Un panorama de variedades aproximadamente Kähler

por

Ramón Reyes Carrión y Simon Salamon

In Memorian Alfred Gray

INTRODUCCIÓN

Las variedades aproximadamente Kähler son en cierto sentido las más interesante dentro de las 16 clase de variedades casi Hermitianas. Son interesantes por su estructura, por cierta semejanza que tienen con otras variedades más ampliamente estudiadas, como variedades con holonomía $SU(n)$ y como veremos más adelante, por ciertas construcciones que se pueden hacer a partir de ellas. El estudio extensivo de estas variedades se inició en la década de los setenta con los trabajos de Alfred Gray [Gra70], [Gra76] y otros. Recientemente ha resurgido el interés en ellas; principalmente en relación a la existencia de estructuras complejas en la esfera de dimensión seis.

De particular interés es el caso de dimensión seis, que tiene una relación cercana con el estudio de grupos de holonomía; en particular con los grupos de Lie excepcionales G_2 y $Spin(7)$. Cabe destacar que en dimensión seis las variedades aproximadamente Kähler son de Einstein y poseen curvatura escalar positiva. Además, al considerar una proyección natural de la conexión de Levi-Civita obtenemos un ejemplo natural de un instantón generalizado sobre el fibrado tangente. Es por esto que haremos especial énfasis en las propiedades de las variedades aproximadamente Kähler en dimensión seis.

DEFINICIONES

Las variedades aproximadamente Kähler son una clase de variedades casi complejas. Cuando uno quiere introducir la herramienta de la variable compleja al estudio de las variedades diferenciables, el primer paso natural es considerar variedades complejas donde el espacio sobre el que modelamos la variedad es $\mathbb{C}^m$ y los cambios de coordenadas son holomorfos. Sin embargo, puede uno ser menos ambicioso y considerar variedades casi complejas donde la estructura compleja la tenemos solo a nivel del espacio tangente; es decir, cada espacio tangente tiene una estructura de espacio vectorial complejo. Esto se logra con la existencia de un endomorfismo del haz tangente $J: TM \to TM$, con la propiedad de que $J^2 = J \circ J = -\mathrm{Id}_{TM}$. La existencia de dicho endomorfismo nos restringe en particular a variedades de dimensión par $n = 2m$.

Dada una variedad con una estructura casi compleja siempre es posible encontrar una métrica Riemaniana para la cual J es una isometría; de este modo una variedad casi Hermitiana es una variedad con toda esta estructura y la denotamos por (M, g, J). Una estructura casi Hermitiana en una variedad representa una reducción del grupo de estructura del fibrado de referencias al grupo unitario y como tal se puede remontar su estudio a fines de los años cuarenta. Es interesante notar como, históricamente, la esfera de dimensión seis S^6, ha jugado un papel importante en relación con el estudio de las estructuras no integrables y además es el ejemplo canónico de una variedad aproximadamente Kähler. Podemos encontrar una reseña historica del estudio de estas estructuras en [Gra83].

En una variedad casi Hermitiana se define la dos-forma fundamental o forma de Kähler usando la métrica y la estructura casi compleja mediante:

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y),$$

y es el estudio de ésta lo que permite hacer una clasificación de los diferentes tipos de variedades casi Hermitianas. Más precisamente, encontramos en [GH80] que, cuando consideramos la conexión de Levi-Civita ∇ asociada con la métrica Riemaniana y descomponemos el espacio de tensores que presentan las mismas simetrías que la derivada covariante de la forma de Kähler $\nabla\omega$ bajo la acción del grupo unitario, existen en general cuatro componentes irreducibles, lo cual nos da $16 = 2^4$ subespacios invariantes. Cada subespacio invariante da lugar a una clase de variedades casi Hermitianas.

Veremos varias formas equivalentes de caracterizar las variedades aproximadamente Kähler. La forma más común de verlas definidas es:

Definición 1 *Una variedad casi Hermitiana M es* aproximadamente Kähler, *si la estructura casi compleja J satisface $(\nabla_X J)X = 0$ para todo campo vectorial X sobre M.*

Estamos particularmente interesados en variedades que son aproximadamente Kähler, pero no Kähler; es decir, en aquellas para las cuales $\nabla\omega \neq 0$, pues en su estudio se hace uso de este tensor. A estas variedades las llamaremos *estrictamente aproximadamente Kähler*.

