\sigma(0)$ en K. (Recordemos que cada curva no espacial inextendible hacia el pasado y hacia el futuro corta a K exactamente una vez). Consideremos dos sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ con $a<s_n<0<t_n<b$ y con $s_n\to a,\ t_n\to b$. Llamando $p_n:=\sigma(s_n)$ y $q_n:=\sigma(t_n)$, obsérvese que $q_n\in J^+(p_n)$ para cada n. Por lo tanto, como (M,g) es globalmente hiperbólico, existen segmentos geodésicos maximales temporales y dirigidos hacia el futuro $c_n:[a_n,b_n]\longrightarrow(M,g)$ con $a_n<0<b_n$ y $c_n(0)$ en K. Si tomamos una subsucesión de $\{c_n(0)\}$ que converja a un punto $k\in K$, entonces la maquinaria de la curva límite de la Relatividad General (cf. [4], sección 3.3, [14], [25], [28]) proporciona una curva no espacial inextendible hacia el pasado y hacia el futuro $c:(e,f)\longrightarrow(M,g)$ con $e<0<f$ y con $c(0)=k$, que es una curva límite de los segmentos geodésicos maximales temporales $\{c_n\}$. A partir de esta úlima afirmación se obtiene que c es una geodésica maximal nula o temporal. Como estamos suponiendo completitud geodésica no espacial debe verificarse que $e=-\infty$ y que $f=+\infty$. Por consiguiente, hemos obtenido una geodésica no espacial $c:\mathbb{R}\longrightarrow(M,g)$ que maximiza (o alcanza) la distancia espacio-tiempo entre cualquier par de sus puntos. En particular, c no contiene ningún par de puntos conjugados.

Por otra parte, para obtener la contradicción requerida para así concluir la singularidad geodésica no espacial del espacio-tiempo dado, invocamos ahora el importante teorema siguiente, [25], sección 4.4, [4], sección 12.2.

Teorema fundamental de conjugación. *Sea $c:\mathbb{R}\longrightarrow(M,g)$ una geodésica nula o temporal completa en una variedad de Lorentz arbitraria, o una geodésica completa en una variedad Riemanniana.*

Supongamos que c satisface la siguiente condición de curvatura de Ricci: $\mathrm{Ric}(c'(t),c'(t))\geq 0$ para todo t, y que también satisface la condición genérica de tener alguna curvatura seccional no cero en t_0. Entonces existen s,t con $s<t_0<t$ tal que $c\,|_{[s,t]}$ tiene un par de puntos conjugados, y por lo tanto no realiza globalmente la distancia.

Es interesante observar que una forma de este resultado en el que ahora se supone que

$$\mathrm{Ric}\left(c'(t_0),c'(t_0)\right)>0\,,\tag{14}$$

en lugar de la más sutil condición genérica de la Relatividad General, fue obtenida independientemente por Gromoll y Meyer [24], en su estudio de variedades Riemannianas completas no compactas. Justo al mismo tiempo, la comunidad de expertos en Relatividad General andaba necesitada del resultado más fuerte que impone la condición genérica para probar, siguiendo las líneas argumentales que hemos dado más arriba, los Teoremas de singularidad, cf. Hawking y Penrose [26], y también [25] que contiene más referencias. En particular, en Relatividad General, se quería obtener resultados que pudieran aplicarse al contexto de espacio-tiempos con tensor de Ricci idénticamente cero, pero que no fuesen llanos y de ahí la necesidad de la condición genérica en lugar de la hipótesis de curvatura de Ricci (14) de los geómetras Riemannianos.

RIGIDEZ DE CURVATURA E INCOMPLETITUD GEODÉSICA TEMPORAL

En el Teorema Modelo de Singularidad se apela a dos condiciones de curvatura para obtener la incompletitud geodésica no espacial:

(i) La Condición de Curvatura Temporal:

$$\mathrm{Ric}\,(v, v) \geq 0$$

para todo vector temporal v.

(ii) La Condición Genérica que, a grandes rasgos, requiere que cada geodésica no espacial inextendible contenga un punto en el que alguna curvatura seccional no sea cero.

