EL DIABLO DE LOS NÚMEROS

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

En este número de la Gaceta tratamos un tema clásico, el sistema binario, que hemos querido ilustrar con cuatro ejemplos divertidos.

Os recuerdo que vuestras colaboraciones pueden ser enviadas a la dirección `franciscojavier.cilleruelo@uam.es`

El sistema binario

El sistema de numeración decimal ha prevalecido sobre otros sistemas como consecuencia del accidente anatómico que supone el tener diez dedos en las manos. No es de extrañar que el ordenador, que dispone sólo de dos dedos para contar, utilice el sistema binario.

En el sistema binario cualquier entero se puede representar utilizando los dígitos 0 y 1.

$$a_k \dots a_1 a_0 = a_k 2^k + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0, \qquad a_i \in \{0, 1\}$$

Como ocurre en cualquier otro sistema de numeración, la representación de un entero de esta forma es única. Es decir, todo entero se puede escribir, de manera única, como suma de distintas potencias de 2.

Un juego de adivinación muy popular basado en este hecho es el siguiente: una vez dispuestos los siguientes bloques de números, se invita a que se piense en uno de los números y se nos señale cada uno de los bloques que contenga al número pensado. Inmediatamente seremos capaces de adivinar el número secreto.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Obsérvese que cada bloque contiene todos los números tales que en su expresión como suma de distintas potencias de 2, aparece la potencia de 2 con la que comienza el bloque.

De tal manera que si, por ejemplo, se nos dice que el número pensado está en los bloques que comienzan por 2, 8 y 32 es porque en la representación de dicho número aparecen las potencias 2, 8 y 32 y sólamente éstas. Es decir, el número en cuestión es el $42 = 32 + 8 + 2$.

Resumiendo, el número pensado es el que resulta de ir sumando el primer número de cada bloque donde se nos señale que aparece el número.

La multiplicación rusa

En algunas regiones de Rusia se utilizaba un algoritmo para la multiplicación diferente del que conocemos, basado en el sistema binario.

Supongamos que queremos multiplicar 161×251. Para ello se disponen dos columnas encabezadas por ambos números, de tal manera que en la columna de la derecha vamos multiplicando por dos y en la de la izquierda vamos dividiendo por dos (escribiendo la parte entera si el dividendo es impar) hasta acabar en 1.

El resultado de la multiplicación es la suma de los números de la columna de la derecha que tengan un número impar a la izquierda.

161	251
80	502
40	1004
20	2008
10	4016
5	8032
2	16064
1	32128

Lo que realmente se ha hecho ha sido descomponer 161 como suma de potencias de 2 y multiplicar cada una de ellas por 251.

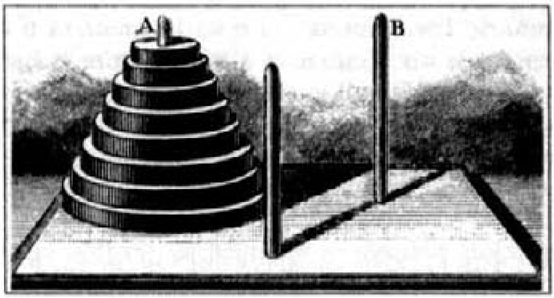
$$161 \times 251 = (2^7 + 2^5 + 2^0) \times 251 = 2^7 \times 251 + 2^5 \times 251 + 2^0 \times 251$$

$$= 32128 + 8032 + 251 = 40411$$

Obsérvese que en la columna de la izquierda los números impares van marcando las potencias de 2 que intervienen en la descomposición del factor de la izquierda.

Las torres de hanoi

El juego de las Torres de Hanoi consiste en una tabla con tres clavijas tal como indica la figura siguiente. En una de las clavijas se coloca un número indeterminado de discos de diferente tamaño de tal manera que se superpongan por diámetros decrecientes. El problema consiste en trasladar de uno en uno todos los discos a otra clavija sin que ninguno de ellos quede colocado sobre otro de diámetro inferior en ningun momento.



Cuenta la leyenda que en el templo de Benarés los monjes trasladan sin descanso 64 discos de una clavija a otra. La profecía dice que se acabará el mundo cuando completen el traslado.

Para tranquilizarnos vamos a calcular el número de traslados que se necesitan. Vamos a llamar T_k al número de movimientos necesarios para trasladar los primeros k discos a otra clavija.

Si queremos trasladar k discos debemos primero trasladar los $k-1$ anteriores a la otra clavija, trasladar el disco k a la clavija vacía; y sobre éste, trasladar de nuevo los $k-1$ discos anteriores. Es decir, $T_k = 2T_{k-1} + 1$.

Ahora manipulamos esta expresión para obtener una fórmula explícita para T_k.

$$T_k + 1 = 2(T_{k-1} + 1) = 2^2(T_{k-2} + 1) = \cdots = 2^{k-1}(T_1 + 1) = 2^k 2 = 2^{k+1}$$

De donde $T_k = 2^k - 1$. A razón de un segundo por traslado se tardaría $2^{64} - 1$ segundos, más de 5 billones de años.

Problema 1. Partiendo de una pila de 10 discos en una de las clavijas, numerados de manera creciente según su tamaño, me propuse trasladar unos determinados discos a otra clavija respetando las reglas de las torres de Hanoi. Necesité 545 movimientos. ¿Qué discos trasladé sabiendo que no lo pude hacer en menos movimientos? ¿Qué discos quedaron en cada una de las otras clavijas?

El juego del nim

En este antiquísimo juego entre dos jugadores se comienza con un número indeterminado de piedras dispuestas en filas. En cada turno el jugador puede retirar las piedras que quiera *pero de una sola fila*. Gana quien quite la última piedra.

La expresión en el sistema binario del número de piedras de cada fila nos facilitará la estrategia ganadora.

En cualquier juego una posición es ganadora si el otro jugador no puede evitar una posición perdedora, que es, a su vez, una posición que permite al jugador anterior volver a una posición ganadora. Por supuesto la posición final del ganador debe estar incluida en el conjunto de las posiciones ganadoras.

Las posiciones ganadoras en el juego del NIM son aquellas en las que, una vez expresados en el sistema binario los números de piedras de cada fila y dispuestos según la figura, el número de unos en cada columna es par. Las restantes posiciones son perdedoras. En particular la posición final del juego (ninguna piedra en niguna fila) es una posición ganadora.

Observad que desde una posición ganadora el otro jugador tiene que cambiar a la fuerza la paridad de los unos de al menos una columna, obteniendo así una posición perdedora.

Recíprocamente, desde una posición perdedora siempre es posible conseguir una posición ganadora de la manera siguiente: nos fijamos en la primera columna (de izquierda a derecha) que contenga un número impar de unos. De cualquier fila que contenga un uno en dicha columna siempre podemos quitar las piedras necesarias para conseguir eliminar ese 1 y modificar el resto de los dígitos de tal manera que obtengamos una posición ganadora.

En el ejemplo de la figura podemos, por ejemplo, quitar 4 piedras de la primera fila.

Problema 2. Si con las mismas reglas del NIM pierde el que quite la última piedra, ¿cuál debería ser nuestra primera jugada con la disposición anterior? Puede haber más de una solución.

Para acabar la sección propongo un problema donde la clave está en elegir el sistema de numeración adecuado.

Problema 3. Disponemos de una balanza de dos platillos y de cuatro pesas con las que somos capaces de pesar cualquier cantidad de quilos entre 1 y 40 inclusives. ¿Cuánto pesa cada una de esas pesas?