En una variedad casi compleja podemos descomponer la complejificación del fibrado tangente en vectores de tipo $(1, 0)$ y $(0, 1)$ como los fibrados donde (la extensión de) J actúa como i y $-i$, respectivamente:

$$TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}.$$

Cuando consideramos los duales correspondientes y sus potencias exteriores, esta descomposición nos da:

$$\Lambda^{p,0} = \bigwedge{}^p (T^{1,0})^*,$$

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^{0,q} & = & \bigwedge^q (T^{0,1})^*, \\ \Lambda^{p,q} & = & \Lambda^{p,0} \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^{0,q}, \\ (\bigwedge^r TM) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & = & \bigoplus_{p+q=r} \Lambda^{p,q}. \end{array}$$

Abusando un poco de la notación, usaremos los mismos símbolos para espacios vectoriales sobre un punto o fibrados vectoriales, los cuáles se distinguen según el contexto. También denotamos (siguiendo [Sal89]) por $[\![\Lambda^{p,q}]\!]$ para $p \neq q$ y $[\Lambda^{p,p}]$ los fibrados *reales*, tales que

$$\begin{array}{rcl} [\![\Lambda^{p,q}]\!] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & = & \Lambda^{p,q} \oplus \Lambda^{q,p} \\ [\Lambda^{p,p}] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & = & \Lambda^{p,p} \end{array}$$

Las diferentes caracterizaciones de variedades aproximadamente Kähler, las podemos ver en la siguiente

Proposición 1 [RC93] *Para una variedad casi Hermitiana (M^{2n}, g, J), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es aproximadamente Kähler,*
2. $\nabla\omega \in [\![\Lambda^{3,0}]\!]$,
3. $\mathrm{d}\omega = 3\nabla\omega$,
4. *Para cualesquiera campos $e, f \in T^{1,0}M$, tenemos que*
$$\begin{cases} a) & \nabla_{\bar{e}} f \in T^{1,0} \\ b) & \nabla_e f + \nabla_f e \in T^{1,0}. \end{cases}$$

EJEMPLOS

El ejemplo canónico es la esfera de dimensión seis $S^6(\lambda)$, con curvatura escalar constante λ. Como espacio homogéneo ésta puede ser descrita como el cociente $G_2/SU(3)$. Es además un ejemplo de un espacio 3-simétrico de los cuales hablaremos más adelante. Sin embargo, hay una manera muy interesante de describir la estructura casi compleja utilizando el producto vectorial que existe en $\mathbb{R}^7$ con propiedades similares al de $\mathbb{R}^3$ (ver [Gra69]). Si denotamos por N el campo vectorial normal unitario a $S^6(\lambda)$ inducido por el embebimiento estándar en $\mathbb{R}^7$, la estructura casi compleja en la esfera esta dada por $JX = N \times X$ para X un campo vectorial tangente sobre la esfera. No es difícil calcular la derivada covariante de la forma de Kähler inducida y convencerse de que la esfera, con esta estructura, es una variedad aproximadamente Kähler.

Esta estructura en la seis esfera tiene propiedades muy interesantes. Por ejemplo, no hay funciones localmente holomorfas [Her56] y no existen subvariedades casi complejas de dimensión cuatro, ni siquiera localmente. Una pregunta natural que sigue abierta es si S^6 admite una estructura compleja. Avances en esta dirección los podemos encontrar en [LeB87], [Gra97], [BH], [HKP]. Cabe notar que cualquier variedad Riemaniana, simplemente conexa, simétrica, irreducible que sea estrictamente aproximadamente Kähler, es isométrica a S^6 (ver [Sek84]). Además se sigue de una clasificación que veremos más adelante que, las variedades estrictamente aproximadamente Kähler de curvatura seccional holomorfa constante son localmente isométricas a S^6

Esta construcción tiene una generalización interesante que permite definir una estructura casi compleja en cualquier subvariedad de dimensión seis de $\mathbb{R}^8$ usando un tres-producto vectorial (ver [Gra69]). De hecho esta estructura en $\mathbb{R}^8$ está definida por la acción de Spin(7) [Bry82]. En particular Alfred Gray hace un estudio de las propiedades que tienen algunas clases de variedades casi Hermitianas definidas de esta manera.