Alrededor de 1980, S.-T. Yau se dió cuenta de que se podía utilizar en este contexto la idea de rigidez de curvatura de geometría diferencial. Como la primera condición, (i), ya es una desigualdad débil, la rigidez de curvatura aquí significaría simplemente eliminar la segunda condición, (ii), de "no ser igual a cero" de la hipótesis del Teorema Modelo de Singularidad. Yau sugirió que si un espacio-tiempo, físicamente razonable, satisface la Condición de Curvatura Temporal y a pesar de eso NO fuera geodésicamente temporalmente incompleto (y por lo tanto, fuera geodésicamente temporalmente completo), ese espacio-tiempo dado debería ser geodésicamente completo sólo en circunstancias muy especiales.

Esta idea fue formulada por primera vez en un artículo publicado por Bartnik en 1988, [3]:

Conjetura de rigidez de curvatura bajo incompletitud geodésica temporal. *Supongamos que (M, g) es un espacio-tiempo que satisface:*

(a) *(M, g) contiene una superficie de Cauchy compacta y*

(b) $\mathrm{Ric}(v, v) \geq 0$ *para todo vector temporal v.*

Entonces, o bien

(i) *(M, g) es geodésicamente temporalmente INcompleta o bien*

(ii) *(M, g) es geodésicamente temporalmente completa y, además, es isométrica a una variedad producto*

$$(\mathbb{R} \times V, -dt^2 \oplus h)$$

con (V, h) una variedad Riemanniana compacta.

En términos generales, gran parte del trabajo que se ha hecho sobre esta conjetura se ha llevado a cabo bajo el siguiente punto de vista, semejante al de teorema del final rígido Riemanniano mencionado en este artículo. Supongamos que (M,g) fuese geodésicamente temporalmente completa. Entonces podemos obtener una geodésica temporal completa $c : \mathbb{R} \longrightarrow (M,g)$ tal que la longitud de arco entre cualesquiera par de sus puntos sea la distancia entre ellos, es decir, c es una línea temporal completa, para así concluir la deseada escisión de la parte *(ii)* mediante el siguiente resultado que fue obtenido por distintos autores durante los años 80 y 90 (cf. [5], [13], [16], [17], [21], [27]):

Teorema de escisión del espacio-tiempo. *Supongamos que (M,g) es un espacio-tiempo, de dimensión $n \geq 3$, tal que:*

(i) *(M,g) es globalmente hiperbólico, o geodésicamente temporalmente completo.*

(ii) *$\operatorname{Ric}(v,v) \geq 0$ para todo vector temporal v.*

(iii) *(M,g) contiene una línea temporal completa $c : \mathbb{R} \longrightarrow (M,g)$.*

Entonces (M,g) es isométrico a una variedad producto

$$\left(\mathbb{R} \times V, -dt^2 \oplus h\right)$$

donde (V,h) es una variedad Riemanniana completa, dada como superficie de nivel de la función de Busemann asociada a la línea dada c, y también una superficie de Cauchy de (M,g).

Por lo tanto, incluso bajo la hipótesis de completitud geodésica temporal (M,g) resulta ser globalmente hiperbólica. Además, aunque, en general, la hiperbolicidad global no está relacionada con la completitud geodésica, es el caso que si en *(i)* se supone hiperbolicidad global, al obtener una *escisión* métrica se fuerza a (M,g) a que sea geodésicamente completo por el Teorema 3.67 de [4], p. 103.

En Galloway [18] se puede encontrar el siguiente resumen de los intentos de probar la conjetura de rigidez de curvatura bajo incompletitud geodésica temporal.

> Básicamente se han intentado dos caminos para probar la conjetura. Uno, considerado primero por Geroch [22], es establecer la existencia de una hipersuperficie espacial maximal y compacta; es bien sabido que en este caso la conjetura se verifica (véase, por ejemplo, [3], [15]). El otro camino, generalmente atribuido a Yau, consiste en establecer la existencia de una línea temporal (es decir, una geodésica temporal inextendible globalmente maximal). La conjetura se obtendría como consecuencia del teorema Lorentziano de escisión ...

La dificultad con este enfoque es que, aunque hay un procedimiento estándar para construir una línea causal (temporal o nula) en un espacio-tiempo con una superficie de Cauchy compacta, la línea no tiene por qué ser temporal [10]. La conjetura se ha demostrado añadiendo ciertas condiciones de tipo "sin horizonte", [16], [3], [14]. Más adelante demostramos la conjetura bajo una condición adicional más débil.