Espacios 3-simétricos

Los espacios 3-simétricos están cercanamente relacionados con las variedades aproximadamente Kähler. A grandes rasgos, un espacio 3-simétrico, es una variedad Riemaniana, tal que para cada punto p en M tenemos una isometría (local) $\theta_p\colon M \to M$, que tiene a p como punto fijo aislado, y tal que $\theta_p^3 = \mathrm{Id}$. Esta teoría la desarrollan en detalle Wolf y Gray en [WG68] y [Gra72]. La idea central para relacionar un espacio 3-simétrico con una estructura casi compleja es la siguiente: si tenemos una estructura casi compleja y buscamos un automorfismo θ, tal que, $\theta^3 = \mathrm{Id}$, en el plano complejo tenemos el que nos da la multiplicación por una raíz cubica de la unidad.

De hecho los resultados son locales y puede verse en [Gra72] cómo, la existencia de una estructura casi compleja es equivalente a la existencia de una "famila de difeomorfismos cúbicos locales"; es decir, que para cada punto de la variedad tenemos una vecindad y un difeomorfismo de esa vecindad en sí misma, tal que, el difeomorfismo al cubo nos da la identidad en la vecindad y tiene como único punto fijo al punto en cuestión. La caracterización de los espacios 3-simétricos que son aproximadamente Kähler está dada por los espacios homogeneos $M = G/K$ que son naturalmente reductivos; es decir, que son reductivos (tenemos una descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$ que es $\mathrm{Ad}(K)$-invariante) y satisfacen:

$$\langle [X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z\rangle = \langle X, [Y,Z]_{\mathfrak{m}}\rangle \qquad \text{para todo} \quad X, Y, Z \in \mathfrak{m}$$

Proposición 2 [Gra72] *Sea $M = G/K$ un espacio pseudo-Riemaniano 3-simétrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *M es naturalmente reductivo.*
- *La estructura casi compleja asociada a M es aproximadamente Kähler.*

Ya hablamos de la esfera S^6, que es un espacio aproximadamente Kähler naturalmente reductivo. Otro ejemplo se obtiene de la siguiente manera: consideremos un grupo de Lie G compacto, simple, simplemente conexo. Al producto $G \times G$ le damos una estructura de espacio 3-simétrico considerando

$$M = G \times G \times G/G \simeq G \times G,$$

donde $G \subset G \times G \times G$ es la diagonal y $(g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_3, g_1, g_2)$ induce un automorfismo de orden 3 en M. La métrica en $G \times G$ no es la métrica producto, pero hace a M un espacio homogéneo naturalmente reductivo y por lo tanto aproximadamente Kähler. En particular, si tomamos $G = SU(2) \simeq S^3$, concluimos que $S^3 \times S^3$ tiene una estructura aproximadamente Kähler.

ESPACIOS DE TWISTOR

Dada una variedad Riemaniana M, orientable de dimensión par, el espacio de twistor $Z(M)$ es el fibrado sobre M, con proyección π, cuya fibra sobre cada punto p consiste del espacio de todas las estructuras casi complejas en el espacio tangente a la variedad en el punto p compatibles con la métrica. En el caso particular cuando la variedad M es de dimensión cuatro, tenemos una manera geométrica más explícita de trabajar en el espacio de twistor, pues la fibra sobre cada punto es una dos-esfera dentro de Λ^2_- (las dos-formas anti-auto-duales).