Sea S una hipersuperficie espacial de clase C^0 en un espacio-tiempo (M,g). Una geodésica temporal inextendible hacia el futuro $\gamma : [0,a) \longrightarrow (M,g)$ se dice que es un *S-rayo hacia el futuro* si $\gamma(0) \in S$ y γ maximiza la distancia a S, es decir, si

$$L\left(\gamma\mid_{[0,t]}\right) = d\left(S,\gamma\left(t\right)\right) = \sup\left\{d\left(s,\gamma(t)\right), s \in S\right\} .$$

Un S-rayo hacia el pasado se define por dualidad respecto al tiempo. Si S es compacta, S siempre admite S-rayos hacia el pasado y hacia el futuro, cf. [14]. Daremos ahora la versión de la conjetura de rigidez que aparece en [18].

Teorema. *Supongamos que (M,g) es un espacio-tiempo que contiene una superficie de Cauchy compacta S y que verifica la condición fuerte de energía. Si (M,g) es geodésicamente temporalmente completo y contiene un S-rayo hacia el futuro γ y un S-rayo hacia el pasado η tal que $I^-(\gamma) \cap I^+(\eta) \neq \emptyset$, entonces M se escinde como en la conjetura.*

Veamos un esbozo de una de las demostraciones posibles de este resultado, cf. [18]. Tomemos $q_n := \gamma(t_n)$, $t_n \longrightarrow +\infty$, y $p_n := \eta(s_n)$, $s_n \longrightarrow +\infty$, tal que $q_n \in I^+(p_n)$ para cada n. Dada la hiperbolicidad global, existen segmentos geodésicos temporales maximales $c_n : [a_n, b_n] \longrightarrow (M,g)$ de q_n a p_n con $c_n(0)$ en S. Utilizando la maquinaria de la curva límite de la Relatividad General (cf. [4], sección 3.3, [25], [28], [14]), se obtiene una geodésica límite $c : (a,b) \longrightarrow (M,g)$ de la sucesión $\{c_n\}$. Como c es el límite de las geodésicas temporales c_n, c es nula o temporal. Puesto que S es compacto, y las sucesiones $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ divergen al infinito, las versiones apropiadas de la maquinaria de curvas límite implican que $(a,b) = (-\infty,+\infty)$. Por lo tanto c es una línea temporal o nula. Para concluir el argumento tenemos que demostrar que c tiene que ser forzosamente temporal, y por tanto se puede aplicar el teorema Lorentziano de escisión y, finalmente, se obtiene la conjetura, en este caso particular. En [18] esto se logra mediante una estimación de la longitud de las c_n's y la función distancia orientada a S definida en el desarrollo de Cauchy de S, que en este caso es todo M, por la hiperbolicidad global.

Mediante técnicas diferentes, Petersen y Walshap [29] han obtenido resultados sobre la rigidez de la completitud geodésica espacial. Un campo vectorial X temporal unitario y dirigido hacia el futuro en (M,g) se dice que es *rígido* si la derivada covariante ∇X actúa como una trasformación anti-simétrica sobre el complemento ortogonal de X, en todos los puntos de M. En el teorema 4.1 de [29], se señala que si cada 2-plano que contiene a X tiene curvatura seccional no negativa, entonces o bien (M,g) es espacialmente incompleta, o bien (M,g)

se escinde localmente e isométricamente en la dirección de X. Inspirados en estos resultados de [29], García-Río y Kupeli en [20] han obtenido resultados similares para espacio-tiempos que poseen campos de vectores temporales unitarios e irrotacionales.

También, Andersson y Howard, en [2], han obtenido resultados interesantes relativos a la rigidez y a los productos torcidos con técnicas de funciones de Busemann.

Bibliografía

[1] ABRESCH, U. MEYER, W.: "Injectivity radius estimates and sphere theorems", *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, **30** (1997), eds. K. Grove, P. Petersen, Cambridge University Press, 1-47.

[2] ANDERSSON, L., HOWARD, R.: "Comparison and rigidity theorems in semi-Riemannian geometry", *Commun. in Analysis and Geometry*, por aparecer.

[3] BARTNIK, R.: "Remarks on cosmological space-times and constant mean curvature surfaces", *Comm. Math. Phys.* **117** (1988), 615–624.

[4] BEEM, J., EHRLICH, P., EASLEY, K.: Global Lorentzian geometry, *Segunda edición, Marcel Dekker, Pure and Applied Mathematics*, **202** (1996), Nueva York.

[5] BEEM, J., EHRLICH, P., MARKVORSEN, S., GALLOWAY, G.: "Decomposition theorems for Lorentzian manifolds with nonpositive curvature", *J. Differential Geom.* **22** (1985), 29–42.