Esto nos permite definir de manera natural dos estructuras casi complejas, J_1 y J_2, en $Z(M)$ de la siguiente manera: Dado un punto $z \in Z(M)$, el espacio tangente a $Z(M)$ en este punto se descompone en la suma directa de un subespacio tangente a la fibra y otro isomorfo al espacio tangente a M en $p = \pi(z)$. Más aún, z determina una estructura casi compleja en T_pM, la cual, junto con alguna de las dos (por la orientación) estructuras casi complejas de la fibra (una dos-esfera) nos da la estructura casi compleja de $T_zZ(M)$. Estas dos estructuras casi complejas que solo difieren por un signo en la distribución vertical, tienen propiedades muy diferentes. Por ejemplo, J_1 permanece invariente bajo cambios conformes de la métrica de M, lo cual no sucede para J_2. La fibración $(Z(N), J_1) \to N$ es una generalización natural de la conocida fibración $\mathbb{CP}^3 \to S^4$ de Penrose; sin embargo, la que es de interés en el contexto que estamos considerando, es la estructura J_2. El espacio total $(Z(N), J_a)$ pertenece a alguna clase de variedades casi Hermitianas dependiendo de condiciones en la variedad M (ver [Mu(s)87]). Mientras que J_2 nunca es integrable [Sal85], Atiyah, Hitchin y Singer [AHS78] encontraron que J_1 es integrable si y solo si M^4 es una variedad anti-auto-dual.

Para nuestro análisis, lo que hace importante a la estructura J_2 es la siguiente proposición que se desprende de [Sal89]

Proposición 3 *Si M es anti-auto-dual, de Einstein y con curvatura escalar positiva, entonces $(Z(M), J_2)$ puede ser dotada de una métrica que la hace aproximadamente Kähler.*

Observemos que según Hitchin ha demostrado [Bes87], las únicas variedades compactas (o completas) que satisfacen las hipótesis son S^4 y $\mathbb{CP}^2$, a partir de las cuales obtenemos estructuras aproximadamente Kähler en el espacio proyectivo complejo de dimensión tres $\mathbb{CP}^3$ y la variedad de banderas $\mathbb{F}^3$ respectivamente.

Estos dos ejemplos de espacios de twistor que son variedades aproximadamente Kähler, $\mathbb{CP}^3$ y $\mathbb{F}^3$, con la estructura casi compleja J_2, pueden ser vistos también como espacios 3-simétricos cuando consideramos $\sigma = \frac{1}{2}(\sqrt{3}J_2 - 1)$, que se extiende a un automorfismo del álgebra de Lie correspondiente ($\mathfrak{so}(5)$ en el primer caso y $\mathfrak{su}(3)$ en el segundo).

Clasificación

En la literatura encontramos una clasificación de las posibles variedades aproximadamente Kähler con curvatura seccional holomorfa constante en cada punto. Este estudio resulta de buscar análogos (casi) complejos de los espacios de curvatura constante.

La curvatura seccional holomorfa está definida como la curvatura seccional restringida a secciones holomorfas. Un subespacio Π bidimensional del espacio tangente a M en un punto p, $\Pi \subseteq T_pM$ es holomorfo siempre y cuando exista una base de la forma $\{x, Jx\}$.

La clasificación de variedades aproximadamente Kähler con curvatura seccional holomorfa constante en cada punto de dimensión por lo menos cuatro está dada por la siguiente:

Proposición 4 [Gra74] *Sea M una variedad aproximadamente Kähler con curvatura seccional holomorfa H constante en cada punto. Suponer que la dimensión de M es mayor o igual que cuatro. Entonces, existen únicamente las siguientes cuatro posibilidades.*

(i) *M es localmente isométrica a $\mathbb{C}^n$, si $H = 0$;*
(ii) *M es localmente isométrica al plano proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$;*
(iii) *M es localmente isométrica a S^6;*
(iv) *M es localmente isométrica al espacio hiperbólico complejo $\mathbb{CH}^n$, si H es negativa.*

Un corolario inmediato es que en este caso la curvatura seccional holomorfa es constante globalmente. Es interesante observar cómo, las clases Kähler y aproximadamente Kähler, son las únicas para las cuales se han encontrado clasificaciones de este tipo.

Propiedades en dimensión seis

Para variedades aproximadamente Kähler de dimensión seis se tiene una caracterización en términos de formas diferenciales. Además, como veremos más adelante, la conexión unitaria natural derivada de la conexión de Levi-Civita tiene propiedades muy interesantes.

Proposición 5 [RC93] *Sea M una variedad casi Hermitiana de dimensión seis. entonces M es aproximadamente Kähler, si y solo si, existe una tres forma $\Phi = \phi + i\psi \in \Lambda^{3,0}$ y una constante μ tales que valen las condiciones*

(i) $\mathrm{d}\omega = 12\,\mu\,\phi$ *y*
(ii) $\mathrm{d}\psi = \mu\,\omega \wedge \omega$.

Un punto importante que resalta esta proposición es cómo la estructura aproximadamente Kähler queda determinada por un sistema diferencial exterior. Esto permite, usando la herrámienta que proporciona la teoría de Cartan-Kähler, hacer un estudio local de la ecuaciones que determinan esta estructura. De hecho, estudios análogos los ha realizado Bryant para variedades con holonomía G_2 y $Spin(7)$ en [Bry87]. Otro aspecto importante que se puede apreciar de esta proposición es el hecho de que cuando $\mu = 0$ estas ecuaciones son precisamente las que definen una estructura con holonomía $SU(3)$, lo cual revela la relación tan estrecha que existe entre las variedades aproximadamente Kähler y las variedades con holonomía $SU(3)$.

La conexión canónica

En toda variedad casi Hermitiana M^{2m} de cualquier dimensión podemos, dada la conexión de Levi-Civita ∇ extendida a la complejificación del fibrado tangente $TM_{\mathbb{C}}$, considerar:

$$\overline{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J(\nabla_X(JY))).$$

Esta conexión definida en $TM_{\mathbb{C}}$, es una proyección natural de ∇ que preserva la descomposición en tipos. De hecho, esta conexión se estudia en [FI55] para el caso de la esfera S^6. Ahí se prueba que esta es la única conexión invariante bajo G_2 que hace paralelas a la métrica y a la estructura casi compleja. También podemos ver más propiedades de esta conexión para variedades aproximadamente Kähler en [Gra76], donde además de otros resultados importantes en la teoría de variedades aproximadamente Kähler, encontramos varias identidades de curvatura que generalizan las conocidas identidades para variedades Kähler.

Dada cualquier G-estructura sobre una variedad Riemaniana M, para un grupo de Lie $G \subset SO(n)$, tenemos asociada una torsión intrínseca τ considerada en [Bry87] que, a groso modo, mide qué tan lejos estamos de que la conexión ∇ de Levi-civita se reduzca a G. También tenemos asociada una única G-conexión afín que tiene como torsión a τ. A esta conexión la llamamos la *conexión canónica* y se estudia en detalle en [RC93]; ahí se prueba que para el caso de variedades aproximadamente Kähler se trata precisamente de la conexión $\overline{\nabla}$ definida arriba. Además, tanto la métrica g, como la estructura casi compleja J, son $\overline{\nabla}$-paralelas.

Para variedades estrictamente aproximadamente Kähler de dimensión seis tenemos propiedades más interesantes. En particular, la tres-forma Φ de la proposición **5** es también $\overline{\nabla}$-paralela, por lo cual $\overline{\nabla}$ preserva la $SU(3)$-estructura. Es interesante notar cómo, en particular para las variedades aproximadamente Kähler que son espacios de twistor, la holonomía de la conexión canónica se reduce aún más: a $U(2) \subset SU(3)$. Una pregunta natural que parece que no se ha respondido, es si esta condición caracteriza a los espacios de twistor dentro de las variedades aproximadamente Kähler. Concluimos esta sección mencionando el interesante problema de encontrar nuevos ejemplos de variedades aproximadamente Kähler compactas, esto es, que fuera de los cuatro ejemplos mencionados, S^6, $\mathbb{CP}^3$, $S^3 \times S^3$ y $\mathbb{F}^3$, todavía no se conocen más casos.