[6] BERGER, M.: "Les variétés riemanniennes 1/4-pincées", *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa*, **14** (1960), 161–170.

[7] CHEEGER, J., EBIN, D.: Comparison Theorems in Riemannian Geometry, *North-Holland Mathematical Library*, **9**, North Holland/American Elsevier, Nueva York, 1975.

[8] CHEEGER, J., GROMOLL, D.: "The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature", *J. Differential Geom.* **6** (1971), 119–128.

[9] COLDING, T.: "Aspects of Ricci curvature", *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, **30** (1997), eds. K. Grove, P. Petersen, Cambridge University Press, 83-98.

[10] EHRLICH, P., GALLOWAY, G.: "Timelike lines", *Classical and Quantum Grav.* **7** (1990), 297-307.

[11] EINSTEIN, A.: "Die Grundlage der allgemeinene Relativitatstheorie", *Annalen der Physik* **49** (1916), 769-822

[12] EINSTEIN, A.: "Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitatstheorie", *Sitz. Ber. Preussen Akad. Wiss.* **1917** (III), (1917), 142-152.

[13] ESCHENBURG, J. H.: "The splitting theorem for space-times with strong energy condition", *J. Differential Geom.* **27** (1988), 477–491.

[14] ESCHENBURG, J.H., GALLOWAY, G.: "Lines in space-times", *Commun. Math. Phys.* **148** (1992), 209–216.

[15] GALLOWAY, G.: "Some connections between global hyperbolicity and geodesic completeness", *J. Geom. Phys.* **6** (1989), 127-141.

[16] GALLOWAY, G.: "Splitting Theorems for spatially closed space-times", *Commun. Math. Phys.* **96** (1984), 423–429

[17] GALLOWAY, G.: "The Lorentzian splitting theorem without completeness assumptions", *J. Differential Geom.* **29** (1989), 373-387.

[18] GALLOWAY, G.: "Some rigidity results for spatially closed closed spacetimes", *Mathematics of Gravitation, Part I, Lorentzian Geometry and Einstein equations, Banach Center Publications* **41**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, 1997, 21-34.

[19] GALLOWAY, G., HORTA, A.: "Regularity of Lorentzian Busemann functions", *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 2063–2084.

[20] GARCÍA-RÍO, E., KUPELI, D.: "A rigid singularity theorem for spacetimes admitting irrotational reference frames", *J. Geom. Phys.* **28** (1998), 158–162.

[21] GERHARDT, K.: "Maximal H-surfaces in Lorentzian manifolds", *Commun. Math. Phys.* **96** (1983), 523–553.

[22] GEROCH, R.: "Singularities in closed universes", *Phys. Rev. Letters* **17** (1996), 445–447.

[23] GEROCH, R.: "Singularities in Relativity", *Relativity*, eds., M. Carmeli, S. Fickler, L. Witten. Plenum, Nueva York, 1970, 212–293.

[24] GROMOLL, D., MEYER, W.: "On complete open manifolds of positive curvature", *Annals of Mahematics* **90** (1969), 75–90.

[25] HAWKING, S., ELLIS, G.: The Large Scale Structure of Space-time, *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, 1973.

[26] HAWKING, S., PENROSE, R.: "The singularities of gravitational collapse and cosmology", *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A314** (1970), 529-548.

[27] NEWMAN, R. P. A.C.: "A proof of the splitting conjecture of S.-T. Yau", *J. Differential Geom.* **31** (1990), 163–184.

[28] O NEILL, B.: Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, *Academic Press, Pure and Applied Mathematics*, **103**, 1983.

[29] PETERSEN, P., WALSCHAP, G.: "Observer fields and the strong energy condition", *Classical and Quantum Grav.* **13** (1996), 1901–1908.

[30] RAUCH, H.E.: "A contribution to differential geometry in the large", *Annals of Mathematics*, **54** (1951), 38–55.

[31] ROMERO, A., SÁNCHEZ, M.: "On the completeness of certain families of semi-Riemannian manifolds", *Geom. Dedicata* **53** (1994), 103–117.

[32] SÁNCHEZ, M.: "Lorentzian manifolds admitting a Killing vector field", *Nonlinear Analysis, TMA*, **30** (1997), 643–654.

Paul Ehrlich. Department of Mathematics, University of Florida. P. O. Box 118105 Gainesville, FL 32611-8105. Estados Unidos de América.

Traducido por María José Alcón