INSTANTONES GENERALIZADOS

Un instantón auto-dual sobre una variedad M de dimensión cuatro, es una conexión en un G-fibrado principal, tal que, las dos-formas R^i_j componentes de la curvatura pertenecen a Λ^2_+. Estos instantones han sido ampliamente estudiados por varios autores (ver, por ejemplo [DK90]). Para generalizar esta noción de instantón a una variedad M de dimensión n, un camino a seguir es considerar que las componentes de la curvatura pertenezcan a algún subespacio $V \subset \bigwedge^2 T^*_x M$. Dada una G-estructura en la variedad M una opción inmediata es considerar el G-submódulo $\mathfrak{g} \subseteq \bigwedge^2 T^*_x M$ inducido por el álgebra de Lie de G. Es decir, hacer uso de la descomposición $SO(n)$-ortogonal

$$\Lambda^2 M = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\perp}.$$

De esta manera se generaliza el concepto de instantón en [RC98] de la siguiente manera: Sea G un subgrupo de $SO(n)$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, tal que el normalizador $N(G)$ es conexo, y sea P una $N(G)$-estructura en M. Sea A una conexión en algún fibrado principal Q sobre M con grupo de estructura K. Así, la curvatura R_A de A es una sección de $\mathrm{ad}Q \otimes \Lambda^2$.

Definición 2 *Con la notación anterior, A es un* instantón *para la pareja $(P, \mathfrak{g})$ si R_A es una sección del subfibrado $\mathrm{ad}Q \otimes \mathfrak{g}$ de $\mathrm{ad}Q \otimes \Lambda^2$.*

Equivalentemente, A es un instantón si las dos-formas R^i_j componentes de la curvatura, toman valores en el álgebra de Lie de G.

Si consideramos en particular la conexión canónica $\overline{\nabla}$, en [RC98] se prueba que es un instantón para la $U(3)$-estructura. En la demostración podemos ver además que una variedad estrictamente aproximadamente Kähler debe ser de Einstein y la curvatura escalar es un múltiplo positivo del cuadrado de la constante μ que aparece en la proposición **5**. Estas conclusiones también se deducen del trabajo de Gray en [Gra76].

Estos conceptos de instantones generalizados parecen apuntar en la dirección correcta, pues han dado lugar a interesantes resultados, como los que encontramos en [DT98].

COMENTARIOS FINALES

Uno de los intereses en estudiar variedades aproximadamente Kähler en dimensión seis, está relacionado con la búsqueda de variedades con holonomía G_2, y la relación que hay entre éstas se puede ver al estudiar detenidamente la construcción de espacio de twistor $Z(M^4)$ y recordar que uno de los primeros ejemplos de métricas completas con holonomía G_2 se obtiene precisamente (ver [BS89]) en el espacio total de $\Lambda^2_- M$ para ciertas cuatro variedades M. Es así que obtenemos el siguiente resultado probado independientemente y con métodos distintos en [Bär93] y [RC93]

Proposición 6 *Sea M una variedad estrictamente aproximadamente Kähler de dimensión seis. Entonces el cono $M \times \mathbb{R}^+$ puede ser dotado de una G_2-estructura y una métrica con holonomía contenida en G_2.*

Bibliografía

[AHS78] ATIYAH, M. F., HITCHIN N. J., SINGER I. M.: "Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry", *Proc. Roy. Soc. London Ser.*, **362** (1978), 425-461.

[Bär93] BÄR, C.: "Real Killing spinors and holonomy", *Comm. Math. Phys.*, **154** (1993), 509-521.

[Bes87] BESSE, A. L.: "Einstein Manifolds", *Springer, Berlin-Heidelberg-New York,* 1987.

[BH] BOR, G. HERNÁNDEZ. L.: "The canonical bundle of a hermitian manifold", *To appear in Bol. Soc. Mat. Mexicana (2).*

[Bry82] BRYANT, R. L.: "Submanifolds and special structures on the octonians", *J. Diff. Geometry,* **17** (1982), no. 2, 185-232.

[Bry87] BRYANT, R. L.: "Metrics with exceptional holonomy", *Ann. of Math.*, **126** (1987), 525-576.

[BS89] BRYANT, R. L., SALAMON S.: "On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy", *Duke Math. J.,* **58** (1989), no. 3, 829-849.

[DK90] DONALDSON, S. K., KRONHEIMER P. B.: "The Geometry of Four-Manifolds", *Oxford mathematical monographs, Clarendon Press, Oxford,* 1990.

[DT98] DONALDSON, S. K., THOMAS R. P.: "Gauge theory in higher dimensions", *The Geometric Universe; Science, Geometry, And The Work Of Roger Penrose, Oxford University Press,* 1998, pp. 31-47.

[FI55] FUKAMI, T., ISHISHARA S.: "Almost hermitian structures on S^6", *Tôhoku Math. J.*, **7** (1955), 151-156.

[GH80] GRAY, A., HERVELLA L.: "The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants", *Ann. Mat. Pura App.*, **123** (1980), 35-58.

[Gra69] GRAY, A.: "Vector cross products on manifolds", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141** (1969), 465-504.

[Gra70] GRAY, A.: "Nearly kahler manifolds", *J.-Differential-Geometry,* **4** (1970), 283-309.

[Gra72] GRAY, A.: "Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3", *J. Differential Geom.*, **7** (1972), 343-369.

[Gra74] GRAY, A.: "Classification des varietes approximativement Kähleriennes de courbure sectionnelle holomorphe constante", *C. R. Acad. Sci. Paris,* **279** (1974), no., 797-800.

[Gra76] GRAY, A.: "The structure of nearly Kähler manifolds", *Math. Ann.*, **223** (1976), 233-248.

[Gra83] GRAY, A.: "Homogeneous almost Hermitian manifolds", *Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, La Precisa*, 1983.

[Gra97] GRAY, A.: "A property of a hypothetical complex structure on the six sphere", *Boll. Un. Mat. Ital.*, B (7) **11** (1997), no. 2, 251-255.

[Her56] HERMANN, R.: "Compact almost complex spaces of positive characteristic", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 471-481.

[HKP] HUCKLEBERRYN, A., KEBEKUS, S., PETERNELL, T.: "Group actions on S^6 and complex structures on $\mathbb{P}_3$", *Preprint: math.AG/9812076, MSC-class: 53C15; 32C10; 32M12.*

[LeB87] LEBRUN, C.: "Orthogonal complex structures on s^6", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **101** (1987), no. 1, 136-138.

[Muš87] MUŠKAROV, O.: "Structures presque hermitiennes sur des espaces twistoriels et leurs types", *C. R. Acad. Sci. Paris* **305** (1987), 307-309.

[RC93] REYES CARRIÓN R.: "Some special geometries defined by Lie groups", *Ph.D. thesis, University of Oxford*, Trinity 1993.

[RC98] REYES CARRIÓN R.: "A generalization of the notion of instanton", *Differential Geom. Appl.*, **8** (1998), no.1, 1-20.

[Sal85] SALAMON S.: "Harmonic and holomorphic maps", *Geometry Seminar "Luigi Bianchi" II -1984 (E. Vesentini, ed.), Lecture notes in mathematics*, vol. 1164, Springer-Verlag, 1985, pp. 161-224.

[Sal89] SALAMON S.: "Riemannian geometry and holonomy groups", *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, Longman Scientific & Technical, 1989.

[Sek84] SEKIGAWA K.: "Riemannian symmetric nearly Kaehlerian manifolds", *Tensor (N.S.)*, **41** (1984), no. 1, 35-38.

[WG68] WOLF J., GRAY A.: "Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms i and ii", *J. Diff. Geometry*, **2** (1968), 77-114 and 115-159.

Ramón Reyes Carrión. CIMAT. Apdo. postal 402. 36000 Guanajuato
GTO. México
e-mail: `ramon@fractal.cimat.mx`

Simon Salamon. Mathematical Institute. Trinity College
2429 St. Giles. Oxford, OX1 3LB. Gran Bretaña
e-mail: `salamon@maths.ox.ac.uk`